	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2020-2021** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	**Modelo orientativo**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1 Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales A tiene inversa.

b) (0.75 puntos) Para $x = -1$, calcular la inversa de A.

c) (1.25 puntos) Para $x = 1$, calcular $(AB^t)^{2020}$.

A.2 Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudia la continuidad de f.

b) (1 punto) Halla las asíntotas de f.

c) (1 punto) Determina el valor de $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente $\frac{-1}{2}$. Escribe la ecuación de dicha recta tangente.

A.3 Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran los puntos $A(3,1,2)$, $B(0,3,4)$ y $P(-1,1,0)$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Determinar las coordenadas de un punto Q sabiendo que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes, tienen sentidos opuestos y tienen el mismo módulo.

b) (1 punto) Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta r que contiene a A y P, y de la recta s que contiene a B y al punto $C(2,-1,-2)$.

c) (0.75 puntos) Calcular el coseno del ángulo formado por $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$.

A.4 Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un instituto uno de cada cuatro alumnos practica baloncesto. Se eligen 6 alumnos al azar y se considera la variable aleatoria X que representa el número de estudiantes entre estos 6 que práctican baloncesto. Se pide:

a) (1 punto) Identificar la distribución de la variable aleatoria X y calcular $P(X = 0)$.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 5 de los 6 elegidos practiquen baloncesto.

c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 1 de los 6 practique baloncesto.

B.1 Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix}$ y el vector $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determinar el valor o valores de a para los que se verifica:

a) (0.5 puntos) $B^t\,(A + A^t)\,B = 6$.

b) (1.0 puntos) El sistema de $A\,X = B$ no tiene solución.

c) (1.0 puntos) $A = A^{-1}$.

B.2 Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = x^6 - 4x^4$, se pide:

a) (0.5 puntos) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) (1 punto) Encontrar sus máximos y mínimos locales, y determinar si son o no globales.
c) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por el eje $y = 0$ y la gráfica de f.

B.3 Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r : \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

a) (0.75 puntos) Hallar la distancia del origen a la recta s.

b) (0.5 punto) Determinar la posición relativa de r y s.

c) (1.25 puntos) Escribir la ecuación de una recta perpendicular común a ambas rectas.

B.4 Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una médico experto diagnóstica posibles enfermos de una dolencia, fallando en reconocerla en el 5% de los casos que la padecen y diagnosticándola equivocadamente en el 10% de los sanos. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad es padecida por 50 de cada diez mil personas. Si una persona al azar se somete a reconocimiento, calcule la probabilidad de:

a) (0.5 puntos) Que sea diagnosticada como enferma.
b) (1 punto) Que esté enferma si la diagnostican como tal.
c) (0.5 puntos) Que no esté enferma si la diagnostican sana.
d) (0.5 puntos) Que sea mal diagnosticada.

MATEMÁTICAS II—SOLUCIONES

(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

a) La matriz A no posee inversa si su determinante se anula. $|A| = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. Por lo tanto A tiene inversa $\forall x \in \Re - \{\pm 2\}$.

b) Si $x = -1$, $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Si $x = 1$, $AB^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB^t)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB^t)^3 = -I$. Por lo tanto $(AB^t)^{2020} = ((AB^t)^3)^{673} \cdot AB^t = (-I)^{673} \cdot AB^t = -AB^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A.2.

a) En cada intervalo de definición, f es cociente de funciones continuas, y por tanto es continua excepto donde se anula el denominador ($x = -1$). En el punto de yuxtaposición, se verifica que $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1$, usando la regla de L'Hôpital. Por tanto, f es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

b) Sólo en $x = -1$ puede existir una asíntota vertical; de hecho, este es el caso, puesto que $\lim_{x\to -1^-} \dfrac{2}{x+1} = -\infty$, $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{2}{x+1} = \infty$. Además, puesto que $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$, f tiene una asíntota horizontal por la izquierda, $y = 0$; y como además $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x-1} = 0$, (usando de nuevo L'Hôpital), $y = 0$ es una asíntota horizontal de f por la derecha.

c) La pendiente de la tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$ es $f'(x_0)$. Como $x_0 < 1$, tenemos que $f'(x_0) = \dfrac{-2}{(x_0+1)^2}$. Igualando esta expresión a $\frac{-1}{2}$, obtenemos $(x_0+1)^2 = 4$, es decir, $x_0 = \pm 2 - 1$. AL ser $x_0 < 1$, debe ser $x_0 = -3$. Ahora, $f(-3) = -\frac{1}{2}$, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-3, \frac{1}{2})$ tiene ecuación $y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x+3) = -\frac{x}{2} - 2$.

A.3.

a) $\overrightarrow{AB} = (-3, 2, 2)$. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{AB} = (3, -2, -2)$. Luego el punto Q es $(-1, 1, 0) + (3, -2, -2) = \boxed{(2, -1, -2).}$

b) Tenemos que

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 1 \\ z = 2\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{6}.$$

El punto que se pide es la intersección de ambas, que se corresponde con $\lambda = 1/2$, es decir, $\boxed{M(1,1,1)}$.

c)

$$\overrightarrow{PA} = (4, 0, 2), \quad \overrightarrow{PB} = (1, 2, 4), \quad \cos\alpha = \frac{(4,0,2)\cdot(1,2,4)}{|(4,0,-2)||(1,2,4)|} = \frac{12}{\sqrt{20}\sqrt{21}}$$

A.4.

a) Se trata de una distribución binomial $X \sim B(6, 0.25)$, $P(X = 0) = 0.75^6 \approx 0.18$.

b) $P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6) = \binom{6}{5} 0.25^5 \cdot 0.75 + \binom{6}{6} 0.25^6 \approx 0.004638$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.75^6 \approx 0.82$

SOLUCIONES

(Documento de trabajo orientativo)

B.1.

a) Operando: $B^t\,(A+A^t)\,B = 12a-18=6$; luego $\boxed{a=2}$.
b) El sistema debe ser incompatible (rango(A) <rango($A|B$)). Dado que det(A)=3 − a y que para $a = 3$: rango($A|B$)=3>rango(A)=2, se concluye $\boxed{a=3}$.
c) Dado que $A = A^{-1}$ tenemos que $A^2 = I$ con lo que det(A) debe ser 1 o -1. Así pues, los posibles valores de a son 2 o 4. Basta probar que $\begin{pmatrix}0&1&-1\\4&-3&4\\3&-3&4\end{pmatrix}^2 = I$ y que $\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&-3&2\\1&-3&2\end{pmatrix}^2 \neq I$, luego $\boxed{a=4}$.

B.2.

a) $f'(x) = 6x^5 - 16x^3 = 6x^3(x^2-8/3) = 6x^3(x-2\sqrt{2/3})(x+2\sqrt{2/3})$. Por tanto, f es decreciente en $(-\infty,-2\sqrt{2/3})\cup(0,2\sqrt{2/3})$ y creciente en $(-2\sqrt{2/3},0)\cup(2\sqrt{2/3},\infty)$
b) La función f tiene un máximo local en $x=0$, y mínimos locales en $x=\pm 2\sqrt{2/3}$. Además, f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, y $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Por tanto, no tiene máximo global, y los mínimos locales también son mínimos globales.
c) El área pedida es

$$\int_{-2}^{2} 4x^4 - x^6\,dx = \cdots = 512/35.$$

B.3.

a) La distancia del origen a s es el módulo del vector $\overrightarrow{OO'}$, siendo O' el corte de s con el plano normal a s por O. El vector director de s es $\vec{v_s} = (2,-1,1)$, luego el plano normal a s por el origen tiene ecuación $2x-y+z=0$. Introduciendo en esta ecuación la expresión paramétrica de un punto de s, obtenemos que la intersección debe ser $2(2\lambda-3)-(2-\lambda)+(1+\lambda)=0$, es decir, $\lambda=\frac{7}{6}$, $O'=\left(-3+2\frac{7}{6},2-\frac{7}{6},1+\frac{7}{6}\right)=\left(\frac{-4}{6},\frac{5}{6},\frac{13}{6}\right)$ y la distancia es $\frac{\sqrt{16+25+169}}{6}=\frac{\sqrt{210}}{6}$.
b) El vector director de las recta r es $\vec{v_r} = (1,0,2)\times(0,1,1) = (-2,-1,1)$. Y dos puntos pertenecientes a las mismas pueden ser $P_r(1,2,0)$ y $Q_s(-3,2,1)$. Las rectas tienen distinta dirección y por tanto se cruzarán o serán secantes. Se comprueba que los vectores $\overrightarrow{P_rQ_s} = (-4,0,1)$, $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$ son linealmente independientes $\Rightarrow$ r y s se cruzan.
c) Para hallar la perpendicular común basta escribirla como intersección del plano que pasa por P_r y tiene vectores directores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_r\times\vec{v}_s=(0,4,4)$ y el plano que pasa por Q_s con vectores directores $\vec{v}_s$ y $\vec{v}_r\times\vec{v}_s$. De este modo obtenemos la recta solución

$$r:\begin{cases}x-y+z+1=0\\x+y-z+2=0\end{cases}$$

B.4.

Sean E “enfermo”, D “diagnosticado como enfermo” y F “fallidamente diagnosticado”.
a) $P(D)=P(D/E)P(E)+P(D/noE)p(noE)=0.95\times0.005+0.1\times0.995=0.1042$
b) $P(E/D)=\dfrac{P(D/E)P(E)}{P(D/E)P(E)+P(D/noE)P(noE)}=\dfrac{0.95\times0.005}{0.95\times0.005+0.1\times0.995}=0.0455$
c) $P(noE/noD)=\dfrac{P(noD/noE)P(noE)}{P(noD)}=\dfrac{0.9\times0.995}{1-0.1042}=0.999$
d) $p(F)=P(D\cap noE)+P(noD\cap E)=P(D/noE)P(noE)+P(noD/E)P(E)=0.0997.$

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en las soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

A.1.

a) 0.5 puntos (repartidos entre planteamiento: 0.25 y resolución: 0.25).
b) 0.75 puntos (repartidos entre proceso: 0.5 y resultado: 0.25).
c) 1.25 puntos (repartidos entre cálculo de AB^t: 0.25, cálculo de $(AB^t)^3$: 0.5 y resultado final: 0.5).

Estándares de aprendizaje evaluados: Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente.

A.2.

a) 0.25 Por estudiar correctamente $x = 1$; 0.25 por el estudio del resto, incluyendo $x = -1$.
b) 0.25 por plantear qué asíntotas pueden existir, 0.25 por cada asíntota.
c) 0.25 por interpretar correctamente la pregunta; 0.5 por encontrar x_0 (0.25 planteamiento, 0.25 resolución); 0.25 por escribir la recta tangente.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites.

A.3.

a) Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

A.4.

a) Saber que es una binomial e identificar los parámetros:0.5 puntos. Cálcular la probabilidad: 0.5 puntos.
b) Planteamiento 0.5 puntos. Resolución 0.25 puntos.
c) Planteamiento 0.5 puntos. Resolución 0.25 puntos.

Modelo

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en las soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

B.1.

a) Realizar correctamente las multiplicaciones de matrices: 0.25 puntos. Obtener los valores de a: 0.25 puntos. **b)** Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.5 puntos. **c)** Procedimiento: 0.5 puntos. Cálculos: 0.5 puntos.

Estándar de aprendizaje evaluado:
Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente.Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Estudia, clasifica y resuelve sistemas de ecuaciones lineales.

B.2.

a) 0.25 puntos planteamiento; 0.25 puntos resolución.
b) 0.5 puntos por los máximos y mínimos locales, 0.5 puntos por distinguir correctamente entre locales y globales.
c) 0.5 puntos planteamiento; 0.5 puntos resolución.

Estándares de aprendizaje evaluados:

B.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.

B.4.

a) 0.25 planteamiento, 0.25 resolución.
b) 0.5 planteamiento, 0.5 resolución.
c) 0.25 planteamiento, 0.25 resolución.
d) 0.25 planteamiento, 0.25 resolución.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes. Utiliza el vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.