Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2022

# Proves d'accés a la universitat

# Matemáticas

## Serie 5

**Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.**

**Cada cuestión vale 2,5 puntos.**

**Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.**

**Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.**

**1.** Sean las matrices $C=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

*a*) Compruebe que $C^3=I_2$, donde $I_2$ es la matriz identidad de orden 2, y deduzca que la matriz C es invertible y que $C^{-1}=C^2$. Calcule $C^{2022}$. [1,5 puntos]

***b*)** Resuelva la ecuación matricial $C\cdot X=A-2I_2$. [1 punto]

**2.** Considere la función $f(x)=x^3$ y sea $a$ un número real estrictamente positivo.

***a*)** Calcule la ecuación de la recta $t$ tangente a la gráfica de la función $f$ en el punto de abscisa $x = a$. Encuentre el punto de corte de la recta $t$ con el eje de abscisas (en función de $a$). [1,25 puntos]

b) Haga un esbozo de la gráfica de la función $f$ y la recta $t$. Calcule el valor de $a$ para que el área en el primer cuadrante limitada por la función $f$, la recta $t$ y el eje de abscisas sea 108 $u^2$. [1,25 puntos]

***3.*** Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=0 \\ my+(3-m)z=-6 \\ 2x-y+mz=6 \end{array}\right\}$$

donde $m$ es un parámetro real.

***a*)** Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro $m$. [1,25 puntos]

***b*)** Resuelva el sistema, si es posible, cuando $m$ = 0 y cuando $m$ = 3. En cada caso, dé la posición relativa de los tres planos en $\mathbb{R}^3$. [1,25 puntos]

4. En $\mathbb{R}^2$, considere los triángulos rectángulos que tienen los vértices en los puntos $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$ y $B = (0, y)$, con $x > 0$ e $y > 0$, y en que la suma de los catetos es 10.
   ***a)*** Exprese el área del triángulo *AOB* en función de $x$. ¿Para qué valor de $x$ el área del triángulo *AOB* es lo más grande posible? ¿Qué valor tiene esta área máxima? [1,25 puntos]
   ***b)*** Exprese la hipotenusa del triángulo *AOB* en función de $x$. ¿Para qué valor de $x$ la hipotenusa del triángulo *AOB* es lo más pequeña posible? ¿Cuál es ese valor mínimo? [1,25 puntos]

5. Sean los puntos $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (-1, -1, 1)$ y $D = (1, 0, 1)$.
   ***a)*** Compruebe que tres de estos puntos están alineados. Determine cuáles son los tres puntos y calcule la ecuación continua y la ecuación paramétrica de la recta que definen. [1,25 puntos]
   ***b)*** Calcule la ecuación general o cartesiana del plano que determinan los cuatro puntos. [1,25 puntos]

6. La columna de la izquierda de la siguiente tabla muestra el esquema de un programa informático que se ha elaborado para encontrar soluciones aproximadas de una ecuación $f(x) = 0$ en un intervalo $(a, b)$, sabiendo que $f(a) \cdot f(b) < 0$. La columna de la derecha recoge un ejemplo de funcionamiento del programa donde puede verse cómo actuaría para encontrar una solución de la ecuación $x + ln(x) = 0$ entre los valores $a = 0{,}5$ y $b = 2$.

| *Esquema del programa* | *Ejemplo* |
|---|---|
| 1. Escribir "Introduzca un valor *a*" | El usuario introduce *a = 0,5* |
| 2. Escribir "Introduzca un valor *b*" | El usuario introduce *b = 2* |
| 3. Escribir "Introduzca una función *f(x)*" | El usuario introduce *f(x) = x + ln(x)* |
| 4. Calcular *c = (a + b)/2* | El programa calcula la media entre *a* y *b* y le asigna el nombre *c = (0,5 + 2)/2 = 1,25* |
| 5. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces reasignar *b = c*; en caso contrario, reasignar *a = c*. | El programa comprueba que *f*(0,5) * *f*(1,25) = (0,5 + ln(0,5)) * (1,25 + ln(1,25)) < 0, por lo tanto, reasigna *b* = 1,25 |
| 6. Repetir los pasos 4 y 5 tantas veces como haga falta hasta que *f(a) – f(b) < 0,00000001* | El programa va repitiendo la comprobación anterior, cambiando cada vez los valores de *a* o de *b*:<br>  *a*  *b*<br>inicio 0,5 2<br>iteración 1 0,5 1,25<br>iteración 2 0,5 0,875<br>iteración 3 0,5 0,6875<br>iteración 4 0,5 0,59375<br>iteración 5 0,546875 0,59375<br>iteración 6 0,546875 0,5703125<br>iteración 7 0,55859375 0,5703125<br>[…] |
| 7. Cuando *f(a) – f(b) < 0,00000001*, escribir: «La solución de la ecuación es *c*» y parar el programa | Después de unas 30 iteraciones, el programa escribe: «La solución de la ecuación es 0,56714329» |

a) Explique por qué este programa es capaz de encontrar una solución aproximada de la ecuación $x + ln(x) = 0$ entre los valores $a = 0{,}5$ y $b = 2$. [1,25 puntos]

b) Se quiere aplicar este programa para encontrar las tres raíces de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ con valores de *a* y *b* diferentes. Encuentre justificadamente entre qué valores *a* y *b*, para cada raíz, se debe aplicar el programa para encontrar aproximaciones de cada una de las tres raíces de la función. [1,25 puntos]

# SOLUCIONES

**1.** Sean las matrices $C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

*a*) Compruebe que $C^3=I_2$, donde $I_2$ es la matriz identidad de orden 2, y deduzca que la matriz C es invertible y que $C^{-1}=C^2$. Calcule $C^{2022}$. [1,5 puntos]

***b*)** Resuelva la ecuación matricial $C\cdot X=A-2I_2$. [1 punto]

**a)** Comprobamos que $C^3=I_2$.

$$C^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1 & -1+0\\ 1+0 & -1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$C^3=C^2\cdot C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1 & 0+0\\ -1+1 & 1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

Comprobamos que C es invertible viendo que su determinante es no nulo.

$$|C|=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0+1=1\neq 0$$

La matriz C es invertible. Calculamos $C^{-1}$ y comprobamos que $C^{-1}=C^2$.

$$C^{-1}=\frac{Adj\left(C^t\right)}{|C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=C^2$$

Calculamos $C^{2022}$.

$$2022=674\cdot 3$$

$$C^3=I_2\Rightarrow C^6=\left(C^3\right)^2=\left(I_2\right)^2=I_2\Rightarrow C^9=\left(C^3\right)^3=\left(I_2\right)^3=I_2\Rightarrow .......$$

$$.......\Rightarrow C^{2022}=\left(C^3\right)^{674}=\left(I_2\right)^{674}=I_2$$

Se cumple que $C^{2022}=I_2$.

**b)** Despejamos X en la ecuación $C\cdot X=A-2I_2$.

$$C\cdot X=A-2I_2\Rightarrow X=C^{-1}\left(A-2I_2\right)$$

Sustituimos las matrices por su valor y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$A-2I_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

$$X=C^{-1}\left(A-2I_2\right)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-3 & 0+3\\ 0-3 & 0+3\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{X=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -3 & 3\end{pmatrix}}$$

**2.** Considere la función $f(x)=x^3$ y sea $a$ un número real estrictamente positivo.
a) Calcule la ecuación de la recta $t$ tangente a la gráfica de la función $f$ en el punto de abscisa $x = a$. Encuentre el punto de corte de la recta $t$ con el eje de abscisas (en función de $a$). [1,25 puntos]
b) Haga un esbozo de la gráfica de la función $f$ y la recta $t$. Calcule el valor de $a$ para que el área en el primer cuadrante limitada por la función $f$, la recta $t$ y el eje de abscisas sea 108 $u^2$. [1,25 puntos]

a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f$ en el punto de abscisa $x = a$ tiene la expresión $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3 \rightarrow f(a)=a^3 \\ f(x)=x^3 \rightarrow f'(x)=3x^2 \rightarrow f'(a)=3a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y-a^3=3a^2(x-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=a^3+3a^2x-3a^3 \Rightarrow \boxed{y=3a^2x-2a^3}$$

Hallamos el punto de corte de la recta $t$ con el eje de abscisas ($y = 0$).

$$\left.\begin{array}{l} y=3a^2x-2a^3 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a^2x-2a^3=0 \Rightarrow a^2(3x-2a)=0 \Rightarrow \{a\neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-2a=0 \Rightarrow 3x=2a \Rightarrow x=\frac{2a}{3} \Rightarrow \boxed{P\left(\frac{2a}{3},0\right)}$$

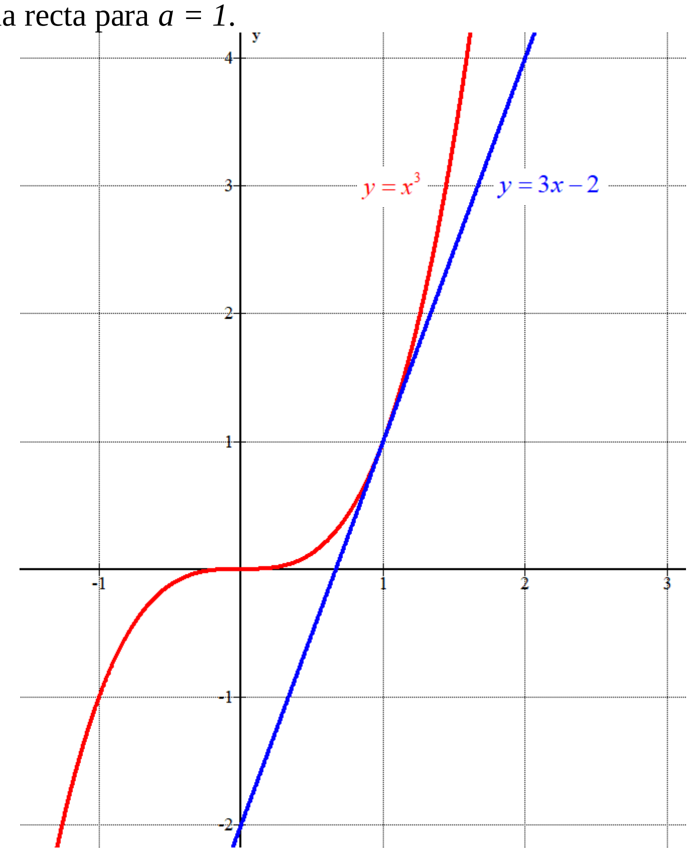
El punto de corte de la recta $t$ con el eje de abscisas es $P\left(\frac{2a}{3},0\right)$.

b) Dibujamos la gráfica de la función y de la recta para $a = 1$.

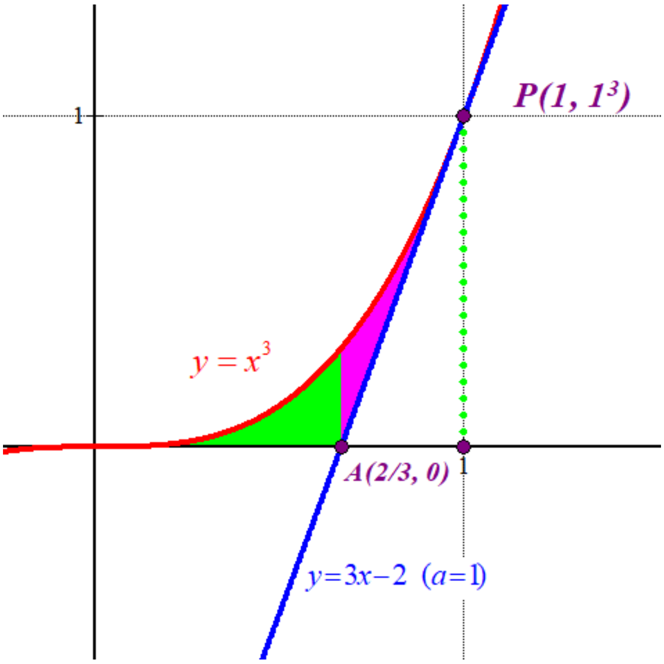
| $x$ | $y=x^3$ |
|---|---|
| $-2$ | $-8$ |
| $-1$ | $-1$ |
| $0$ | $0$ |
| $1$ | $1$ |
| $2$ | $8$ |

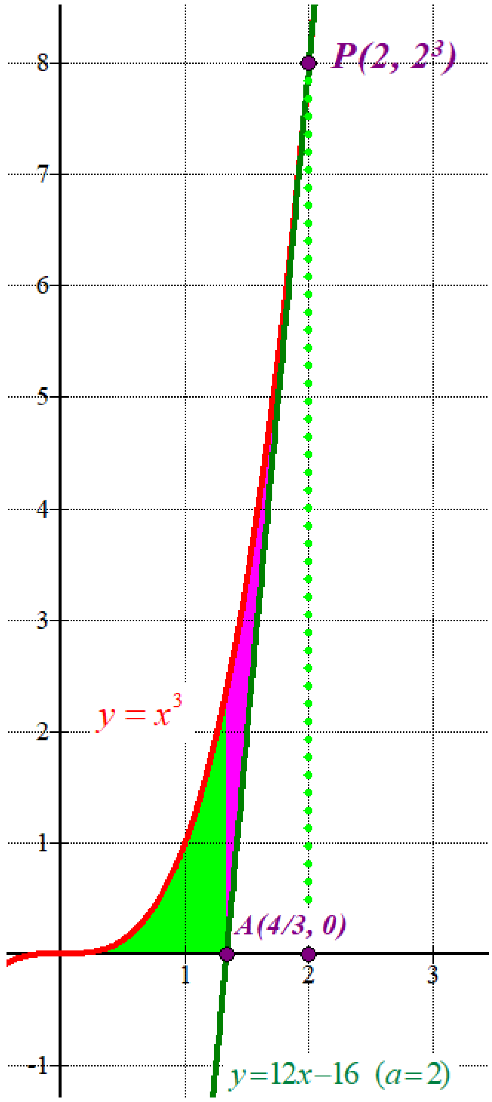
$$\left.\begin{array}{l} y=3a^2x-2a^3 \\ a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y=3x-2$$

| $x$ | $y=3x-2$ |
|---|---|
| $0$ | $-2$ |
| $1$ | $1$ |
| $2$ | $4$ |



Nos piden hallar el valor de "a" para que el área del dibujo inferior valga 108 u$^2$.
Dibujamos el área para $a = 1$ y para $a = 2$.




Calculamos el valor del área para un valor de "a" cualquiera positivo como la suma del área bajo la curva $f(x) = x^3$ entre 0 y *2a/3* (pintado de verde) y el área entre la curva y la recta entre *2a/3* y *a* (pintado de rosa).

$$Área = \int_0^{2a/3} x^3dx + \int_{2a/3}^{a} x^3 - \left(3a^2x - 2a^3\right)dx = \int_0^{2a/3} x^3dx + \int_{2a/3}^{a} x^3 - 3a^2x + 2a^3dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{2a/3} + \left[\frac{1}{4}x^4 - 3a^2\frac{1}{2}x^2 + 2a^3x\right]_{2a/3}^{a} = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{2a/3} + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}a^2\cdot x^2 + 2a^3x\right]_{2a/3}^{a} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2a}{3}\right)^4 - \frac{0^4}{4} + \left[\frac{1}{4}a^4 - \frac{3}{2}a^2a^2 + 2a^3\cdot a\right] - \left[\frac{1}{4}\left(\frac{2a}{3}\right)^4 - \frac{3}{2}a^2\left(\frac{2a}{3}\right)^2 + 2a^3\cdot\frac{2a}{3}\right] =$$

$$= \cancel{\frac{16}{324}a^4} + \frac{1}{4}a^4 - \frac{3}{2}a^4 + 2a^4 - \cancel{\frac{16}{324}a^4} + \frac{12}{18}a^4 - \frac{4}{3}a^4 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 + \frac{12}{18} - \frac{4}{3}\right)a^4 = \boxed{\frac{1}{12}a^4}$$

Igualamos el valor del área a 108 y obtendremos el valor de "a" pedido.

$$\frac{1}{12}a^4 = 108 \Rightarrow a^4 = 1296 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[4]{1296} = 6}$$

El valor buscado es $a = 6$

***3*** Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=0 \\ my+(3-m)z=-6 \\ 2x-y+mz=6 \end{array}\right\}$$

donde $m$ es un parámetro real.

***a*)** Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro $m$. [1,25 puntos]

***b*)** Resuelva el sistema, si es posible, cuando $m = 0$ y cuando $m = 3$. En cada caso, dé la posición relativa de los tres planos en $\mathbb{R}^3$. [1,25 puntos]

a) Obtenemos un sistema triangular equivalente al dado aplicando el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+\quad 3z=0 \\ my+(3-m)z=-6 \\ 2x-y+\quad mz=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Ecuación\,3^{a}-Ecuación\,1^{a} \\ \begin{array}{rrrr} 2x & -y & +mz & =6 \\ -2x & +y & -3z & =0 \\ \hline & & (m-3)z & =6 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y+\quad 3z=0 \\ my+(3-m)z=-6 \\ (m-3)z=6 \end{array}\right\}$$

Mirando los elementos de la diagonal principal nos planteamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $m \neq 0 \, y \, m \neq 3$.

En este caso el sistema se puede resolver obteniendo una solución única (Sistema compatible determinado).

CASO 2. $m=0$

El sistema queda $\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=0 \\ 3z=-6 \\ -3z=6 \end{array}\right\}$, intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=0 \\ 3z=-6 \\ -3z=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=0 \\ z=\frac{-6}{3}=-2 \\ z=\frac{6}{-3}=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-y-6=0 \Rightarrow y=2x-6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Solución: \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=2t-6 \\ z=-2 \end{array}\right.$$

El sistema tiene infinitas soluciones (Sistema compatible indeterminado)

CASO 3. $m=3$

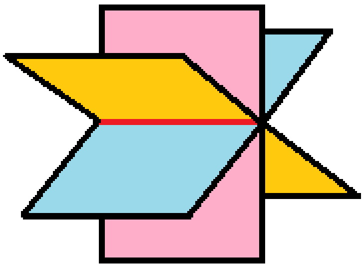
El sistema queda $\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=0 \\ 3y \quad = -6 \\ 0=6 \end{array}\right\}$ ¡Imposible!.

El sistema no tiene solución (Sistema incompatible)

**Resumiendo:** Si $m \neq 0 \, y \, m \neq 3$ el sistema es compatible determinado, si $m=0$ el sistema es compatible indeterminado y si $m=3$ el sistema es incompatible.

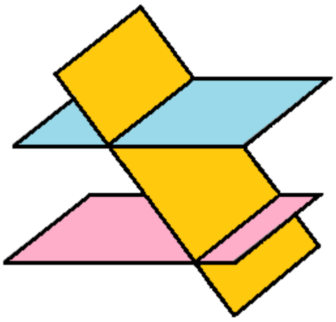
b) Para $m=0$ las soluciones se han obtenido en el apartado a) : $x=t;\ y=2t-6;\ z=-2;\ t\in\mathbb{R}$.
Para $m=3$ el sistema no tiene solución.

Para $m=0$ los tres planos se cortan en una recta $r$ cuya ecuación en paramétricas es la expresada por sus soluciones $r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=2t-6 \\ z=-2 \end{cases}$.



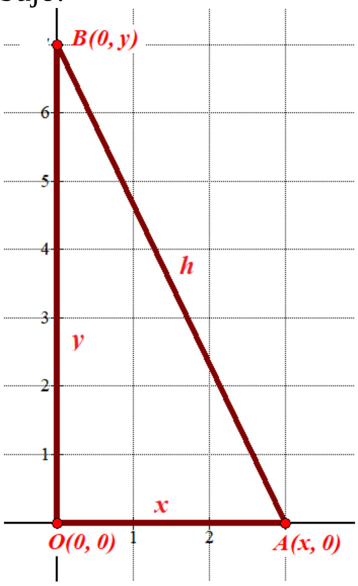
Para $m=3$ los tres planos no coinciden en ningún punto.

Los tres planos tienen ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=0 \\ 3y=-6 \\ 2x-y+3z=6 \end{array}\right\}$. El plano primero y tercero son paralelos y son cortados por el plano segundo.



4. En $\mathbb{R}^2$, considere los triángulos rectángulos que tienen los vértices en los puntos $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$ y $B = (0, y)$, con $x > 0$ e $y > 0$, y en que la suma de los catetos es 10.
***a)*** Exprese el área del triángulo *AOB* en función de *x*. ¿Para qué valor de *x* el área del triángulo *AOB* es lo más grande posible? ¿Qué valor tiene esta área máxima? [1,25 puntos]
***b)*** Exprese la hipotenusa del triángulo *AOB* en función de *x*. ¿Para qué valor de *x* la hipotenusa del triángulo *AOB* es lo más pequeña posible? ¿Cuál es ese valor mínimo? [1,25 puntos]

La situación planteada es la del dibujo:




Tenemos que $x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$.

a) El área del triángulo AOB es la mitad del producto de la base (x) por la altura (y).

$$\left.\begin{array}{r} \acute{A}rea\ AOB = \dfrac{x \cdot y}{2} \\ y = 10 - x \end{array}\right\} \Rightarrow \acute{A}rea\ AOB = f(x) = \frac{x \cdot (10 - x)}{2} = \frac{10x - x^2}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$$

Utilizamos la derivada para hallar el máximo de la función.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}2x + 5 = -x + 5$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

En *x = 5* hay un punto crítico de la función. Sustituimos este valor en la derivada segunda para ver si es un máximo o un mínimo.

$$f'(x) = -x + 5 \Rightarrow f''(x) = -1 \Rightarrow f''(5) = -1 < 0$$

La función "área" presenta un máximo en *x = 5*.

Calculamos el área para *x = 5* → $\acute{A}rea\ AOB = f(5) = -\frac{1}{2} \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 = \frac{25}{2} = 12.5u^2$

b) Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$h^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (10-x)^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2 = 2x^2 - 20x + 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$$

La expresión que nos da el valor de la hipotenusa en función de *x* es $h(x) = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$.

Hallamos los puntos críticos de la función "hipotenusa" usando la derivada.

$$h'(x) = \frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2 - 20x + 100}} = \frac{2x-10}{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x-10}{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}} = 0 \Rightarrow 2x - 10 = 0 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{2} = 5$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor para saber si es un mínimo o no.

En $(0,5)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $h'(1) = \frac{2-10}{\sqrt{2-20+100}} = \frac{-8}{\sqrt{82}} < 0$. La función decrece en $(0,5)$.

En $(5,+\infty)$ tomamos *x = 6* y la derivada vale $h'(6) = \frac{12-10}{\sqrt{2\cdot 6^2 - 120 + 100}} = \frac{2}{\sqrt{52}} > 0$. La función crece en $(5,+\infty)$.

La función "hipotenusa" presenta un mínimo en *x = 5*.

Para *x = 5* la hipotenusa toma un valor de $h(5) = \sqrt{2\cdot 5^2 - 20\cdot 5 + 100} = \sqrt{50} = \boxed{5\sqrt{2} \simeq 7.07\, u}$

5. Sean los puntos $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (-1, -1, 1)$ y $D = (1, 0, 1)$.
***a)*** Compruebe que tres de estos puntos están alineados. Determine cuáles son los tres puntos y calcule la ecuación continua y la ecuación paramétrica de la recta que definen. [1,25 puntos]
***b)*** Calcule la ecuación general o cartesiana del plano que determinan los cuatro puntos. [1,25 puntos]

a) Obtenemos las coordenadas de los vectores que unen cada par de puntos.

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,1) - (0,0,1) = (1,1,0)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-1,-1,1) - (0,0,1) = (-1,-1,0)$$
$$\overrightarrow{AD} = (1,0,1) - (0,0,1) = (1,0,0)$$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen coordenadas proporcionales por lo que están alineados los puntos A, B y C.
Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ no tienen coordenadas proporcionales por lo que el punto D no está alineado con los puntos A y B.

Hallamos la ecuación de la recta $r$ que pasa por los puntos A, B y C y que tendrá como vector director el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1,1,0) \\ A(0,0,1) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}} \text{ Ecuación paramétrica}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1,1,0) \\ A(0,0,1) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}} \text{ Ecuación continua}$$

b) Como tres de estos puntos están alineados (A, B y C) y el cuarto (D) no lo está definen un único plano π. Basta tener en cuenta los puntos A, B y D.
Los vectores directores del plano pueden ser $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AD} = (1,0,0) \\ A(0,0,1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: z-1=0} \text{ Ecuación general}$$

6. La columna de la izquierda de la siguiente tabla muestra el esquema de un programa informático que se ha elaborado para encontrar soluciones aproximadas de una ecuación $f(x) = 0$ en un intervalo $(a, b)$, sabiendo que $f(a) \cdot f(b) < 0$. La columna de la derecha recoge un ejemplo de funcionamiento del programa donde puede verse cómo actuaría para encontrar una solución de la ecuación $x+ln(x)=0$ entre los valores $a = 0,5$ y $b = 2$.

| *Esquema del programa* | *Ejemplo* |
|---|---|
| 1. Escribir "Introduzca un valor *a*" | El usuario introduce *a = 0,5* |
| 2. Escribir "Introduzca un valor *b*" | El usuario introduce *b = 2* |
| 3. Escribir "Introduzca una función *f(x)*" | El usuario introduce *f(x) = x + ln(x)* |
| 4. Calcular *c = (a + b)/2* | El programa calcula la media entre *a* y *b* y le asigna el nombre *c = (0,5 + 2)/2 = 1,25* |
| 5. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces reasignar *b = c*; en caso contrario, reasignar *a = c*. | El programa comprueba que *f*(0,5) * *f*(1,25) = (0,5 + ln(0,5)) * (1,25 + ln(1,25)) < 0, por lo tanto, reasigna *b* = 1,25 |
| 6. Repetir los pasos 4 y 5 tantas veces como haga falta hasta que *f(a) – f(b) < 0,00000001* | El programa va repitiendo la comprobación anterior, cambiando cada vez los valores de *a* o de *b*:<br>*a* / *b*<br>inicio: 0,5 / 2<br>iteración 1: 0,5 / 1,25<br>iteración 2: 0,5 / 0,875<br>iteración 3: 0,5 / 0,6875<br>iteración 4: 0,5 / 0,59375<br>iteración 5: 0,546875 / 0,59375<br>iteración 6: 0,546875 / 0,5703125<br>iteración 7: 0,55859375 / 0,5703125<br>[…] |
| 7. Cuando *f(a) – f(b) < 0,00000001*, escribir: «La solución de la ecuación es *c*» y parar el programa | Después de unas 30 iteraciones, el programa escribe: «La solución de la ecuación es 0,56714329» |

a) Explique por qué este programa es capaz de encontrar una solución aproximada de la ecuación $x+ln(x)=0$ entre los valores $a = 0,5$ y $b = 2$. [1,25 puntos]

b) Se quiere aplicar este programa para encontrar las tres raíces de $f(x)=x^3-3x^2+1$ con valores de *a* y *b* diferentes. Encuentre justificadamente entre qué valores *a* y *b*, para cada raíz, se debe aplicar el programa para encontrar aproximaciones de cada una de las tres raíces de la función. [1,25 puntos]

a) Para que el programa pueda encontrar una solución a una ecuación $f(x) = 0$ entre *a* y *b* es necesario que la función $f(x)$ cumpla el teorema de Bolzano, es decir que la función sea continua en $[a, b]$ y que $f(a)$ y $f(b)$ sean de distinto signo, es decir que $f(a)\cdot f(b) < 0$. En este caso el teorema de Bolzano nos asegura la existencia de una raíz dentro del intervalo $(a, b)$.
En el ejemplo concreto en el que se ha aplicado el programa, podemos ver que la función $f(x)=x+ln(x)$ es continua en el intervalo [0.5, 2] ya que es la suma de dos funciones continuas en este intervalo, concretamente una función polinómica de primer grado y la función logarítmica que es continua en todo su dominio $Dom(ln(x)) = (0,+\infty)$.
Vemos también qué $f(0,5)\cdot f(2) = (0,5+ln(0,5)) \cdot (2+ln(2)) < 0$ lo que demuestra que existe una solución de la ecuación en [0,5, 2].
Lo que hace el programa es encontrar el punto medio *c* entre los valores *a* y *b*, y buscar en qué intervalo cambia de signo la función; si lo hace en el intervalo *[a, c]* lo que hace es tomar como nuevo valor de *b* el punto medio *c*, y de esta forma tenemos un nuevo intervalo *[a, b]* que vuelve

a cumplir el teorema de Bolzano, puesto que la función cambia de signo y es continua en este nuevo intervalo. En caso de que el cambio de signo se produzca en el intervalo *[c, b]*, lo que se hace es tomar como nuevo valor en el punto medio *c*. En este caso también tiene un nuevo intervalo *[a, b]* que cumple el teorema de Bolzano. En uno y otro caso reducimos a la mitad la anchura del intervalo inicial. Repitiendo estos pasos varias veces conseguiremos acercar tanto como se quiera los valores de *a* y *b* obteniendo así una aproximación de la raíz que, por el teorema de Bolzano, está garantizada en ese intervalo.

b) Las funciones polinómicas son continuas, por tanto, sólo necesitamos encontrar entre qué valores se encuentran las raíces. Una posibilidad sería empezar a hacer una tabla de valores exhaustiva hasta encontrar algunos valores en los que la función cambia de signo y a partir de ahí contestar a la pregunta, pero la mejor forma de encontrar los valores entre los que hay solución, y estar seguro de que esta solución es única es hacer una tabla de comportamiento identificando sus extremos relativos, en este caso:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

de donde vemos que $x = 0$ y $x = 2$ son los puntos críticos de la función (la derivada cambia de signo).

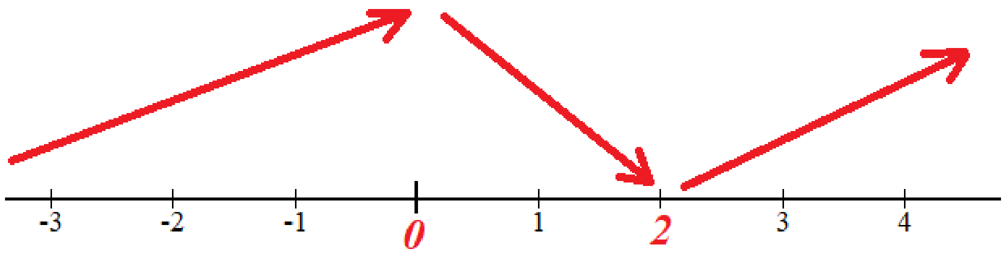
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 3(-1)(-1-2) = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.

En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 3(1-2) = -3 < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.

En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 3\cdot 3(3-2) = 9 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema:




También sabemos que $f(0) = 0^3 - 3\cdot 0^2 + 1 = 1 > 0$ y $f(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 + 1 = -3 < 0$.

Este comportamiento de la función nos indica que el polinomio tendrá una raíz entre 0 y 2, puesto que en este intervalo la función es continua y cambia de signo, y también habrá una solución antes de 0 y otra después de 2. Debido a que en estos tres intervalos la función es monótona (la derivada ya no cambia de signo) cuya raíz será única en cada uno de los intervalos. Ahora sólo es necesario encontrar un valor anterior a 0 y un posterior a 2 en los que la función cambie de signo.

Por ejemplo para $x = -1 \rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 1 = -3 < 0$. Como $f(0) = 1 > 0$, la función cambia de signo en el intervalo $[-1, 0]$

Para $x = 3$ → $f(3) = 3^3 - 3(3)^2 + 1 = 1 > 0$. Como $f(2) = -3 < 0$, la función cambia de signo en el intervalo [2, 3].

Como conclusión, el programa podrá encontrar tres soluciones, una en cada uno de los intervalos [−1, 0], [0, 2] y [2, 3].