UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2021-2022**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Para $b = a^2$, determinar los valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) (1 punto) Para $b = 4$ y $a = -2$, calcular $A^{-1} \cdot (B + 2A) - (A^{-1} + B^t) \cdot B$.

c) (1 punto) Para $b = 1$, discutir el rango de la matriz $A + B$ en función del parámetro a.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = x^3 + \cos(\pi x)$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$ y probar, utilizando el Teorema de Bolzano, que dicha recta tangente corta a la gráfica de $f(x)$ en algún punto entre $x = -3$ y $x = -2$.

b) (1.25 puntos) Calcular $\int x\, f(x)\, dx$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un tetraedro tiene por vértices los puntos $O\,(0,0,0)$, $A\,(1,0,0)$, $B\,(0,2,0)$ y $C\,(0,0,3)$.

a) (0.75 puntos) Calcule el área de la cara dada por el triángulo de vértices A, B y C.

b) (0.75 puntos) Calcule el volumen del tetraedro.

c) (1 punto) Calcule una ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C. Determine el punto simétrico respecto de π del punto O.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El 60 % de los habitantes de una ciudad utiliza para trabajar un móvil, el 30 % utiliza un ordenador portátil y el 25 % no usa ninguno de los dos dispositivos.

a) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice ambos dispositivos para trabajar.

b) (0.5 puntos) En esa ciudad, ¿es independiente el uso del móvil y del ordenador portátil para trabajar? Justifique la respuesta.

c) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice exclusivamente el ordenador portátil para trabajar.

d) (1 punto) Si elegimos al azar 10 individuos, calcule la probabilidad de que exactamente 8 de ellos utilicen para trabajar un móvil.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Los precios de las entradas para un musical son 8 euros para los asistentes menores de 18 años, 25 euros para los adultos de menos de 60 años, y 10 euros para aquellos de al menos 60 años. Tras el concierto, se sabe que se han vendido tantas entradas de 25 euros como de las otras dos categorías juntas; y también que ha habido 9 asistentes menores de edad por cada uno de aquellos de al menos 60 años. Si la recaudación final fue de 8300 euros, calcule el número de asistentes de cada rango de edad.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f(x) = xe^x - e^x$.

a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$ y clasifique sus extremos relativos.

c) (1 punto) Sea $g(x) = -e^x$. Calcule el área del recinto acotado que está limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran la recta r y los planos π_1, π_2, de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \quad 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad , \qquad \pi_1 \equiv y + z = -1, \qquad \pi_2 \equiv 2x - y + z = -3.$$

Sea s la recta determinada por la intersección de los planos π_1 y π_2.

a) (0.5 puntos) Halle el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

b) (1.5 puntos) Determine la posición relativa de las rectas r y s.

c) (0.5 puntos) Encuentre una ecuación del plano perpendicular a s que corta a la recta r en el punto con segunda coordenada nula.

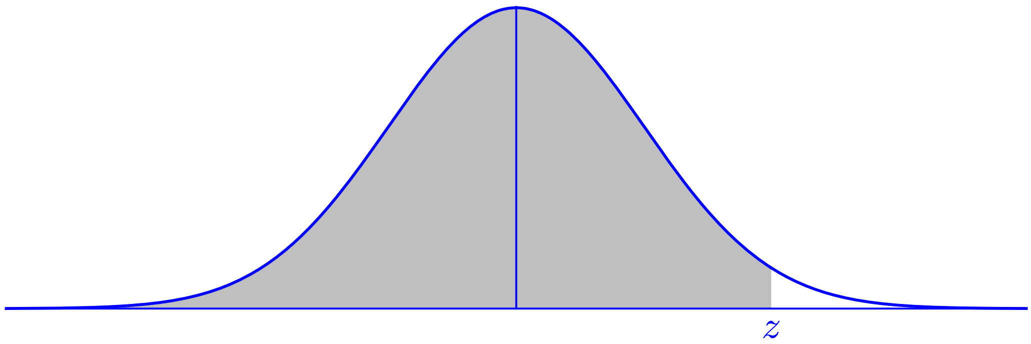
B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(A|B) = \dfrac{1}{3}$, $P(B|A) = \dfrac{1}{14}$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{7}{15}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Probar razonadamente que $P(A \cap B) = \dfrac{1}{30}$.

b) (1 punto) Calcular $P(A)$ y $P(B)$.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $\mathrm{N}(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II—SOLUCIONES
Documento de trabajo orientativo

A.1.

a) $|A| = a^3 - a^5 = a^3(1-a^2) = 0 \Rightarrow$ La matriz A es invertible si $a \neq \{0, \pm 1\}$.

b) $A^{-1} \cdot (B+2A) - (A^{-1} + B^t) \cdot B = 2I - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

c) Para $b = 1$: $|A+B| = a(a-2)^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ o $a = 2$.

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Rightarrow \mathrm{Rg}(A+B) = 3$.
- Si $a = 0 \Rightarrow \mathrm{Rg}(A+B) = 2$.
- Si $a = 2 \Rightarrow \mathrm{Rg}(A+B) = 1$.

A.2.

a) La recta tangente viene dada por: $y = 3(x-1)$.
Consideramos la función $h(x) = f(x) - 3(x-1)$ y aplicamos a $h(x)$ el Teorema de Bolzano en $[-3, -2]$: $h(x)$ es continua en $[-3, -2]$ (propiedades de las funciones continuas); además, $h(-3) = -16$ y $h(-2) = 2$, luego existe un punto $c \in (-3, -2)$ en el que $h(c) = 0$.
b) $\displaystyle\int x\, f(x)\, dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x \sin(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} + C$.

A.3.

a) El área del triángulo de vértices A, B y C es $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Como $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3)$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6, 3, 2)$ y el área pedida es $\frac{7}{2}\,\mathrm{u}^2$.
b) El volumen del tetraedro podemos calcularlo como $\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right| = 1\,\mathrm{u}^3$.
c) La ecuación del plano π es $6x + 3y + 2z - 6 = 0$. Un vector perpendicular al mismo es $\overrightarrow{n} = (6, 3, 2)$. La recta que pasa por O y tiene por vector director $\overrightarrow{n}$ corta a π en el punto $P\left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right)$. El punto buscado es el punto Q tal que $\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OP}$, y por tanto Q es el punto $\left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49}\right)$.

A.4.

a) Si, elegido un individuo al azar, denotamos por $A =$ "utiliza el móvil para trabajar" y por $B =$ "utiliza el ordenador portátil para trabajar", nos piden

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.60 + 0.30 - (1 - 0.25) = 0.15.$$

b) Puesto que $P(A \cap B) = 0.15$ no coincide con $P(A) \cdot P(B) = 0.60 \cdot 0.30 = 0.18$, los sucesos no son independientes.
c) El suceso B se puede escribir como $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, una unión de sucesos incompatibles. Nos piden $P(\overline{A} \cap B)$, y por la expresión anterior:

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.30 - 0.15 = 0.15.$$

d) La variable aleatoria $X =$ "número de individuos que utilizan un móvil de entre 10 elegidos al azar", sigue una distribución $\mathrm{Binomial}(n, p)$ de parámetros, $n = 10$ y $p = P(A) = 0.6$. Nos piden

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} 0.6^8 (1 - 0.6)^2 \approx 0.121.$$

SOLUCIONES

Documento de trabajo orientativo

B.1.

Designaremos por x el número de entradas vendidas para personas menores de 18 años, por y el número de entradas para personas de edades entre 18 y 59 años, y por z el número de entradas para los asistentes de al menos 60 años. Los datos determinan el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} 8x+25y+10z & = & 8300 \\ x-y+z & = & 0 \\ x-9z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Es un sistema compatible determinado cuya solución es $x=225$, $y=250$, $z=25$.

B.2.

a) $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ (por ser suma y producto de funciones continuas y derivables).
b) $f'(x)=xe^x$. Entonces, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.
Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:
Si $x\in(-\infty,0)\Rightarrow f'(x)<0$, por tanto $f(x)$ es decreciente; si $x\in(0,\infty)\Rightarrow f'(x)>0$, por tanto $f(x)$ es creciente.
A la vista de estos intervalos se concluye que $f(x)$ alcanza un mínimo relativo en $x=0$.
c) Área= $\displaystyle\int_0^1 (f(x)-g(x))dx = \int_0^1 (xe^x-e^x+e^x)dx = \int_0^1 xe^x dx = (xe^x-e^x)\Big|_0^1 = 1\,\mathrm{u}^2$.

B.3.

a) Puesto que el producto escalar de los vectores normales a los planos es $(0,1,1)\cdot(2,-1,1)=-1+1=0$, se tiene que los planos son perpendiculares: $(\widehat{\pi_1,\pi_2})=90°$.
b) Un vector director de la recta r es $\vec{u}=(-1,2,1)$. De la recta s , y puesto que $(0,1,1)\times(2,-1,1)=(2,2,-2)$, podemos tomar $\vec{v}=(1,1,-,1)$ como vector director. Como son vectores independientes, las rectas o se cruzan o se cortan en un único punto. El corte de r con el plano π_1 se da para λ tal que $2\lambda+(2+\lambda)=-1 \leftrightarrow \lambda=-1$, y es $(3,-2,1)$. Este punto no está en π_2, puesto que $2\cdot3-(-2)+1=9\neq-3$, de manera que las rectas se cruzan.
c) Tomando como vector normal al plano el vector $(1,1,-1)$ y como punto del plano el $(2,0,2)$, se tiene la ecuación $x+y-z=0$.

B.4.

a) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow P(B)=3P(A\cap B)$ y $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{1}{14}\Rightarrow P(A)=14P(A\cap B)$.
$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\dfrac{7}{15}\Rightarrow P(A\cup B)=\dfrac{8}{15}$.

Por lo tanto, tenemos que $P(A\cap B)=14P(A\cap B)+3P(A\cap B)-\dfrac{8}{15}\Rightarrow P(A\cap B)=\dfrac{1}{30}$.
b) $P(A)=14\cdot\dfrac{1}{30}=\dfrac{7}{15}$ y $P(B)=3\cdot\dfrac{1}{30}=\dfrac{1}{10}$.

MATEMÁTICAS II
CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A. 1.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado.

A. 2.

a) Cálculo de la recta tangente: 0.75 puntos. Aplicación del teorema: 0.5 puntos.
b) Cálculo de la primitiva: 1.25 puntos (integración de la parte polinómica: 0.25 puntos; integración por partes: 1 punto).

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

A. 3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Ecuación del plano: 0.5 puntos (planteamiento: 0.25 puntos; resolución: 0.25 puntos). Cálculo del punto simétrico: 0.5 puntos (planteamiento: 0.25 puntos; resolución: 0.25 puntos).

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

A. 4.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
d) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.

MATEMÁTICAS II
CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

B. 1.

Correcto planteamiento del problema: 1.5 puntos (Se darán 0.5 puntos por cada ecuación bien planteada).
Resolución correcta del sistema planteado: 0.5 puntos.
Interpretación correcta de la solución: 0.5 puntos.
En caso de resolución correcta de un sistema con alguna ecuación mal planteada, se valorará con hasta 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

B. 2.

a) Resolución: 0.5 puntos (justificación de continuidad: 0.25 puntos; justificación de derivabilidad: 0.25 puntos).
b) Cálculo de la derivada de $f(x)$: 0.25 puntos. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento: 0.5 puntos. Clasificación del extremo: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.75 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.

B. 3.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 1 punto.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

B. 4.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.75 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.