GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Innovació, Universitats, Ciència i Societat Digital

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2022	CONVOCATORIA: JULIO 2022
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumno contestará solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax+y=1 \\ x+z=1 \\ x+ay+(a-1)z=a \end{cases}.$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro real a. (5 puntos)
b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible. (5 puntos)

Problema 2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$.

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4. (3 puntos)

c) Calcular $\det\left(A^{-50}\right)$ cuando $a^2-b^2 \neq 0$. (3 puntos)

Problema 3. Dados los puntos $A=(2,0,0)$ y $B=(0,1,0)$, y la recta $s:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=z$:

a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B. (2 puntos)

b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r. (4 puntos)

c) Calcular la distancia del punto A a la recta s. (4 puntos)

Problema 4. Dados los puntos $A=(2,1,-2)$ y $B=(3,2,3)$, y el plano π definido por $2x+2y+z=3$, obtener:

a) El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B. (5 puntos)
b) El área del triángulo cuyos vértices son A, B y C. (5 puntos)

Problema 5.

a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida: (5 puntos)

$$\int \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx\,.$$

b) Determinar, en función de t, el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$. (2 puntos)

c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$ sea igual a $\ln\frac{25}{4}$. (3 puntos)

Problema 6. Considerar la función $f(x)=e^{-x^2}$ para los valores positivos de x. Por cada punto $M=(x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY. Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

a) Determinar el área del rectángulo en función de x. (3 puntos)

b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área. (7 puntos)

Soluciones:

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax+y=1 \\ x+z=1 \\ x+ay+(a-1)z=a \end{cases}.$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro real *a*. (5 puntos)
b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible. (5 puntos)

a) La matriz de coeficientes del sistema es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 & a \end{pmatrix}.$$

Estudiamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}=0+1-a+1-a^2=-a^2-a+2$$

$$|A|=0\Rightarrow -a^2-a+2=0\Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2+8}}{-2}=\frac{1\pm 3}{-2}=\begin{cases} \frac{1+3}{-2}=\boxed{-2=a} \\ \frac{1-3}{-2}=\boxed{1=a} \end{cases}$$

Surgen tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a\neq -2 \ y \ a\neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a=-2$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

El sistema queda $\begin{cases} -2x+y=1 \\ x+z=1 \\ x-2y-3z=-2 \end{cases}$ Convertimos este sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$\begin{cases} -2x+y=1 \\ x+z=1 \\ x-2y-3z=-2 \end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª} + 2\cdot\text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrrl} -2x & +y & & =1 \\ 2x & & +2z & =2 \\ \hline & y & +2z & =3 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 1}^{\text{a}} + 2\cdot\text{Ecuación 3}^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} -2x & +y & & =1 \\ 2x & -4y & -6z & =-4 \\ \hline & -3y & -6z & =-3 \to \text{Nueva ecuación 3}^{\text{a}} \end{array}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x+y \quad =1 \\ \quad y+2z=3 \\ -3y-6z=-3 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3}^{\text{a}} + 3\cdot\text{Ecuación 2}^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrcl} -3y & -6z & = & -3 \\ 3y & +6z & = & 9 \\ \hline & 0 & = & 6 \to \text{Nueva ecuación 3}^{\text{a}} \end{array}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x+y \quad =1 \\ \quad y+2z=3 \\ \quad 0=6 \end{array}\right. \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema no tiene solución (es incompatible)

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

El sistema queda $\left\{\begin{array}{l} x+y \quad =1 \\ x \quad +z=1 \\ x+y \quad =1 \end{array}\right.$ Convertimos este sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y \quad =1 \\ x \quad +z=1 \\ x+y \quad =1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 2}^{\text{a}} - \text{Ecuación 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} x & +y & & =1 \\ -x & & -z & =-1 \\ \hline & y & -z & =0 \to \text{Nueva ecuación 2}^{\text{a}} \end{array}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3}^{\text{a}} = \text{Ecuación 1}^{\text{a}} \\ \text{quito ecuación 3}^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y \quad =1 \\ \quad y-z=0 \end{array}\right.$$

Este sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a \neq -2$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado. Hallamos la solución utilizando el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & a & a-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}} = \frac{a-a+1-a}{-a^2-a+2} = \frac{1-a}{-a^2-a+2} = \frac{-(a-1)}{-(a-1)(a+2)} = \boxed{\frac{1}{a+2}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}} = \frac{a^2-a+1-a+1-a^2}{-a^2-a+2} = \frac{2-2a}{-a^2-a+2} = \frac{-2(a-1)}{-(a-1)(a+2)} = \boxed{\frac{2}{a+2}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}}=\frac{1+a-a-a^2}{-a^2-a+2}=\frac{1-a^2}{-a^2-a+2}=\frac{-(a-1)(a+1)}{-(a-1)(a+2)}=\boxed{\frac{a+1}{a+2}}$$

La solución es $x=\frac{1}{a+2}$; $y=\frac{2}{a+2}$; $z=\frac{a+1}{a+2}$

Para $a=1$ el sistema es compatible indeterminado. Hallamos sus soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{cases} x+y \quad =1 \\ x \quad +z=1 \\ x+y \quad =1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \quad =1 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \quad =1 \\ \boxed{y=z} \end{cases} \Rightarrow x+z=1 \Rightarrow \boxed{x=1-z}$$

Las soluciones del sistema son: $x=1-t;\ y=t;\ z=t;\ \ t\in\mathbb{R}$

Problema 2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$.

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4. (3 puntos)

c) Calcular $\det\left(A^{-50}\right)$ cuando $a^2-b^2\neq 0$. (3 puntos)

a) El producto de una matriz por su inversa da la matriz identidad.

$$A\cdot A^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} a+b & -a-b+1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a+b=1 \\ -a-b+1=0 \\ a-b=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=1-b \\ -a-b+1=0 \\ a-b=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -1+b-b+1=0 \\ 1-b-b=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 0=0 \\ -2b=0\rightarrow\boxed{b=0} \end{cases}\Rightarrow\boxed{a=1-0=1}$$

Los valores buscados son $a=1;\ b=0$

b) Para $a=1;\ b=0$ la matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1+3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $A^{-50}\cdot A^{50}=I\Rightarrow\left|A^{-50}\cdot A^{50}\right|=|I|\Rightarrow\left|A^{-50}\right|\cdot\left|A^{50}\right|=|I|\Rightarrow\left|A^{-50}\right|\cdot|A|^{50}=1$

Calculamos el determinante de la matriz A y despejamos en la ecuación $\det\left(A^{-50}\right)$.

$$\left.\begin{array}{r} |A|=\begin{vmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{vmatrix}=(a+b)(a-b)=a^2-b^2\neq 0 \\ \left|A^{-50}\right|\cdot|A|^{50}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow\left|A^{-50}\right|\cdot\left(a^2-b^2\right)^{50}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\left|A^{-50}\right|=\frac{1}{\left(a^2-b^2\right)^{50}}}$$

Problema 3. Dados los puntos $A=(2,0,0)$ y $B=(0,1,0)$, y la recta $s:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=z$:

a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B. (2 puntos)

b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r. (4 puntos)

c) Calcular la distancia del punto A a la recta s. (4 puntos)

a) La recta r que pasa por los puntos A y B tiene como vector director $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}=(0,1,0)-(2,0,0)=(-2,1,0)\\ A=(2,0,0)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{r:\begin{cases}x=2-2\lambda\\ y=\lambda\\ z=0\end{cases}}$$

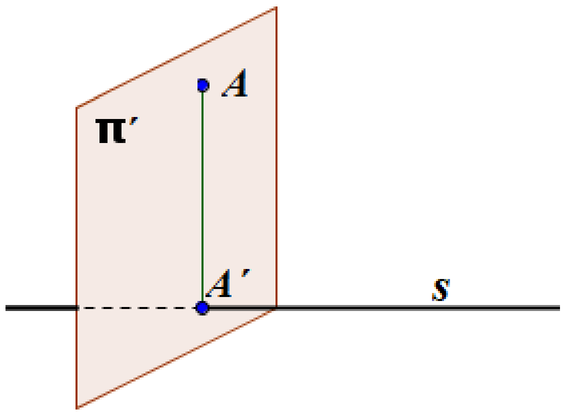
b) Si el plano π contiene a la recta s uno de los vectores directores del plano es el vector director de la recta s. Al ser paralelo a la recta r el otro vector director del plano π es el vector director de la recta r.

$$s:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=z\Rightarrow s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(2,3,1)\\ P_s(1,1,0)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{v_r}=(-2,1,0)\\ \vec{v}=\overrightarrow{u_s}=(2,3,1)\\ P_s(1,1,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z\\ -2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x-1-6z-2z+2y-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: x+2y-8z-3=0}$$

c)



Hallamos el plano π´ perpendicular a la recta s que pasa por el punto A. Al ser perpendicular a la recta el vector normal del plano es el vector director de la recta s.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n'}=\vec{u_s}=(2,3,1)\\ A=(2,0,0)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi':2x+3y+z+D=0\\ A=(2,0,0)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow 4+0+0+D=0\Rightarrow D=-4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\pi':2x+3y+z-4=0}$$

Hallamos el punto A´ de corte del plano π´ y la recta *s*.

$$s:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=z\Rightarrow s:\begin{cases}\vec{u_s}=(2,3,1)\\ P_s(1,1,0)\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=1+3\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi':2x+3y+z-4=0\\ s:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=1+3\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 2(1+2\lambda)+3(1+3\lambda)+\lambda-4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+4\lambda+3+9\lambda+\lambda-4=0\Rightarrow 14\lambda=-1\Rightarrow\lambda=\frac{-1}{14}\Rightarrow\begin{cases}x=1+2\frac{-1}{14}=\frac{12}{14}\\ y=1+3\frac{-1}{14}=\frac{11}{14}\\ z=\frac{-1}{14}\end{cases}\Rightarrow\boxed{A'\left(\frac{12}{14},\frac{11}{14},\frac{-1}{14}\right)}$$

La distancia del punto A a la recta *s* es la distancia del punto A al punto A´.

$$d(A,s)=d(A,A')=\left|\overrightarrow{AA'}\right|=\ldots$$

$$\boxed{\overrightarrow{AA'}=\left(\frac{12}{14},\frac{11}{14},\frac{-1}{14}\right)-(2,0,0)=\left(\frac{12}{14}-2,\frac{11}{14},\frac{-1}{14}\right)=\left(\frac{-16}{14},\frac{11}{14},\frac{-1}{14}\right)}$$

$$\ldots=\sqrt{\left(\frac{-16}{14}\right)^2+\left(\frac{11}{14}\right)^2+\left(\frac{-1}{14}\right)^2}=\sqrt{\frac{378}{196}}=\boxed{\frac{3\sqrt{42}}{14}\simeq 1.389}$$

La distancia del punto A a la recta *s* es $\frac{3\sqrt{42}}{14}\simeq 1.389$

Problema 4. Dados los puntos $A=(2,1,-2)$ y $B=(3,2,3)$, y el plano π definido por $2x+2y+z=3$, obtener:
a) El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B. (5 puntos)
b) El área del triángulo cuyos vértices son A, B y C. (5 puntos)

a) La recta perpendicular a π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : 2x+2y+z=3 \Rightarrow \vec{n}=(2,2,1)$$

$$r:\begin{cases} B(3,2,3)\in r \\ \vec{v_r}=\vec{n}=(2,2,1)\end{cases} \Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+\lambda\end{cases}}$$

Hallamos el punto C de corte de la recta r y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi : 2x+2y+z=3 \\ r:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+\lambda\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 2(3+2\lambda)+2(2+2\lambda)+3+\lambda=3 \Rightarrow 6+4\lambda+4+4\lambda+3+\lambda=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\lambda=-10 \Rightarrow \lambda=\frac{-10}{9} \Rightarrow \begin{cases} x=3+2\frac{-10}{9}=\frac{7}{9} \\ y=2+2\frac{-10}{9}=\frac{-2}{9} \\ z=3+\frac{-10}{9}=\frac{17}{9}\end{cases} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{7}{9},\frac{-2}{9},\frac{17}{9}\right)}$$

b) El área del triángulo cuyos vértices son A, B y C es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}=(3,2,3)-(2,1,-2)=(1,1,5)$$

$$\overrightarrow{AC}=\left(\frac{7}{9},\frac{-2}{9},\frac{17}{9}\right)-(2,1,-2)=\left(\frac{7}{9}-2,\frac{-2}{9}-1,\frac{17}{9}+2\right)=\left(\frac{-11}{9},\frac{-11}{9},\frac{35}{9}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 5 \\ \frac{-11}{9} & \frac{-11}{9} & \frac{35}{9}\end{vmatrix}=\frac{1}{9}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 5 \\ -11 & -11 & 35\end{vmatrix}=\frac{1}{9}(35i-55j-11k+11k-35j+55i)=$$

$$=\frac{1}{9}(90i-90j)=10i-10j=(10,-10,0)$$

$$Área\ ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{10^2+(-10)^2+0^2}}{2}=\boxed{5\sqrt{2}\simeq 7.07}$$

Problema 5.

a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida: (5 puntos)

$$\int \frac{18}{x^2-5x-14}dx .$$

b) Determinar, en función de t, el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}dx$. (2 puntos)

c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}dx$ sea igual a $\ln\frac{25}{4}$. (3 puntos)

a)

$$\int \frac{18}{x^2-5x-14}dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^2-5x-14=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2+56}}{2}=\frac{5\pm 9}{2}=\begin{cases}\frac{5+9}{2}=7=x\\ \frac{5-9}{2}=-2=x\end{cases}$$

$$\frac{18}{x^2-5x-14}=\frac{18}{(x-7)(x+2)}=\frac{A}{x-7}+\frac{B}{x+2}\Rightarrow\frac{18}{(x-7)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-7)}{(x-7)(x+2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18=A(x+2)+B(x-7)\Rightarrow\begin{cases}Si\ x=-2\rightarrow 18=-9B\Rightarrow B=\frac{18}{-9}=-2\\ Si\ x=7\rightarrow 18=9A\Rightarrow A=\frac{18}{9}=2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{18}{x^2-5x-14}=\frac{2}{x-7}-\frac{2}{x+2}$$

$$\dots=\int\frac{2}{x-7}-\frac{2}{x+2}dx=\int\frac{2}{x-7}dx-\int\frac{2}{x+2}dx=2\ln|x-7|-2\ln|x+2|=$$

$$=\ln(x-7)^2-\ln(x+2)^2=\ln\frac{(x-7)^2}{(x+2)^2}=\boxed{\ln\left(\frac{x-7}{x+2}\right)^2+K}$$

b) Calculamos la integral definida.

$$\int_8^t\frac{18}{x^2-5x-14}dx=\left[\ln\left(\frac{x-7}{x+2}\right)^2\right]_8^t=\left[\ln\left(\frac{t-7}{t+2}\right)^2\right]-\left[\ln\left(\frac{8-7}{8+2}\right)^2\right]=$$

$$=\ln\left(\frac{t-7}{t+2}\right)^2-\ln\frac{1}{100}=\ln\left(\frac{t-7}{t+2}\right)^2-(\ln 1-\ln 100)=\boxed{\ln\left(\frac{t-7}{t+2}\right)^2+\ln 100}$$

c) Igualamos el resultado obtenido en el apartado anterior a $\ln\frac{25}{4}$ y obtenemos el valor de *t*.

$$\ln\left(\frac{t-7}{t+2}\right)^2+\ln 100=\ln\frac{25}{4}\Rightarrow \ln\left(\frac{t-7}{t+2}\right)^2=\ln\frac{25}{4}-\ln 100\Rightarrow \ln\left(\frac{t-7}{t+2}\right)^2=\ln\frac{\frac{25}{4}}{100}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{t-7}{t+2}\right)^2=\ln\frac{25}{400}\Rightarrow \left(\frac{t-7}{t+2}\right)^2=\frac{25}{400}=\frac{1}{16}\Rightarrow \left(\frac{t-7}{t+2}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{t-7}{t+2}=\frac{1}{4}\Rightarrow 4t-28=t+2\Rightarrow 3t=30\Rightarrow \boxed{t=10}\\ o\\ \frac{t-7}{t+2}=-\frac{1}{4}\Rightarrow 4t-28=-t-2\Rightarrow 5t=26\Rightarrow t=\frac{26}{5}<8 \text{ ¡No es válido!}\end{cases}$$

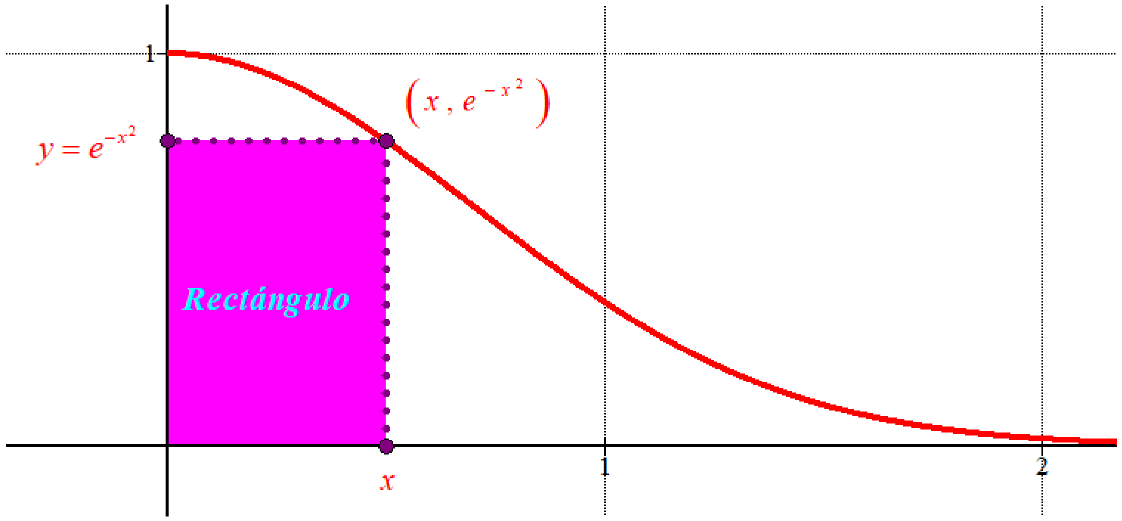
El valor buscado es *t = 10*.

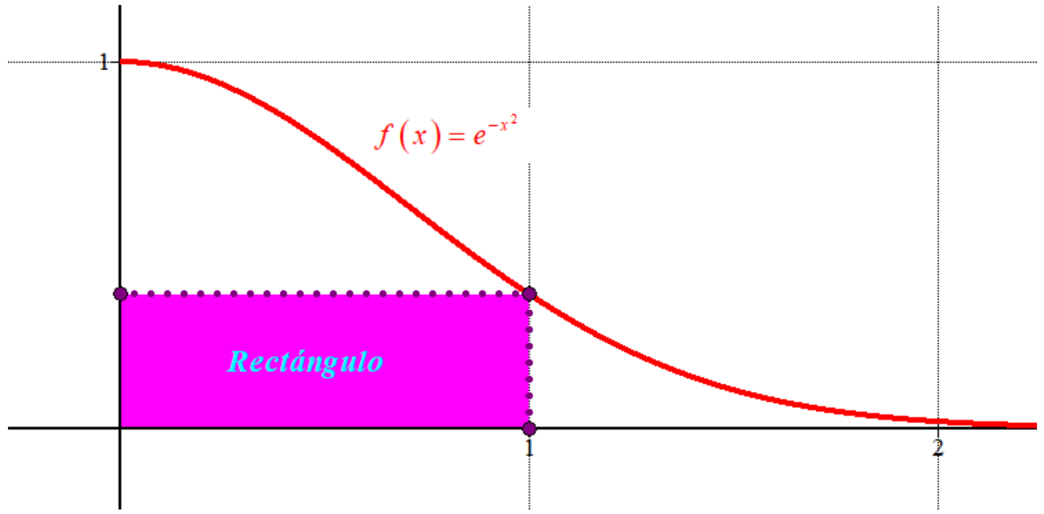
Problema 6. Considerar la función $f(x)=e^{-x^2}$ para los valores positivos de x. Por cada punto $M=(x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY. Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

a) Determinar el área del rectángulo en función de x. (3 puntos)

b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área. (7 puntos)

Dibujamos la situación planteada.





a) La base del rectángulo es “x” y la altura es $y=e^{-x^2}$.

$$\boxed{\acute{A}rea(x)=Base\cdot altura=x\cdot e^{-x^2}}$$

La función área es $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$

b) Derivamos la función e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=x\cdot e^{-x^2} \Rightarrow f'(x)=1\cdot e^{-x^2}+x\cdot(-2x)e^{-x^2}=e^{-x^2}-2x^2\cdot e^{-x^2}=\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \left(1-2x^2\right)e^{-x^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} 1-2x^2=0 \Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x^2=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}} \\ e^{-x^2}=0 \Rightarrow \text{¡No es posible!} \end{cases}$$

Sustituimos estos dos valores en la segunda derivada y averiguamos cual de ellos es el máximo.

$$f'(x)=\left(1-2x^2\right)e^{-x^2} \Rightarrow f''(x)=(-4x)e^{-x^2}+\left(1-2x^2\right)(-2x)e^{-x^2}=$$

$$=-4xe^{-x^2}+\left(-2x+4x^3\right)e^{-x^2}=\left(-4x-2x+4x^3\right)e^{-x^2}=\left(-6x+4x^3\right)e^{-x^2}$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\left(-6\sqrt{\frac{1}{2}}+4\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3\right)e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=\left(\frac{-6}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)e^{-1/2}=\frac{-4}{\sqrt{2}}e^{-1/2}<0$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\left(+6\sqrt{\frac{1}{2}}+4\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3\right)e^{-\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=\left(\frac{6}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)e^{-1/2}=\frac{4}{\sqrt{2}}e^{-1/2}>0$$

La función presenta un valor máximo en $x=+\sqrt{\frac{1}{2}}$, siendo este valor máximo del área del rectángulo:

$$\acute{A}rea=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=\frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\sqrt{2}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2e}}\simeq 0.429u^2}$$

El área máxima se alcanza en $x=+\sqrt{\frac{1}{2}}$ y el valor del área máxima es $\frac{1}{\sqrt{2e}}\simeq 0.429u^2$.