UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2021-2022**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ mx+(m+1)y-z=m-1 \\ -x-2y+(2m-1)z=1-m \end{cases}.$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m=1$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

a) (1 punto) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$.

b) (1.5 puntos) Dada la función $g(x)=\dfrac{5-x}{2}$, halle el área de la región acotada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$ y el punto $P(1,1,0)$.

a) (1 punto) Halle los puntos pertenecientes a la recta r que distan de P una unidad.

b) (1.5 puntos) Halle unas ecuaciones de las rectas que pasan por P, son perpendiculares a r y forman un ángulo $\dfrac{\pi}{3}$ radianes con la normal al plano $x=0$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una tienda se hace un estudio sobre la venta de dos productos A y B a lo largo de un mes. La probabilidad de que un cliente compre el producto A es de un 62 % y la de que compre el producto B es de un 40 %. Se observa, además, que el 12 % de los clientes compran al mismo tiempo el producto A y el producto B. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente haya comprado el producto A sabiendo que no ha adquirido el producto B.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente no compre ni el producto A ni el producto B.

c) (1 punto) Sabiendo que a lo largo de un mes visitan la tienda 3000 personas, calcular, utilizando la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución normal, cuál es la probabilidad de que compren el producto B más de 1250 personas.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular el valor de a para que el sistema de ecuaciones $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea compatible.

b) (1.5 puntos) Calcular los valores de a, b y c para que la multiplicación de dos de las matrices sea igual a la restante.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f(x)$ una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f'(1) = 1$ y $f'(2) = 2$. Se consideran, además, las funciones $g(x) = (f(x))^2$ y $h(x) = (f \circ f)(x)$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular $g(2)$ y $g'(2)$.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $h(x)$ en el punto $x = 1$.

c) (1 punto) Probar, utilizando el Teorema del Valor Medio, que existe un punto en el intervalo $(1, 2)$ en el que el valor de la derivada de $f(x)$ es -1.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (0.5 puntos) Calcule el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (0, 0, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, \sqrt{3})$.

b) (1 punto) Sea O el origen de coordenadas, y los puntos $A\,(2, 0, 0)$, $B\,(0, 3, 0)$ y $C\,(0, 2, 2\sqrt{3})$. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por las tres aristas concurrentes $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$.

c) (1 punto) Calcule una ecuación de la recta perpendicular común a las rectas r y s, siendo r la recta que pasa por O y por C y s la recta de ecuaciones $y - 3 = 0$, $z = 0$.

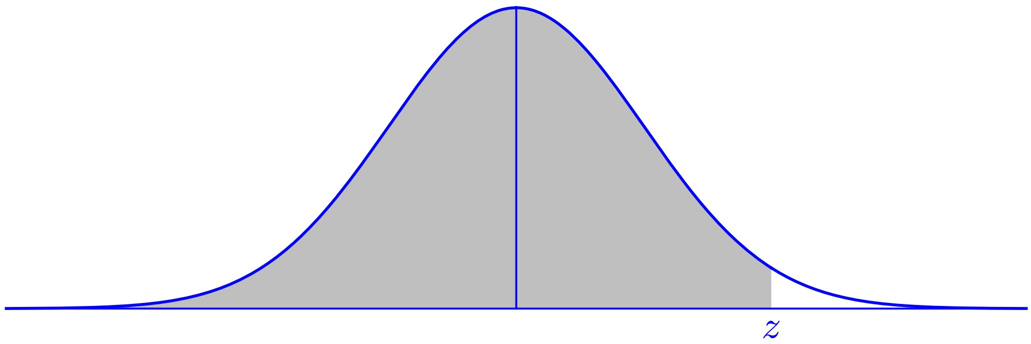
B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una *influencer* famosa publica en su Instagram un 20 % de fotografías dedicadas a viajes, un 50 % referentes a temas de moda y el resto sobre maternidad. El 5 % de las publicaciones de viajes reciben menos de 20 000 *Me gusta* y lo mismo ocurre con el 20 % de las de moda y con el 35 % de las que tratan asuntos de maternidad. Elegida una fotografía al azar, se pide:

a) (1.25 puntos) Determinar la probabilidad de que tenga más de 20 000 *Me gusta*.

b) (1.25 puntos) Si tiene menos de 20 000 *Me gusta*, calcular la probabilidad de que el tema tratado en ella haya sido sobre viajes.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $\mathrm{N}(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II—SOLUCIONES
Documento de trabajo orientativo

A.1.

a) $|A| = 0 \Rightarrow m = -3$ y $m = 1$.
Si $m \neq -3$ y $m \neq 1 \Rightarrow \mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A') = 3 \Rightarrow SCD$.
Si $m = 1 \Rightarrow \mathrm{Rg}(A) = 2 = \mathrm{Rg}(A') < 3 \Rightarrow SCI$.
Si $m = -3 \Rightarrow \mathrm{Rg}(A) = 2 \neq \mathrm{Rg}(A') = 3 \Rightarrow SI$.
b) Si $m = 1$, tenemos un SCI cuyas soluciones son de la forma $(x, y, z) = \left(\dfrac{\lambda}{3}, \dfrac{\lambda}{3}, \lambda\right)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

A.2.

a) La función $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ está definida en todos los puntos salvo en $x = 0$. Su derivada $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ es siempre negativa, por lo que $f(x)$ es decreciente en $\mathbb{R} - \{0\}$.
b) Los límites de integración de la integral que proporciona el área entre las gráficas de las funciones se obtienen resolviendo la siguiente ecuación:

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{5-x}{2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o } x = 2.$$

Por tanto, dado que $g(x) \geq f(x)$ en el intervalo $[1, 2]$, el área vendrá dada por:

$$\int_1^2 (g(x) - f(x))\, dx = \int_1^2 \left(\frac{5-x}{2} - 1 - \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{-x}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{-x^2}{4} + \frac{3}{2}x - \ln x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{3}{4} - \ln 2 \text{ u}^2.$$

A.3.

a) Si la distancia entre un punto de la recta r, $(\lambda, \lambda, 0)$, y el punto P es uno, entonces

$$\sqrt{(\lambda-1)^2 + (\lambda-1)^2} = 1 \Rightarrow 2(\lambda-1)^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Los puntos buscados son $(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.
b) Sea $\vec{v} = (a, b, c)$ el vector director de la recta buscada. Como es perpendicular a r, entonces $(a, b, c) \cdot (1, 1, 0) = a + b = 0 \Rightarrow b = -a$. Como $\vec{v}$ tiene que formar un ángulo $\dfrac{\pi}{3}$ radianes con la normal al plano $x = 0$, entonces $(a, -a, c) \cdot (1, 0, 0) = \sqrt{a^2 + a^2 + c^2}\cos(\dfrac{\pi}{3}) \Rightarrow a = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + c^2} \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}a$.
Por lo que las rectas buscadas serán $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 + \lambda \\ y & = & 1 - \lambda, \\ z & = & \sqrt{2}\lambda \end{array}\right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$ y $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 + \mu \\ y & = & 1 - \mu, \\ z & = & -\sqrt{2}\mu \end{array}\right. \quad \mu \in \mathbb{R}$.

A.4.

a) Tenemos que: $P(A) = 0.62$, $P(B) = 0.40$ y $P(A \cap B) = 0.12$.
$P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{1 - P(B)} = \dfrac{5}{6}$.
b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.1$.
c) Tenemos $p = 0.4$, $q = 0.6$ y $n = 3000 \Rightarrow X \sim B(3000; 0.4)$.
Aproximación por la Normal: $X' \sim N(1200; 26.83)$.
$P(X > 1250) = P(X' \geqslant 1250.5) = P(Z \geqslant 1.88) = 0.0301$.

SOLUCIONES

Documento de trabajo orientativo

B.1.

a) El rango de la matriz de coeficientes debe ser igual al de la matriz ampliada. El rango de C es 2, luego det$\begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = a+1$ debe ser nulo; así pues, $a=-1$.

b) Las dimensiones de las matrices solo permiten $B\,C = A$, con lo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+11 & 8 \\ 5a+3c+8 & 2a+2c+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$$

que propociona el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} a-c=-11 \\ 5a+3c=-7 \\ 2a-b+c=-6 \end{array} \right. ,$$

con solución $a=-5$, $b=2$ y $c=6$.

B.2.

a) $g(2) = (f(2))^2 = 1$ y $g'(2) = 2f(2)f'(2) = 4$.

b) Ecuación de la recta tangente: $y = h'(1)(x-1) + h(1)$.

Ahora bien, $h(1) = f\left(f(1)\right) = f(2) = 1$ y $h'(1) = f'(1)f'\left(f(1)\right) = f'(2) = 2$ con lo que $y = 2x-1$.

c) $f(x)$ es continua en $[1,2]$ y derivable en $(1,2)$. Aplicando el Teorema Valor Medio, existe un punto c en $(1,2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = -1.$$

B.3.

a) Como $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{3}$, y $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$, se tiene que $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ con lo que el ángulo pedido es $\dfrac{\pi}{6}$ radianes.

b) El volumen es $\left|\left[\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right]\right| = 12\sqrt{3}\,\mathrm{u}^3$.

c) El plano π de ecuación $x=0$ (que pasa por O, B y C) es perpendicular a s, y $r\subset\pi$. Por tanto, la recta contenida en el plano π, que pasa por el punto $\pi\cap s = \{(0,3,0)\}$ y con vector director $(0,-\sqrt{3},1)$ es la perpendicular común. Unas ecuaciones paramétricas de esta recta son

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 3-\sqrt{3}\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R}. \\ z &=& \lambda \end{array} \right.$$

B.4.

Consideremos los sucesos V = “Fotografía sobre viajes”, M = “Fotografía sobre moda” , Ma = “Fotografía sobre maternidad” y A =“Tener más de 20 000 *Me gusta*”.

a) $P(A) = 0.2\cdot 0.95 + 0.5\cdot 0.8 + 0.3\cdot 0.65 = 0.785$.

b) $P(V|\overline{A}) = \dfrac{0.2\cdot 0.05}{1-0.785} \approx 0.047$.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A. 1.

a) Cálculo correcto de los valores a estudiar: 0.5 puntos. Estudio correcto de cada caso: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

A. 2.

a) Dominio: 0.25 puntos. Derivada: 0.25 puntos. Crecimiento y decrecimiento: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 1 punto (cálculo correcto de la primitiva: 0.75 puntos; Regla de Barrow: 0.25 puntos).

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.

A. 3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 1 punto. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

A. 4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento correcto de la distribución normal: 0.5 puntos. Cálculo de la probabilidad: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace y las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial a partir de su aproximación por la normal valorando si se dan las condiciones necesarias para que sea válida. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

B. 1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo del producto: 0.5 puntos. Resolución del sistema: 0.75 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes.

B. 2.

a) Por cada valor obtenido: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Por la pendiente y la ordenada en el origen de la recta tangente: 0.25 puntos cada uno. Ecuación correcta: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.

B. 3.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

B. 4.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.