SÈRIE 5

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.

2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat. Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.

3. En alguns casos, la solució final pot admetre expressions equivalents. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.

4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.

5. Penalització per errades de càlcul o transcripció:

   - Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.

   - En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.

   - En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.

   - Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

Qüestió 1

a)

Efectivament, si multipliquem

$$C^3 = C^2 \cdot C = C \cdot C^2 = C \cdot C \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant en multiplicar C per C^2, i a l'inrevés, obtenim la identitat. Amb això provem que la matriu C és invertible i que la seva inversa és C^2

$$C^2 = C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per a calcular C^{2022}, com que 2022=3·674, $\boxed{C^{2022} =}\ (C^3)^{674} = I_2^{674} = \boxed{I_2}$.

b)

De l'equació $C \cdot X = A - 2 \cdot I_2$, multiplicant ambdós termes per l'esquerra per C^{-1} obtenim:

$$\boxed{X =}\ C^{-1} \cdot (A - 2 \cdot I_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}$$

Qüestió 2

a)

Aplicarem l'equació: $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$.

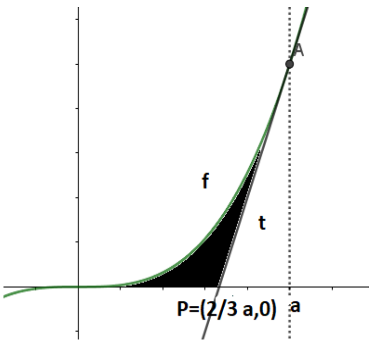
Com que $f(x): y = x^3$, $f(a) = a^3$, $f'(x) = 3x^2$, així que $f'(a) = 3a^2$

i tindrem $y = 3a^2 \cdot (x - a) + a^3 \rightarrow \boxed{t: y = 3a^2x - 2a^3}$.

El punt de tall de la recta t amb l'eix de les abscisses ($y = 0$) és:

$0 = 3a^2 \cdot x - 2a^3 \rightarrow x = \frac{2a^3}{3a^2} = \frac{2}{3}a$, així que el punt de tall és $\boxed{P = \left(\frac{2}{3}a, 0\right)}$.

b)



L'àrea que ens demanen és la regió ombrejada de la figura i es pot calcular fent l'àrea limitada per la funció f, entre $x = 0$ i $x = a$, menys l'àrea del triangle format per la recta tangent t i l'eix d'abscisses entre $x = \frac{2}{3}a$ i $x = a$.

$A_T = \int_0^a x^3\,dx - A_{triangle} = \left[\frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^a - \frac{\left(a - \frac{2}{3}a\right) \cdot a^3}{2} = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{6} = \frac{a^4}{12}$,

així que $\frac{a^4}{12} = 108 \rightarrow a^4 = 1296 \rightarrow \boxed{a = 6}$

Observació: També es pot calcular mitjançant la integral

$$A_T = \int_0^{\frac{2}{3}a} f(x)dx + \int_{\frac{2}{3}a}^{a} \big(f(x) - t(x)\big)dx.$$

Qüestió 3

a)

Per a discutir el sistema d'equacions lineals calculem el determinant de la matriu dels coeficient A, per a calcular-ne el rang.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = (2m^2 + 2(m-3)) - \left(6m + 2(m-3)\right) = 2m^2 - 6m.$$

$$|A| = 0 \quad \rightarrow 2m(m-3) = 0 \quad \rightarrow \begin{matrix} m = 0 \\ m = 3 \end{matrix}$$

I per tant podem organitzar la discussió en tres casos.

- Cas I: $\boldsymbol{m \neq 0}$ i $\boldsymbol{m \neq 3}$

  $rang(A) = 3 = rang(A \mid b) =$ nombre d'incògnites i pel Teorema de Rouché-Fröbenius el sistema és compatible i determinat, amb una sola solució, SCD.

- Cas II: $\boldsymbol{m = 0}$

  Com que $|A| = 0$ tenim que $rang(A) < 3$, però $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rang(A) =$ 2.

  La matriu ampliada és:

  $$A \mid b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -6 \\ 2 & -1 & 0 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \underset{f_3 - f_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & -3 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \underset{f_3 + f_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

  Per tant $rang(A) = rang(A \mid b) = 2 < 3 =$ nombre d'incògnites. Per tant és un **SCI** (sistema compatible indeterminat amb 3 -2 =1 variable lliure, té infinites solucions).

- Cas III: $\boldsymbol{m = 3}$

  Com que $|A| = 0$ tenim que $rang(A) < 3$, però $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2.$

  La matriu ampliada és:

  $$A|b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \vdots & -6 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \underset{f_3 - f_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 6 \end{pmatrix}$$

  I per tant tenim $rang(A) = 2 \neq rang(A \mid b) = 3$. Per tant, tenim un SI (sistema incompatible), no té solució.

b)

- Si $\boldsymbol{m}=\mathbf{0}$, la matriu ampliada és:

$$A\,|b=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -6\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}\sim\begin{cases}2x-y+3z=0\\ z=-2\end{cases}$$

$$\boxed{Recta\ \ r:\begin{cases}x=k\\ y=2k-6, \quad k\in\mathbb{R}\\ z=-2\end{cases}}$$

Veient els vectors normals dels tres plans: $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -6\\ 2 & -1 & 0 & \vdots & 6\end{pmatrix}\begin{matrix}n_{\pi 1}=(2,-1,3)\\ n_{\pi 2}=(0,0,3)\\ n_{\pi 3}=(2,-1,0)\end{matrix}$.

Per tant, els tres plans es tallen en la recta r.

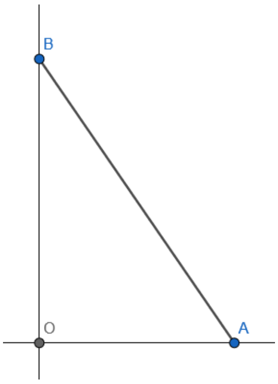
- Si $\boldsymbol{m}=\mathbf{3}$ ja hem vist que el sistema no té solució, és a dir que no hi ha cap punt intersecció dels 3 plans.

La posició relativa dels tres plans ens la dona els seus vectors normals i els termes independents:

$A\ |\ b=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & \vdots & 0\\ 0 & 3 & 0 & \vdots & -6\\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 6\end{pmatrix}\begin{matrix}n_{\pi 1}=(2,-1,3)\\ n_{\pi 2}=(0,3,0)\\ n_{\pi 3}=(2,-1,3)\end{matrix}$ així que, com que els vectors $n_{\pi 1}$i $n_{\pi 3}$ són proporcionals els plans π_1 i π_3 són paral·lels i estan tallats pel pla π_2.

Qüestió 4

a)



Sabem que $x + y = 10$

Per tant, $y = 10 - x$

$$\grave{A}rea = \boxed{A(x) =} \frac{x(10-x)}{2} = \boxed{\frac{10x - x^2}{2}}$$

$$A'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x$$

$$A''(x) = -1$$

$A' = 0$ quan $x = 5$. $A''(5) = -1 < 0$. Per tant, l'àrea és màxima quan $\boxed{x = 5}$.

En aquest cas l'àrea màxima és

$\boxed{A(5) = 25/2 \text{ unitats de superfície}}$.

b)

Sabem que $x + y = 10$

Per tant, $y = 10 - x$

$$hipotenusa = \boxed{H(x) =} \sqrt{x^2 + (10-x)^2} = \boxed{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}}$$

$$H'(x) = \frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}} = \frac{2x-10}{\sqrt{2x^2-20x+100}}$$

$$H'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 10}{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}} = 0 \Leftrightarrow 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$H''(x) = \frac{2\sqrt{2x^2-20x+100}-(2x-10)\frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}}}{2x^2-20x+100} = \frac{2\left(2x^2-20x+100\right)-(2x-10)^2}{\sqrt{(2x^2-20x+100)^3}} = \frac{100}{\sqrt{(2x^2-20x+100)^3}}$$

$H''(5) > 0$ per tant $\boxed{\text{la funció hipotenusa té un mínim quan } x = 5}$.

El valor mínim de la hipotenusa serà $\boxed{H(5) = 5\sqrt{2} \text{ unitats de longitud}}$.

Observació: L'estudiant també pot optar, de forma justificada, per fer mínima la funció $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$, prescindint de l'arrel quadrada, fet que simplifica els càlculs. Això és possible atès que la funció arrel quadrada es monòtona creixent, de manera que no es modifiquen els valors de les abscisses on s'assoleixen els màxims i mínims de la funció.

Qüestió 5

a)

Per a trobar els tres punts alineats calculem els vectors

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,1,0)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1,-1,0)$$
$$\overrightarrow{AD} = D - A = (1,0,0)$$

i com que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} \nparallel \overrightarrow{AD}$, $\boxed{\text{els tres punts alienats són: } A, B \text{ i C}}$.

La recta que defineixen està determinada, per exemple, pel punt $A = (0,0,1)$ i el vector director $\overrightarrow{AB} = (1,1,0)$. Per tant:

$$\boxed{Equació\ contínua\colon\ r_{AB}\colon x = y = \frac{z-1}{0}}$$

$$\boxed{Equació\ paramètrica\colon r_{AB}\colon \begin{cases} x = k \\ y = k, \qquad k \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}}$$

b)

Busquem el pla π determinat pels punts A, B i D: el punt *A* i els vectors directors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ determinen el pla. Si $X = (x, y, z)$ és un punt genèric del pla π tindrem

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolupant el determinant per Sarrus:

$$\pi\colon\ -(z-1) = 0$$

Per tant l'equació general del pla és: $\boxed{\pi\colon\ z = 1}$.

Observació: De forma equivalent es pot trobar l'equació a partir del vector normal al pla $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (0, 0, -1)$.

Qüestió 6

a)

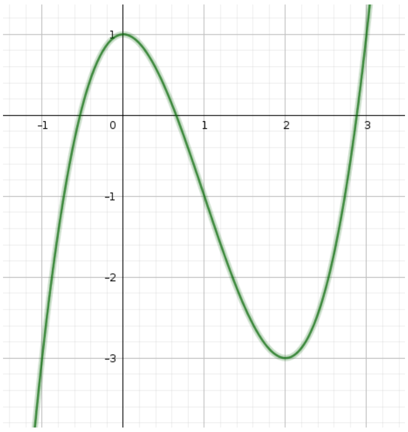
Per a que el programa pugui trobar una solució a una equació $f(x) = 0$ entre a i b cal que la funció $f(x)$ compleixi el teorema de Bolzano, és a dir que la funció sigui contínua en $[a, b]$ i que $f(a)$ i $f(b)$ siguin de signe diferent, és a dir que $f(a)\cdot f(b) < 0$. En aquest cas el teorema de Bolzano ens assegura l'existència d'una arrel dins l'interval (a, b).

En l'exemple concret en el que s'ha aplicat el programa, podem veure que la funció $f(x) = x + ln(x)$ és contínua en l'interval [0,5, 2] ja que és la suma de dues funcions contínues en aquest interval, concretament una funció polinòmica de primer grau i la funció logarítmica que és contínua en tot el seu domini $Dom(ln(x)) = (0, +\infty)$. Veiem també què $f(0{,}5) \cdot f(2) = (0{,}5 + ln(0{,}5)) \cdot (2 + ln(2)) < 0$ la qual cosa demostra que existeix una solució de l'equació en [0,5, 2].

El que fa el programa és trobar el punt mig c entre els valors a i b, i buscar en quin interval canvia de signe la funció; si ho fa a l'interval $[a, c]$ el que fa és prendre com a nou valor de b el punt mig c, i d'aquesta manera tenim un nou interval [a,b] que torna a complir el teorema de Bolzano, ja que la funció canvia de signe i és contínua en aquest nou interval. En el cas en que el canvi de signe es produeixi a l'interval $[c, b]$, el que es fa és prendre com a nou valor a el punt mig c. En aquest cas també teniu un nou interval $[a, b]$ que compleix el teorema de Bolzano. En un i en l'altre cas reduïm a la meitat l'amplada de l'interval inicial. Repetint aquests passos diverses vegades aconseguirem apropar tant com es vulgui els valors de a i b obtenint així una aproximació de l'arrel que, pel teorema de Bolzano, està garantida en aquest interval.

b)

Les funcions polinòmiques són continues, per tant, només necessitem trobar entre quins valors es troben les arrels. Una possibilitat seria començar a fer una taula de valors exhaustiva fins trobar alguns valors en els que la funció canvia de signe i a partir d'aquí contestar la pregunta, però la millor manera de trobar els valors entre els que hi ha solució, i estar segur de que aquesta solució és única és fer una taula de comportament identificant els seus extrems relatius, en aquest cas $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$ d'on veiem que $x = 0$ i $x = 2$.



Fent una taula de comportament:

x	$(-\infty, 0)$	0	(0,2)	2	$(2, +\infty)$
f	creix	1	decreix	-3	creix
f '	+	0	-	0	+

Aquesta taula de comportament ens indica que el polinomi tindrà una arrel entre 0 i 2, ja que en aquest interval la funció és contínua i canvia de signe, i també hi haurà una solució abans de 0 i després de 2. Com que en aquestes tres intervals la funció és monòtona (la derivada ja no canvia de signe) l'arrel serà única en cada un dels intervals. Ara només cal trobar un valor anterior a 0 i un posterior a 2 en els que la funció canviï de signe.

Per exemple per a $x = -1$, $f(-1) = -3 < 0$ i per a $x = 3$, $f(3) = 1 > 0$.

Com a conclusió el programa podrà trobar tres solucions, una en cada un dels intervals $[-1,0]$, $[0,2]$ i $[2,3]$.