Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2022ko OHIKOA	ORDINARIA 2022
MATEMATIKA II	**MATEMÁTICAS II**

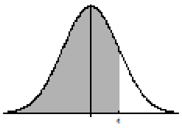
Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1
Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} x+y+\alpha z=\alpha \\ 2x+\alpha y+\alpha z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha=-1$ y $\alpha=1$, si es posible.

Ejercicio B1
Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinar para qué valores del parámetro m la matriz A no tiene inversa.

(b) Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $m=0$.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2
Se consideran la recta r cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r\equiv\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=0 \end{cases},$$

y el plano $\pi\equiv x+y+z-2=0$. Calcula las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta r tal que la distancia de P al plano π sea igual que la distancia de P al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto? Contesta razonadamente.

Ejercicio B2
Sean el punto $P=(1,2,a)$, donde $a\neq 0$, y el plano $\pi\equiv x+y+2z=3$. Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto al plano π.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3
Dada la función $f(x)=(x-1)^2 e^{-2x}$, estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus máximos y mínimos.

Ejercicio B3
Sea $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$. Encuentra los valores de los parámetros A, B y C para que f se anule en el punto de abscisa $x=1$ y las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x=-1$ y $x=3$ sean paralelas a la recta $y=2x+1$.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula $\int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)}dx$.

Ejercicio B4

Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$ y la recta horizontal $y = e$, y calcula el área de ese recinto.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Tenemos dos urnas con el siguiente número de bolas blancas y negras:
T: 4 bolas negras y 6 blancas,
R: 7 bolas negras y 3 blancas.
Se selecciona al azar una urna, se extrae una bola y se coloca en la otra urna. A continuación, se extrae una bola de esta última urna. Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas:
(a) sean negras,
(b) sean blancas,
(c) sean de distinto color.

Ejercicio B5

El peso (en gramos) de una pieza fabricada en serie sigue una distribución normal de media 52 y desviación típica 6,5.
(a) Calcula la probabilidad de que el peso de una pieza fabricada esté comprendido entre 50 y 68 gramos.
(b) Si el 30% de las piezas fabricadas pesa más que una pieza dada, ¿cuánto pesa esta última?

Soluciones

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1
Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} x+y+\alpha z=\alpha \\ 2x+\alpha y+\alpha z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha=-1$ y $\alpha=1$, si es posible.

a) La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix}=\alpha+\alpha+2\alpha^2-\alpha^2-2-\alpha^2=2\alpha-2$$

$$|A|=0 \Rightarrow 2\alpha-2=0 \Rightarrow 2\alpha=2 \Rightarrow \boxed{\alpha=1}$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha=1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{Fila\,2^a-2\cdot Fila\,1^a} \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -1 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{}}_{}$$

$$\xleftrightarrow{A} \qquad \xleftrightarrow{A/B}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 1$ el sistema es compatible determinado y si $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos a partir de la matriz equivalente obtenida en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ -y-z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ \boxed{y=1-z} \end{array}\right\} \Rightarrow x+1-z+z=1 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

La solución es $x = 0;\ y = 1-t;\ z = t;\ t \in \mathbb{R}$.

Para $\alpha = -1$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 2x-y-z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-y+z \\ 2x-y-z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(-1-y+z)-y-z=1 \\ -1-y+z-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2-2y+2z-y-z=1 \\ -2y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y+z=3 \\ -y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3+3y \\ -y+z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y+3+3y=1 \Rightarrow 2y=-2 \Rightarrow \boxed{y=-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=3-3=0} \Rightarrow \boxed{x=-1+1+0=0}$$

La solución es $x = 0$; $y = -1$; $z = 0$.

Ejercicio B1
Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinar para qué valores del parámetro m la matriz A no tiene inversa.

(b) Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $m=0$.

a) La matriz no tiene inversa cuando su determinante es nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=2m^2-4m+4-2m=2m^2-6m+4$$

$$|A|=0 \Rightarrow 2m^2-6m+4=0 \Rightarrow m^2-3m+2=0 \Rightarrow m=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases} \frac{3+1}{2}=\boxed{2=m} \\ \frac{3-1}{2}=\boxed{1=m} \end{cases}$$

La matriz A no tiene inversa cuando $m=1$ o $m=2$.

b) Para $m = 0$ el determinante de A es no nulo y tiene inversa.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=4\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{4}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2
Se consideran la recta *r* cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases},$$

y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$. Calcula las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta *r* tal que la distancia de P al plano π sea igual que la distancia de P al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto? Contesta razonadamente.

Estudiemos la posición relativa de recta y plano.

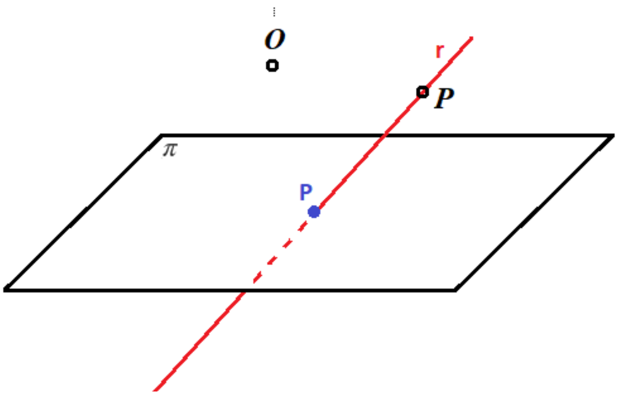
$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(0,0,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,2,0) \end{cases}$$

$$\pi \equiv x + y + z - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1,1,1)$$

Comprobamos si el vector director de la recta y el normal del plano forman 90º. Para ello calculamos el producto escalar $\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n}$.

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (1,2,0)(1,1,1) = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

Al ser no nulo no forman 901 y la recta y el plano son secantes.



El punto P que buscamos pertenece a la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \Rightarrow P(t, 2t, 0) \\ z = 0 \end{cases}$$

El punto o puntos $P(t,2t,0)$ cumplen: $d(O,P) = d(P,\pi)$.

$$\left.\begin{array}{r} d(O,P)=\left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{t^2+4t^2+0}=\sqrt{5t^2}=\sqrt{5}\cdot|t| \\ d(P,\pi)=\dfrac{|t+2t+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{|3t-2|}{\sqrt{3}} \\ d(O,P)=d(P,\pi) \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{5}\cdot|t|=\frac{|3t-2|}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{15}\cdot|t|=|3t-2|$$

Resolvemos la ecuación $\sqrt{15}\cdot|t|=|3t-2|$ teniendo en cuenta las distintas posibilidades.

Primera posibilidad:

$$Si\, 3t-2>0 \Rightarrow t>\frac{2}{3}>0 \Rightarrow \sqrt{15}\cdot t=3t-2 \Rightarrow \left(\sqrt{15}-3\right)t=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{-2}{\sqrt{15}-3}\simeq -2.29<0 \text{ ¡No válido!}$$

Segunda posibilidad:

$$Si\begin{cases} 3t-2<0 \Rightarrow t<\dfrac{2}{3}\simeq 0.67 \\ t>0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{15}\cdot t=-3t+2 \Rightarrow \left(\sqrt{15}+3\right)t=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{2}{3+\sqrt{15}}=\frac{-3+\sqrt{15}}{3}\simeq 0.291 \quad \text{¡Válido!} \Rightarrow P\left(\frac{-3+\sqrt{15}}{3},\frac{-6+2\sqrt{15}}{3},0\right)$$

Tercera posibilidad:

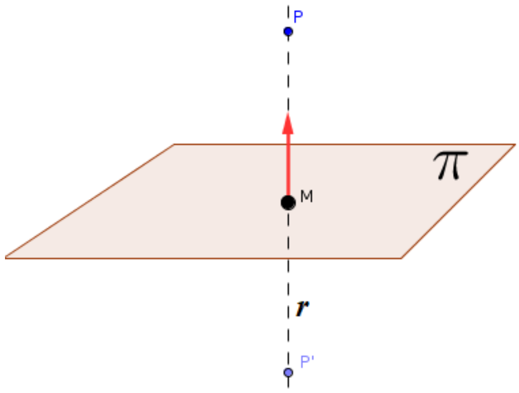
$$Si\begin{cases} 3t-2<0 \Rightarrow t<\dfrac{2}{3} \\ t<0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{15}\cdot(-t)=-3t+2 \Rightarrow \left(3-\sqrt{15}\right)t=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{2}{3-\sqrt{15}}=\frac{-3-\sqrt{15}}{3}\simeq -2.291 \quad \text{¡Válido!} \Rightarrow P\left(\frac{-3-\sqrt{15}}{3},\frac{-6-2\sqrt{15}}{3},0\right)$$

Los puntos que cumplen lo planteado son dos: $P\left(\frac{-3+\sqrt{15}}{3},\frac{-6+2\sqrt{15}}{3},0\right)$ y $P\left(\frac{-3-\sqrt{15}}{3},\frac{-6-2\sqrt{15}}{3},0\right)$

Ejercicio B2

Sean el punto $P=(1,2,a)$, donde $a\neq 0$, y el plano $\pi \equiv x+y+2z=3$. Halla las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto al plano π.



Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P.

$$\pi \equiv x+y+2z=3 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} P=(1,2,a)\in r \\ \vec{v}_r=\vec{n}=(1,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=a+2\lambda \end{cases}}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y+2z=3 \\ r\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=a+2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda+2+\lambda+2a+4\lambda=3 \Rightarrow 6\lambda=-2a \Rightarrow \lambda=\frac{-2a}{6}=-\frac{a}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{a}{3} \\ y=2-\dfrac{a}{3} \\ z=a-\dfrac{2a}{3}=\dfrac{a}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M\left(1-\frac{a}{3},2-\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)}$$

El punto P´ simétrico de P respecto del plano π se obtiene sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM}=\left(1-\frac{a}{3},2-\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)-(1,2,a)=\left(-\frac{a}{3},-\frac{a}{3},-\frac{2a}{3}\right)$$

$$P´=\left(1-\frac{a}{3},2-\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)+\left(-\frac{a}{3},-\frac{a}{3},-\frac{2a}{3}\right)=\left(1-\frac{2a}{3},2-\frac{2a}{3},-\frac{a}{3}\right)$$

El punto P´ buscado es $P´=\left(1-\frac{2a}{3},2-\frac{2a}{3},-\frac{a}{3}\right)$

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x)=(x-1)^2 e^{-2x}$, estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus máximos y mínimos.

Hallamos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f'(x)=2(x-1)e^{-2x}+(x-1)^2(-2)e^{-2x}=2(1-(x-1))(x-1)e^{-2x}=2(2-x)(x-1)e^{-2x}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2(2-x)(x-1)e^{-2x}=0 \Rightarrow \begin{cases} 2-x=0 \to \boxed{x=2} \\ x-1=0 \to \boxed{x=1} \\ e^{-2x}=0 \text{ ¡Imposible!} \end{cases}$$

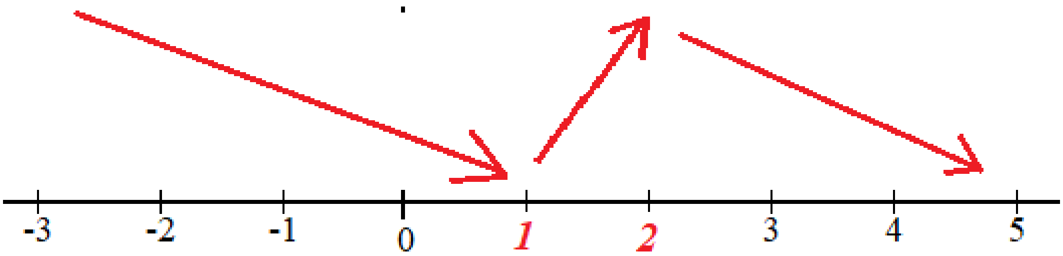
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores obtenidos.

En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=2(2-0)(0-1)e^0=-5<0$. La función decrece en $(-\infty,1)$.

En el intervalo $(1,2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5)=2(2-1.5)(1.5-1)e^{-3}=\frac{1}{2e}>0$. La función crece en $(1,2)$.

En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=2(2-3)(3-1)e^{-6}=\frac{-4}{e^6}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ y crece en $(1,2)$.

La función presenta un máximo en $x = 2$ y un mínimo en $x = 1$.

Ejercicio B3

Sea $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$. Encuentra los valores de los parámetros *A*, *B* y *C* para que *f* se anule en el punto de abscisa *x* = 1 y las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa *x* = −1 y *x* = 3 sean paralelas a la recta $y=2x+1$.

La función se anula en *x = 1* → *f(1) = 0.*

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C \\ f(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1^3+A\cdot 1^2+B\cdot 1+C=0 \Rightarrow \boxed{A+B+C+1=0}$$

Si las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa *x* = −1 y *x* = 3 son paralelas a la recta $y=2x+1$ significa que tienen el mismo valor de la pendiente, es decir, la derivada en dichos valores (pendiente de la recta tangente) vale 2 (pendiente de la recta) → $f'(-1)=2$ y $f'(3)=2$.

$$f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C \Rightarrow f'(x)=3x^2+2Ax+B$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=3x^2+2Ax+B \\ f'(-1)=2 \\ f'(3)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3(-1)^2+2A(-1)+B=2 \\ 3\cdot 3^2+2A\cdot 3+B=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3-2A+B=2 \\ 27+6A+B=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} B=2A-1 \\ 25+6A+B=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 25+6A+2A-1=0 \Rightarrow 8A=-24 \Rightarrow \boxed{A=-3} \Rightarrow \boxed{B=-6-1=-7}$$

Sustituimos estos dos valores obtenidos en la ecuación inicial.

$$\left.\begin{array}{r} B=-7 \\ A=-3 \\ A+B+C+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -3-7+C+1=0 \Rightarrow \boxed{C=9}$$

Los valores buscados son *A = –3, B = –7* y *C = 9.*

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula $\int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)}dx$.

$$\int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)}dx = \dots$$

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2=x\\ \frac{1-3}{2}=-1=x\end{cases} \Rightarrow x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

$$\frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)}=\frac{7x+13}{(x+1)(x-2)(x+1)}=\frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2}$$

$$\frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x-2)(x+1)+C(x-2)}{(x-2)(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$7x+13=A(x+1)^2+B(x-2)(x+1)+C(x-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \to -7+13=-3C \to C=\frac{-6}{3}=-2 \\ x=2 \to 14+13=9A \to A=\frac{27}{9}=3 \\ x=0 \to 13=A-2B-2C \Rightarrow 13=3-2B+4 \to 6=-2B \to B=-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{3}{x-2}-\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\dots = \int \frac{3}{x-2}-\frac{5}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}dx = \int \frac{3}{x-2}dx - \int \frac{3}{x+1}dx - \int \frac{2}{(x+1)^2}dx =$$

$$= \int \frac{3}{x-2}dx - \int \frac{3}{x+1}dx - 2\int (x+1)^{-2}dx = 3\ln|x-2| - 3\ln|x+1| - 2\frac{1}{-1}(x+1)^{-1} =$$

$$= \boxed{3\ln|x-2| - 3\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + K}$$

Ejercicio B4
Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$ y la recta horizontal $y = e$, y calcula el área de ese recinto.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las funciones.

x	$y=e^x$
-2	0.14
-1	0.37
0	1
1	2.7
2	7.4

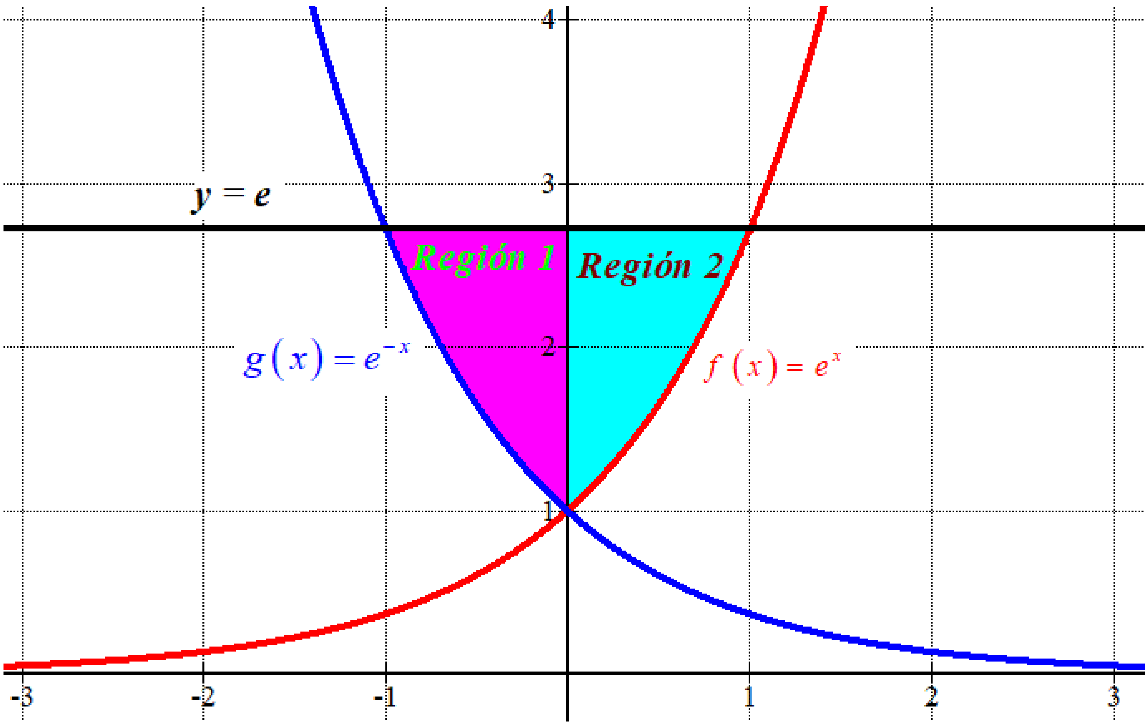
x	$y=e^{-x}$
-2	7.4
-1	2.7
0	1
1	0.37
2	0.14

Averiguamos donde se cortan sus gráficas, aunque lo tenemos en la tabla.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow e^x=e^{-x}\Rightarrow e^x=\frac{1}{e^x}\Rightarrow e^x\cdot e^x=1\Rightarrow e^{2x}=1\Rightarrow 2x=0\Rightarrow \boxed{x=0\in(-1,1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=e^x \\ y=e \end{array}\right\}\Rightarrow e^x=e\Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=e^{-x} \\ y=e \end{array}\right\}\Rightarrow e^{-x}=e\Rightarrow -x=1\Rightarrow \boxed{x=-1}$$



El área de la región se calcula mediante dos integrales definidas.

$$Área1=\int_{-1}^{0} e-e^{-x}dx=\left[ex+e^{-x}\right]_{-1}^{0}=\left[0+e^{-0}\right]-\left[-e+e^{1}\right]=1+e-e=1u^2$$

$$\acute{A}rea\,2 = \int_0^1 e - e^x dx = \left[ex - e^x\right]_0^1 = \left[e - e^1\right] - \left[0 - e^0\right] = e - e + 1 = 1u^2$$

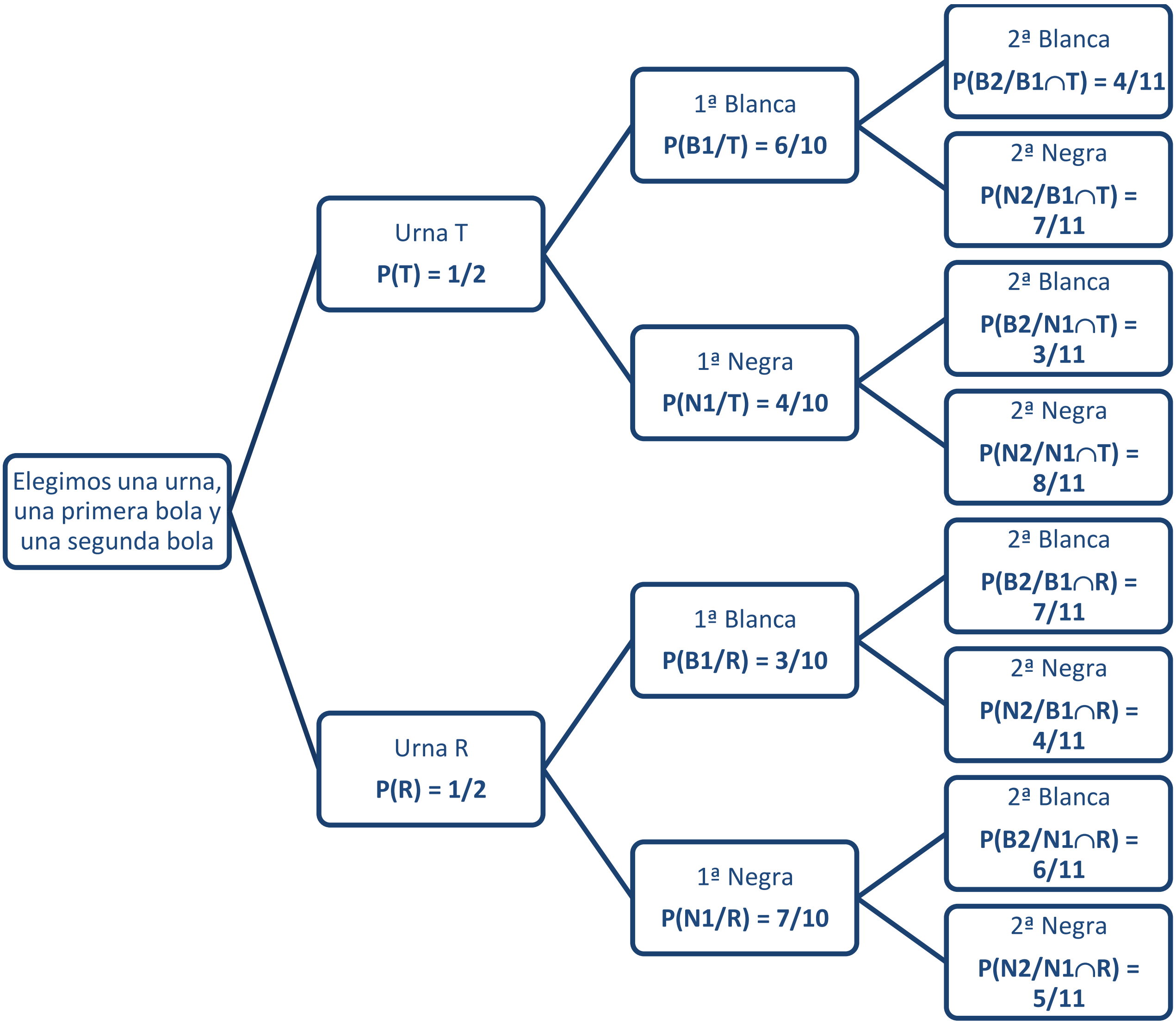
El área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ y la recta horizontal $y = e$ es la suma de las áreas de la región 1 y 2.

Área total = 2 u^2

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5
Tenemos dos urnas con el siguiente número de bolas blancas y negras:
T: 4 bolas negras y 6 blancas,
R: 7 bolas negras y 3 blancas.
Se selecciona al azar una urna, se extrae una bola y se coloca en la otra urna. A continuación, se extrae una bola de esta última urna. Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas:
(a) sean negras,
(b) sean blancas,
(c) sean de distinto color.

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar cómo funciona el experimento aleatorio.



(a) Nos piden calcular $P(N1\cap N2)$. Si miramos el diagrama ocurre en dos ramas. Sumamos sus probabilidades.

$$P(N1\cap N2)=P(T)P(N1/T)P(N2/N1\cap T)+P(R)P(N1/R)P(N2/N1\cap R)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{8}{11}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{11}=\boxed{\frac{67}{220}\simeq 0.305}$$

(b) Nos piden calcular $P(B1 \cap B2)$. Si miramos el diagrama ocurre en dos ramas. Sumamos sus probabilidades.

$$P(B1 \cap B2) = P(T)P(B1/T)P(B2/B1 \cap T) + P(R)P(B1/R)P(B2/B1 \cap R) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{11} = \boxed{\frac{45}{220} \simeq 0.205}$$

(c) Como tenemos calculadas las probabilidades de sacar dos bolas negras y la de sacar dos bolas blancas la probabilidad de sacar dos bolas de distinto color la calculamos usando el suceso contrario.

$$P((B1 \cap N2) \cup (N1 \cap B2)) = 1 - [P(B1 \cap B2) + P(N1 \cap N2)] =$$

$$= 1 - \left[\frac{67}{220} + \frac{45}{220} \right] = \boxed{\frac{108}{220} \simeq 0.491}$$

Ejercicio B5

El peso (en gramos) de una pieza fabricada en serie sigue una distribución normal de media 52 y desviación típica 6,5.

(a) Calcula la probabilidad de que el peso de una pieza fabricada esté comprendido entre 50 y 68 gramos.

(b) Si el 30% de las piezas fabricadas pesa más que una pieza dada, ¿cuánto pesa esta última?

X = El peso (en gramos) de una pieza fabricada en serie.
X = N(52, 6.5)

(a) $P(52 \le X \le 68) = P(X \le 68) - P(X \le 52) = \{Tipificamos\} =$

$$= P\left(Z \le \frac{68-52}{6.5}\right) - P\left(X \le \frac{50-52}{6.5}\right) = P(Z \le 2.46) - P(X \le -0.31) =$$

$$= P(Z \le 2.46) - \left[1 - P(X \le 0.31)\right] = \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} =$$

$$= 0.9931 - \left[1 - 0.6217\right] = \boxed{0.6148}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9
2'4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'9931	0'9
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9

	0	0'01	0'
0	0'5000	0'5040	0'
0'1	0'5398	0'5438	0'
0'2	0'5793	0'5832	0'
0'3	[illegible]	0'6217	0'
0'4	0'6554	0'6591	0'

(b) Nos piden hallar el valor "*a*" tal que $P(X \ge a) = 0.30$.

$$P(X \ge a) = 1 - P(X \le a) = 0.30 \Rightarrow P(X \le a) = 0.70 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{a-52}{6.5}\right) = 0.70 \Rightarrow \{\text{Miramos en la tabla N(0,1)}\} \Rightarrow \frac{a-52}{6.5} = 0.525 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - 52 = 6.5 \cdot 0.525 \Rightarrow a = 52 + 6.5 \cdot 0.525 = \boxed{55.41}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'
0'5	[illegible]	[illegible]	0'6985	0'7019	0'
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'

El 30 % de las piezas está por encima de 55.41 gramos.