GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Innovació, Universitats, Ciència i Societat Digital

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2022	CONVOCATORIA: JUNIO 2022
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumno contestará solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

<u>En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.</u>

Problema 1. Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$. Se pide:

a) Demostrar que $C-AB^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)
b) Calcular la matriz X que verifica $CX=AB^TX+I$, donde I es la matriz identidad. (3 puntos)
c) Justificar que $\left(AB^T\right)^n=2^nI$ para todo número natural n. (3 puntos)

Problema 2. Dada la matriz

$$A=\begin{bmatrix}m & 0 & m-1\\ -2m & m^2 & 1\\ 0 & 2m & 1\end{bmatrix}.$$

Determinar:
a) El rango de la matriz A en función del parámetro real m. (4 puntos)
b) La matriz inversa de A en el caso $m=2$. (4 puntos)
c) El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8. (2 puntos)

Problema 3. Dadas las rectas $r:\begin{cases}x=z-1\\ y=2-3z\end{cases}$ y $s:\begin{cases}x=4-5z\\ y=4z-3\end{cases}$.
a) Indicar justificadamente la posición relativa de r y s. (5 puntos)
b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s. (5 puntos)

Problema 4. Dados los planos $\pi_1: 2x-y-z+4=0$ y $\pi_2:\begin{cases}x=-1+\alpha\\ y=1+\alpha+\beta\\ z=\alpha-\beta\end{cases}$, y la recta $r:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.
a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2. (3 puntos)
b) Calcular el punto P' que es simétrico al punto $P=(1,0,0)$ respecto del plano π_1. (4 puntos)
c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r. (3 puntos)

Problema 5. Consideramos la función $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$. Obtener:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. (1 punto)
b) Las asíntotas de la función. (2 puntos)
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. (3 puntos)
d) La primitiva de la función $f(x)$. (4 puntos)

Problema 6. Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo. (3 puntos)
b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima. (7 puntos)

Soluciones:

Problema 1. Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$. Se pide:

a) Demostrar que $C-AB^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)

b) Calcular la matriz X que verifica $CX=AB^TX+I$, donde I es la matriz identidad. (3 puntos)

c) Justificar que $\left(AB^T\right)^n=2^nI$ para todo número natural n. (3 puntos)

a) Calculamos la expresión de $C-AB^T$.

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$C-AB^T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1+1 & 0\\ -1+2-1 & 2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

Comprobamos que tiene inversa y la calculamos.

$$\left|C-AB^T\right|=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix}=3\neq 0.\text{Tiene inversa.}$$

$$\left(C-AB^T\right)^{-1}=\frac{Adj\left(C-AB^T\right)^T}{\left|C-AB^T\right|}=\frac{Adj\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1/3\\ 0 & -1/3\end{bmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$CX=AB^TX+I\Rightarrow CX-AB^TX=I\Rightarrow\left(C-AB^T\right)X=I\Rightarrow X=\left(C-AB^T\right)^{-1}$$

Como ya hemos calculado la inversa de $C-AB^T$ sustituimos en la ecuación dicho valor.

$$X=\left(C-AB^T\right)^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1/3\\ 0 & -1/3\end{bmatrix}$$

c)

$$AB^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1 & 0\\ -1+2-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2^1I$$

$$\left(AB^T\right)^2=AB^T\cdot AB^T=2^1I\cdot 2^1I=4I=2^2I$$

$$\left(AB^T\right)^3=\left(AB^T\right)^2\cdot AB^T=4I\cdot 2I=8I=2^3I$$

....

$$\left(AB^T\right)^n=2^nI$$

Problema 2. Dada la matriz

$$A=\begin{bmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinar:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro real m. (4 puntos)

b) La matriz inversa de A en el caso $m=2$. (4 puntos)

c) El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8. (2 puntos)

a) Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{vmatrix}=m^3-4m^2(m-1)-2m^2=m^3-4m^3+4m^2-2m^2=-3m^3+2m^2$$

$$|A|=0\Rightarrow -3m^3+2m^2=0\Rightarrow m^2(-3m+2)=0\Rightarrow \begin{cases} \boxed{m=0} \\ -3m+2=0\rightarrow \boxed{m=\dfrac{2}{3}} \end{cases}$$

Tenemos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $m\neq 0$ y $m\neq \frac{2}{3}$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.

CASO 2. Si $m=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz A queda $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. La matriz A tiene rango 1 pues solo hay una columna con elementos no nulos.

CASO 3. Si $m=\frac{2}{3}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz A queda $A=\begin{bmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -4/3 & 4/9 & 1 \\ 0 & 4/3 & 1 \end{bmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ -4/3 & 4/9 \end{bmatrix}$ comprobamos que su determinante es no nulo y por tanto el rango de A es 2.

$$\begin{vmatrix} 2/3 & 0 \\ -4/3 & 4/9 \end{vmatrix}=\frac{8}{27}\neq 0$$

b) Para $m = 2$ el rango de A es 3 y por tanto tiene inversa.

La matriz A queda $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Calculamos su inversa.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}}{8-16-8}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{-1}{16}\begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}}$$

c) Se debe cumplir que $|2A|=8 \Rightarrow 2^3|A|=8 \Rightarrow |A|=\frac{8}{8}=1$.

Como hemos calculado el determinante de A en el apartado a) nos queda la igualdad:

$$\left.\begin{array}{l} |A|=-3m^3+2m^2 \\ |A|=1 \end{array}\right\} \Rightarrow -3m^3+2m^2=1 \Rightarrow -3m^3+2m^2-1=0$$

Resolvemos la ecuación utilizando el método de Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & & -3 & -1 & -1 \\ \hline & -3 & -1 & -1 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow -3m^3+2m^2-1=(m-1)\left(-3m^2-m-1\right)$$

$$-3m^2-m-1=0 \Rightarrow m=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-12}}{-6}=\frac{1\pm\sqrt{-11}}{-6}=\text{No existe}$$

Tenemos que $m = 1$ es la única solución de la ecuación $-3m^3+2m^2-1=0$

Se cumple que $|2A|=8$ para $m = 1$.

Problema 3. Dadas las rectas $r:\begin{cases} x = z-1 \\ y = 2-3z \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x = 4-5z \\ y = 4z-3 \end{cases}$.

a) Indicar justificadamente la posición relativa de r y s. (5 puntos)
b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s. (5 puntos)

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r:\begin{cases} x = z-1 \\ y = 2-3z \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x = -1+t \\ y = 2-3t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} P_r(-1,2,0) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,-3,1) \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} x = 4-5z \\ y = 4z-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4-5t \\ y = -3+4t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} Q_s(4,-3,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (-5,4,1) \end{cases}$$

Observamos que los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales por lo que las rectas ni son coincidentes ni paralelas.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-3,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-5,4,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{-5} \neq \frac{-3}{4} \neq \frac{1}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Comprobamos si se anula o no el producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (4,-3,0)-(-1,2,0) = (5,-5,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-3,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-5,4,1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (5,-5,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -15+25-20+5 = -5 \neq 0$$

Como $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = -5 \neq 0$ las rectas r y s se cruzan (no son coplanarias).

b) Hallamos el plano π que pasa por el origen O(0, 0, 0) y contiene a la recta r. Y el plano π´ que pasa por el origen y contiene a la recta s.
La intersección de los dos planos es la recta l buscada.

$$\pi:\begin{cases} O(0,\ 0,\ 0) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{OP_r} = (-1,2,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{u_r} = (1,-3,1) \end{cases} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x+3z-2z+y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x+y+z=0}$$

$$\pi´:\begin{cases} O(0,\ 0,\ 0) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{OQ_s} = (4,-3,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{v_s} = (-5,4,1) \end{cases} \Rightarrow \pi´:\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & -3 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x+16z-15z-4y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi´: -3x-4y+z=0}$$

La recta l tiene ecuación $l:\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ -3x-4y+z=0 \end{cases}$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Debemos de hallar un punto A de la recta r y otro B de la recta s tal que el origen O y estos dos puntos estén alineados. La recta que une estos tres puntos es la recta l que pasa por el origen y corta a r y s.

$$A \in r: \begin{cases} x = -1+\alpha \\ y = 2-3\alpha \Rightarrow A(-1+\alpha, 2-3\alpha, \alpha) \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$B \in s: \begin{cases} x = 4-5\beta \\ y = -3+4\beta \Rightarrow B(4-5\beta, -3+4\beta, \beta) \\ z = \beta \end{cases}$$

Para que A, B y O estén alineados los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (-1+\alpha, 2-3\alpha, \alpha) - (0,0,0) = (-1+\alpha, 2-3\alpha, \alpha) \\ \overrightarrow{OB} = (4-5\beta, -3+4\beta, \beta) - (0,0,0) = (4-5\beta, -3+4\beta, \beta) \\ \overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1+\alpha}{4-5\beta} = \frac{2-3\alpha}{-3+4\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-1+\alpha}{4-5\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta} \to \beta(-1+\alpha) = \alpha(4-5\beta) \to -\beta+\alpha\beta = 4\alpha - 5\alpha\beta \\ \dfrac{2-3\alpha}{-3+4\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta} \to \beta(2-3\alpha) = \alpha(-3+4\beta) \to 2\beta - 3\alpha\beta = -3\alpha + 4\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\beta - 4\alpha + 6\alpha\beta = 0 \to \beta(-1+6\alpha) = 4\alpha \to \beta = \dfrac{4\alpha}{-1+6\alpha} \Rightarrow \\ 2\beta + 3\alpha - 7\alpha\beta = 0 \to 2\beta + 3\alpha - 7\alpha\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\frac{4\alpha}{-1+6\alpha} + 3\alpha - 7\alpha\frac{4\alpha}{-1+6\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{8\alpha + 3\alpha(-1+6\alpha) - 28\alpha^2}{-1+6\alpha} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8\alpha - 3\alpha + 18\alpha^2 - 28\alpha^2}{-1+6\alpha} = 0 \Rightarrow -10\alpha^2 + 5\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5\alpha(2\alpha-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow \beta = \dfrac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A(-1,2,0) \\ B(4,-3,0) \end{cases} \text{¡No es posible!} \\ \text{Estos puntos no están alineados con el O(0,0,0).} \\ \text{No se cumple la igualdad inicial } \dfrac{-1+\alpha}{4-5\beta} = \dfrac{2-3\alpha}{-3+4\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta} \\ o \\ 2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \beta = \dfrac{2}{-1+3} = 1 \Rightarrow \begin{cases} A(-1/2, 1/2, 1/2) \\ B(-1,1,1) \end{cases} \end{cases}$$

La única solución es la recta que pasa por O(0,0,0), $A(-1/2,1/2,1/2)$ y $B(-1,1,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} O(0,0,0) \in l \\ \overrightarrow{v_l} = \overrightarrow{OB} = (-1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{l : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Problema 4. Dados los planos $\pi_1 : 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2 : \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$, y la recta $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2. (3 puntos)
b) Calcular el punto P' que es simétrico al punto $P = (1,0,0)$ respecto del plano π_1. (4 puntos)
c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r. (3 puntos)

a) Hallamos el vector normal de cada plano.

$$\pi_1 : 2x - y - z + 4 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (2,-1,-1)$$

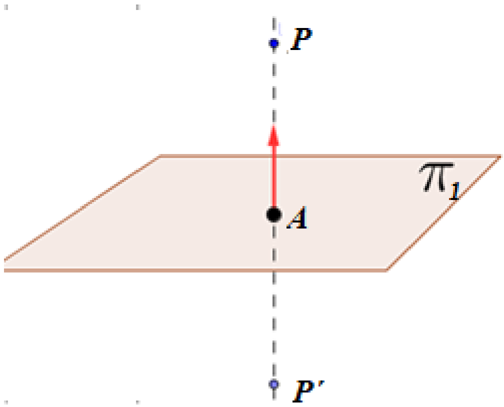
$$\pi_2 : \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + x + 1 + \beta \\ z = x + 1 - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 + x + \beta \\ \beta = x + 1 - z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 + x + x + 1 - z \Rightarrow \pi_2 : 2x - y - z + 3 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (2,-1,-1)$$

Como los vectores normales de los dos planos son iguales: $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n_2} = (2,-1,-1)$ los planos son paralelos o coincidentes.

Como tienen ecuaciones distintas $\left. \begin{array}{l} \pi_1 : 2x - y - z + 4 = 0 \\ \pi_2 : 2x - y - z + 3 = 0 \end{array} \right\}$ los planos son paralelos.

b)



Hallamos la recta s perpendicular al plano $\boldsymbol{\pi}_1$ que pasa por P(1, 0, 0).

$$\pi_1 : 2x - y - z + 4 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (2,-1,-1)$$

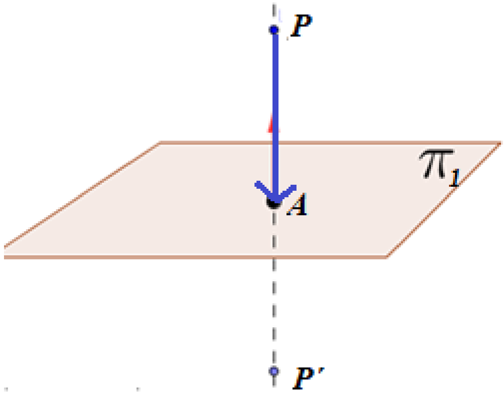
$$s : \begin{cases} P(1,0,0) \in s \\ \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{n_1} = (2,-1,-1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{s : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}}$$

Hallamos el punto A de corte de la recta s y el plano $\boldsymbol{\pi}_1$.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : 2x - y - z + 4 = 0 \\ s : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 2(1+2\lambda) - (-\lambda) - (\lambda) + 4 = 0 \Rightarrow 2 + 4\lambda + \lambda + \lambda + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1,1,1)}$$

El punto P´ simétrico de P respecto del plano **π**₁ se obtiene sumando al punto A el vector $\overrightarrow{PA}$.



$$\overrightarrow{PA} = (-1,1,1) - (1,0,0) = (-2,1,1)$$

$$\boxed{P´ = (-1,1,1) + (-2,1,1) = (-3,2,2)}$$

El punto simétrico es $P´(-3,2,2)$.

c) Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta *r*.

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow r : \begin{cases} P_r(1,0,2) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,2,-1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

Resolvemos el sistema planteado con sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : 2x - y - z + 4 = 0 \\ r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 2(1+\lambda) - 2\lambda - (2-\lambda) + 4 = 0 \Rightarrow 2 + 2\lambda - 2\lambda - 2 + \lambda + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -4 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 4 = -3 \\ y = 2(-4) = -8 \Rightarrow \boxed{Q(-3,-8,6)} \\ z = 2 - (-4) = 6 \end{cases}$$

El punto de corte entre el plano π_1 y la recta *r* existe y tiene coordenadas $Q(-3,-8,6)$.

Problema 5. Consideramos la función $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-4}$. Obtener:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. (1 punto)
b) Las asíntotas de la función. (2 puntos)
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. (3 puntos)
d) La primitiva de la función $f(x)$. (4 puntos)

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-4} \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

$$\text{Dominio } f(x)=\mathbb{R}-\{-2,+2\}$$

Punto de corte con eje de abscisas (*y = 0*)

$$\left.\begin{matrix} f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-4} \\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x^2+3}{x^2-4}=0 \Rightarrow x^2+3=0 \Rightarrow x^2=-3 \Rightarrow x=\sqrt{-3} \text{ ¡Imposible!}$$

La función no corta el eje de abscisas.

Punto de corte con el eje de ordenadas (*x = 0*)

$$\left.\begin{matrix} f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-4} \\ x=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{0^2+3}{0^2-4}=\frac{-3}{4} \Rightarrow \boxed{A\left(0,-\frac{3}{4}\right)}$$

El punto de corte con el eje de ordenadas es $A\left(0,\frac{-3}{4}\right)$.

b) Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{2^2+3}{2^2-4}=\frac{7}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical

¿ $x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{(-2)^2+3}{(-2)^2-4}=\frac{7}{0}=\infty$$

$x=-2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

$y=1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene, pues tiene una asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2-4)-2x(x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3-8x-2x^3-6x}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-14x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow -14x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de –2, 0 y +2.

En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = \frac{42}{(3^2-4)^2} = \frac{42}{25} > 0$.

La función crece en $(-\infty,-2)$.

En el intervalo $(-2,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{14}{((-1)^2-4)^2} = \frac{14}{9} > 0$.

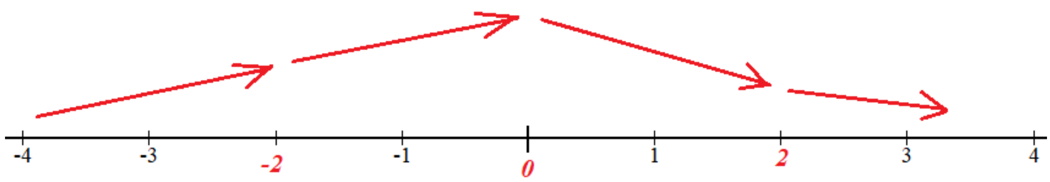
La función crece en $(-2,0)$.

En el intervalo $(0,+2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-14}{(1^2-4)^2} = \frac{-14}{9} < 0$. La función decrece en $(0,+2)$.

En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-42}{((-3)^2-4)^2} = \frac{-42}{25} < 0$.

La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y decrece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 0$

d)

$$\int f(x)dx = \int \frac{x^2+3}{x^2-4}dx = \ldots$$

$$\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{x^2-4+7}{x^2-4}=\frac{x^2-4}{x^2-4}+\frac{7}{x^2-4}=1+\frac{7}{x^2-4}$$

$$\frac{7}{x^2-4}=\frac{7}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}\Rightarrow\frac{7}{(x-2)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}\Rightarrow$$

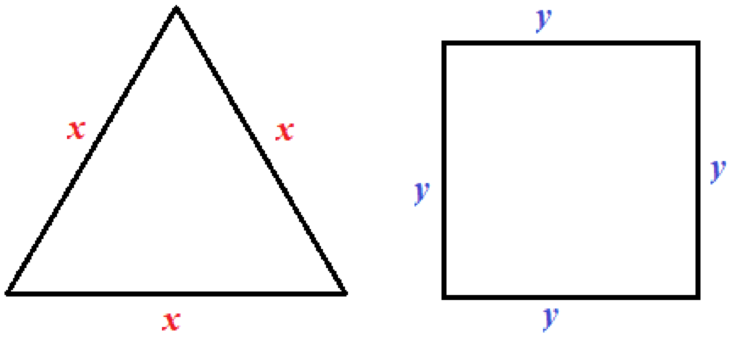
$$\Rightarrow 7=A(x+2)+B(x-2)\Rightarrow\begin{cases}x=2\to 7=4A\to A=\dfrac{7}{4}\\ x=-2\to 7=-4B\to B=\dfrac{-7}{4}\end{cases}\Rightarrow\frac{7}{x^2-4}=\frac{7/4}{x-2}-\frac{7/4}{x+2}$$

$$\frac{x^2+3}{x^2-4}=1+\frac{7/4}{x-2}-\frac{7/4}{x+2}$$

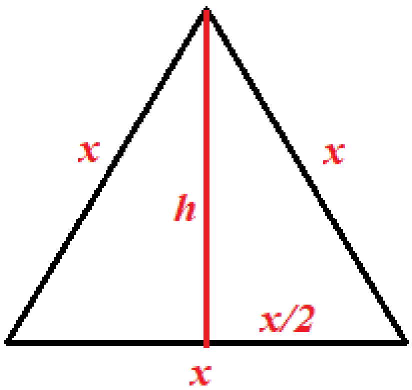
$$\ldots=\int 1+\frac{7/4}{x-2}-\frac{7/4}{x+2}\,dx=\int 1dx+\int\frac{7/4}{x-2}dx-\int\frac{7/4}{x+2}dx=x+\frac{7}{4}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{7}{4}\int\frac{1}{x+2}dx=$$

$$=\boxed{x+\frac{7}{4}\ln|x-2|-\frac{7}{4}\ln|x+2|+K}$$

Problema 6. Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.
a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo. (3 puntos)
b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima. (7 puntos)



a) Se corta el cable en dos partes, con una de ellas se construye un triangulo equilátero y con la otra un cuadrado. Tenemos que $3x+4y=240 \Rightarrow y=\frac{240-3x}{4}=60-\frac{3}{4}x$.



Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$h^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=x^2 \Rightarrow h^2+\frac{x^2}{4}=x^2 \Rightarrow h^2=x^2-\frac{x^2}{4}=\frac{3x^2}{4} \Rightarrow h=\sqrt{\frac{3x^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Llamamos *f(x)* a la suma de las áreas de triángulo y cuadrado que depende del valor de *x* comprendido entre 0 y 240.

$$f(x)=y^2+\frac{x\cdot h}{2}=\left(60-\frac{3}{4}x\right)^2+\frac{x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}=\left(\frac{240-3x}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

La función es $f(x)=\left(\frac{240-3x}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

b) Derivamos la función y la igualamos a cero.

$$f(x)=\left(\frac{240-3x}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2\left(\frac{240-3x}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}2x=\frac{-720+9x}{8}+\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$f'(x)=\frac{-720+9x}{8}+\frac{4\sqrt{3}}{8}x=\frac{9x+4\sqrt{3}x-720}{8}=\frac{\left(9+4\sqrt{3}\right)x-720}{8}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{\left(9+4\sqrt{3}\right)x-720}{8}=0\Rightarrow\left(9+4\sqrt{3}\right)x=720\Rightarrow\boxed{x=\frac{720}{9+4\sqrt{3}}}$$

Sustituimos este valor en la derivada segunda.

$$f'(x)=\frac{\left(9+4\sqrt{3}\right)x-720}{8}\Rightarrow f''(x)=\frac{9+4\sqrt{3}}{8}\Rightarrow f''\left(\frac{720}{9+4\sqrt{3}}\right)=\frac{9+4\sqrt{3}}{8}>0$$

Al ser positivo el valor de la derivada segunda la función presenta un valor mínimo para $x=\frac{720}{9+4\sqrt{3}}\simeq 45.203\,metros$.

Para construir el triángulo hará falta $3x=\frac{2160}{9+4\sqrt{3}}\simeq 135.609$ metros de cable.

El valor mínimo de la suma de las áreas de triangulo y cuadrado es:

$$f\left(\frac{720}{9+4\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{240-3\frac{720}{9+4\sqrt{3}}}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{720}{9+4\sqrt{3}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\frac{2160+960\sqrt{3}-2160}{9+4\sqrt{3}}}{4}\right)^2+\frac{518400\sqrt{3}}{4\left(9+4\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\left(\frac{960\sqrt{3}}{4\left(9+4\sqrt{3}\right)}\right)^2+\frac{129600\sqrt{3}}{\left(9+4\sqrt{3}\right)^2}=\left(\frac{240\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}\right)^2+\frac{129600\sqrt{3}}{\left(9+4\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{172800}{\left(9+4\sqrt{3}\right)^2}+\frac{129600\sqrt{3}}{\left(9+4\sqrt{3}\right)^2}=\boxed{\frac{172800+129600\sqrt{3}}{\left(9+4\sqrt{3}\right)^2}\simeq 1565.872\ m^2}$$