PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
- **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
- **b)** Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
- **c)** En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- **d)** Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- **e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) La Agencia Espacial Europea contará con un presupuesto de 2.4 millones de euros para financiar misiones sobre Observación de la Tierra y para financiar programas de Transporte Espacial. Cada misión supone una inversión de 200000 euros y cada programa, 100000 euros. Teniendo en cuenta que en la decisión final deben superarse los 2 millones de euros de inversión y el número de misiones debe ser al menos 4, pero no más de la mitad del número de programas, ¿cuántas misiones y cuántos programas se deben llevar a cabo para obtener el máximo de la función $F(x,y)=0.6x+0.4y$, con x misiones e y programas?

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$

a) **(1 punto)** Calcule A^2, A^3, A^4 y deduzca la expresión de A^n, con n un número natural.
b) **(0.5 puntos)** Razone si existe la inversa de la matriz B.
c) **(1 punto)** Razone si la ecuación matricial $B \cdot X = C$ tiene solución y resuélvala en caso de que sea posible.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax+b & si \quad x<1 \\ x^2-bx+a & si \quad x\geq 1\end{cases}$

a) **(0.5 puntos)** Halle el valor de b para que f sea continua en R.
b) **(0.5 puntos)** Para $b=\frac{1}{2}$, halle el valor de a para que f sea derivable en R.
c) **(0.7 puntos)** Para $a<0$ y $b=\frac{1}{2}$, estudie el crecimiento y halle las abscisas de los extremos de la función f.

d) **(0.8 puntos)** Para $a=0$ y $b=\frac{1}{2}$, represente la región del plano delimitada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. Calcule el área de dicha región.

EJERCICIO 4

La cotización en bolsa de una empresa en un determinado día viene expresada, en euros, por la función *c(t)*, con $t\in[0,24]$, medido en horas.

La variación instantánea de esta función es la derivada de *c*, que viene dada por $c'(t)=0.03t^2-0.9t+6$, con $t\in(0,24)$.

a) **(1.25 puntos)** Estudie los intervalos en los que la función *c* es creciente.
b) **(0.5 puntos)** Analice los puntos críticos de la función *c*, indicando en cuáles se alcanza el máximo y el mínimo relativos.
c) **(0.75 puntos)** Halle la expresión analítica de la función *c*, sabiendo que la cotización en bolsa de la empresa era de 50 euros en el instante inicial.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una empresa dedicada a la fabricación de coches lanza al mercado un nuevo modelo que fabrica en tres plantas diferentes, A, B y C. La planta A produce el 45% de los vehículos, la planta B el 21% y el resto los produce la planta C. Se ha detectado un defecto en la colocación del airbag, que afecta al 1% de los coches procedentes de la planta A, al 3% de los procedentes de la planta B y al 2% de los de la planta C. Se selecciona un coche al azar de este nuevo modelo.

a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso y proceda de la planta C?
b) **(1.25 puntos)** Si el coche elegido no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la planta A?

EJERCICIO 6

La probabilidad de que una persona sana se contagie de otra enferma por un virus es del 80% si coinciden en una reunión.

a) **(1 punto)** Si una persona enferma se reúne con dos personas sanas, teniendo en cuenta que contagiar a distintas personas son sucesos independientes entre sí, ¿cuál es la probabilidad de que se contagien las dos personas a la vez? ¿Cuál es la probabilidad de que se contagie alguna de ellas?
b) **(1.5 puntos)** Una prueba para detectar la enfermedad da el resultado correcto en el 90% de los casos cuando se le aplica a personas contagiadas y da falsos positivos en el 5% de los casos cuando se aplica a personas sanas. Si una persona sana se reúne con una enferma y resulta positivo en una prueba posterior, ¿qué probabilidad hay de que se haya contagiado en la reunión?

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Para un estudio acerca del uso del transporte público en una ciudad, se selecciona una muestra aleatoria de 500 individuos, obteniéndose que 175 de ellos lo usan.

a) **(1.5 puntos)** Halle un intervalo de confianza al 94% para estimar la proporción real de individuos que usan el transporte público en esa ciudad.
b) **(1 punto)** Manteniendo la proporción muestral, ¿cuántos individuos se deberían seleccionar como mínimo, para que, con un nivel de confianza del 97%, la proporción muestral difiera de la proporción real a lo sumo en un 2%?

EJERCICIO 8

La estatura de las mujeres de una población sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 7 cm.

a) **(1.5 puntos)** Se toma una muestra aleatoria de 300 mujeres de esta población, que da una estatura media de 168 cm. Construya un intervalo de confianza al 97% para estimar la estatura media de las mujeres de esta población.

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esta población para que, con un nivel de confianza del 94%, el error máximo cometido al estimar la estatura media de las mujeres de esa población sea inferior a 1.2 cm.

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) La Agencia Espacial Europea contará con un presupuesto de 2.4 millones de euros para financiar misiones sobre Observación de la Tierra y para financiar programas de Transporte Espacial. Cada misión supone una inversión de 200000 euros y cada programa, 100000 euros. Teniendo en cuenta que en la decisión final deben superarse los 2 millones de euros de inversión y el número de misiones debe ser al menos 4, pero no más de la mitad del número de programas, ¿cuántas misiones y cuántos programas se deben llevar a cabo para obtener el máximo de la función $F(x,y)=0.6x+0.4y$, con x misiones e y programas?

Sea x = "nº de misiones de Observación de la Tierra", y = "nº de programas de Transporte Espacial".

La función objetivo que deseamos maximizar es $F(x,y)=0.6x+0.4y$.

El coste de todo es de $200000x+100000y$.

Las restricciones son:

"La Agencia Espacial Europea contará con un presupuesto de 2.4 millones de euros" → $200000x+100000y\le 2400000$

"En la decisión final deben superarse los 2 millones de euros de inversión" → $200000x+100000y\ge 2000000$

"El número de misiones debe ser al menos 4" → $x\ge 4$

"El número de misiones no debe ser más de la mitad del número de programas" → $x\le \frac{y}{2}$

Las cifras deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 200000x+100000y\le 2400000 \\ 200000x+100000y\ge 2000000 \\ x\ge 4 \\ x\le \dfrac{y}{2} \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y\le 24 \\ 2x+y\ge 20 \\ x\ge 4 \\ y\ge 2x \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+y=24$

x	$y=24-2x$
4	16
6	12

$2x+y=20$

x	$y=20-2x$
4	12
5	10

$x=4$

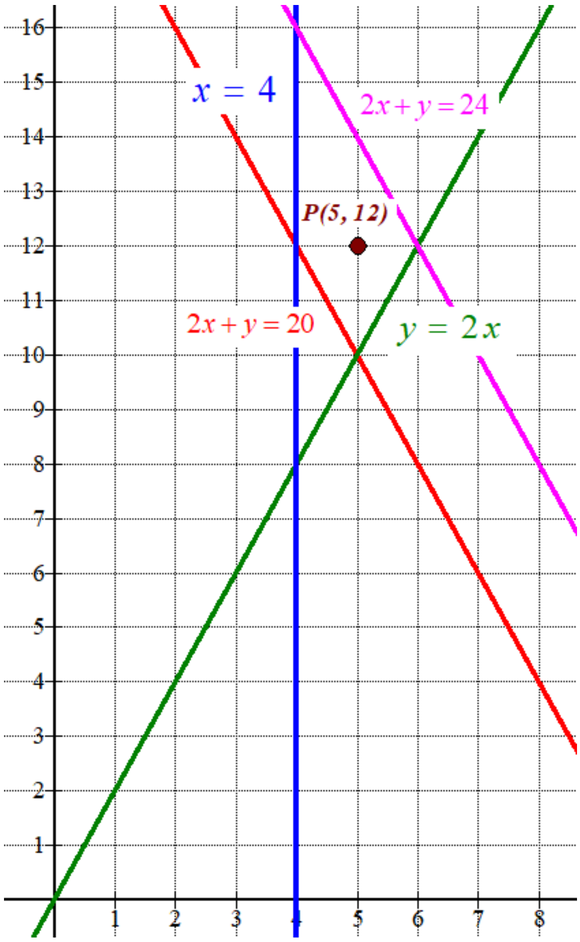
$x=4$	y
4	12
4	16

$y=2x$

x	$y=2x$
5	10
6	12

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

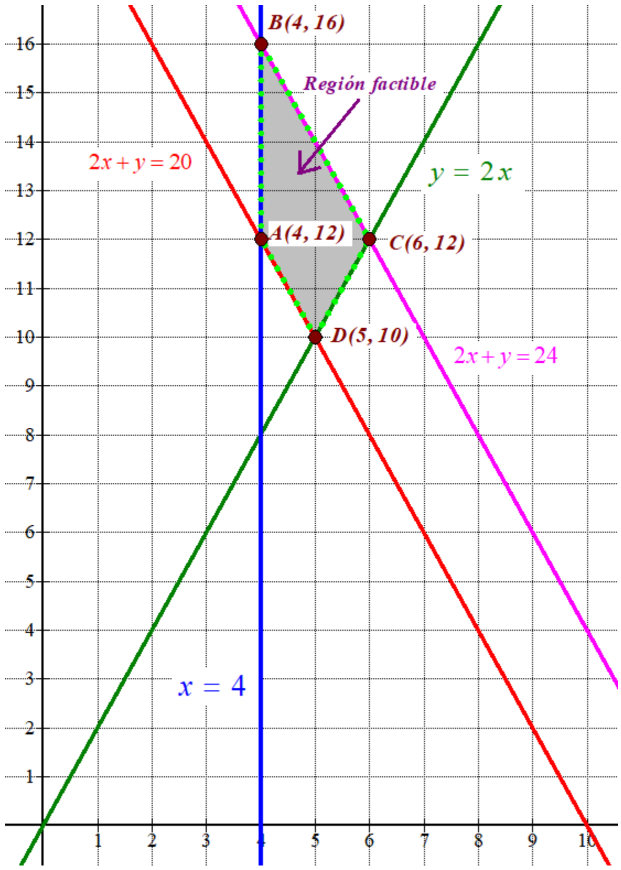


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+y\le 24 \\ 2x+y\ge 20 \\ x\ge 4 \\ y\ge 2x \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es una región del primer cuadrante que está por debajo de la recta rosa y por encima de la recta roja y verde, a la derecha de la recta vertical azul.

Comprobamos que el punto P(5, 12) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10+12\le 24 \\ 10+12\ge 20 \\ 5\ge 4 \\ 12\ge 10 \\ 5\ge 0;\ 12\ge 0 \end{array}\right\} \textbf{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible son A(4,12), B(4, 16), C(6, 12) y D(5, 10)

Para obtener el valor máximo de $F(x,y) = 0.6x + 0.4y$ en la región factible valoramos la función en cada vértice.

A(4, 12) → $F(4,12) = 2.4 + 4.8 = 7.2$
B(4, 16) → $F(4,16) = 2.4 + 6.4 = 8.8$ ¡Máximo!
C(6, 12) → $F(6,12) = 3.6 + 4.8 = 8.4$
D(5, 10) → $F(5,10) = 3 + 4 = 7$

El valor máximo es 8.8 y se alcanza en el vértice B(4, 16).
Para obtener el máximo de la función $F(x,y) = 0.6x + 0.4y$ hay que realizar 4 misiones y 16 programas.

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$

a) **(1 punto)** Calcule A^2, A^3, A^4 y deduzca la expresión de A^n, con n un número natural.
b) **(0.5 puntos)** Razone si existe la inversa de la matriz B.
c) **(1 punto)** Razone si la ecuación matricial $B \cdot X = C$ tiene solución y resuélvala en caso de que sea posible.

a) Calculamos las potencias sucesivas de A y buscamos una regularidad.

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1&0&1+1\\0&1&0\\1+1&0&1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^1&0&2^1\\0&1&0\\2^1&0&2^1\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+2&0&2+2\\0&1&0\\2+2&0&2+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&0&4\\0&1&0\\4&0&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^2&0&2^2\\0&1&0\\2^2&0&2^2\end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix}2^{3-1}&0&2^{3-1}\\0&1&0\\2^{3-1}&0&2^{3-1}\end{pmatrix} =$$

$$A^4 = A^3\cdot A = \begin{pmatrix}4&0&4\\0&1&0\\4&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+4&0&4+4\\0&1&0\\4+4&0&4+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8&0&8\\0&1&0\\8&0&8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^3&0&2^3\\0&1&0\\2^3&0&2^3\end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix}2^{4-1}&0&2^{4-1}\\0&1&0\\2^{4-1}&0&2^{4-1}\end{pmatrix}$$

....

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}}$$

b) La inversa de la matriz B existe si su determinante es no nulo.

$$|B| = \begin{vmatrix}1&0&2\\1&1&-1\\2&1&0\end{vmatrix} = 2-4+1 = -1 \neq 0$$

La matriz B tiene inversa.

c) La ecuación matricial $B \cdot X = C$ tiene solución si la matriz B tiene inversa.

$$B \cdot X = C \Rightarrow X = B^{-1} \cdot C$$

Como la matriz B hemos comprobado que tiene inversa la ecuación tiene solución. Hallamos la inversa de B y después la matriz X como solución de la ecuación.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2-4+1 = -1 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de X.

$$B \cdot X = C \Rightarrow X = B^{-1} \cdot C$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+6+2 \\ 2-12-3 \\ 1-3-1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax+b & si & x<1 \\ x^2-bx+a & si & x\geq 1 \end{cases}$

a) **(0.5 puntos)** Halle el valor de *b* para que *f* sea continua en R.

b) **(0.5 puntos)** Para $b=\frac{1}{2}$, halle el valor de *a* para que *f* sea derivable en R.

c) **(0.7 puntos)** Para $a<0$ y $b=\frac{1}{2}$, estudie el crecimiento y halle las abscisas de los extremos de la función *f*.

d) **(0.8 puntos)** Para $a=0$ y $b=\frac{1}{2}$, represente la región del plano delimitada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las rectas *x = 0* y *x = 2*. Calcule el área de dicha región.

a) Para que sea continua debe serlo en *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} ax+b=a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2-bx+a=1-b+a \\ f(1)=1-b+a \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=1-b+a \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}}$$

El valor buscado es $b=\frac{1}{2}$.

b) Para $b=\frac{1}{2}$ la función queda $f(x)=\begin{cases} ax+\frac{1}{2} & si & x<1 \\ x^2-\frac{1}{2}x+a & si & x\geq 1 \end{cases}$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$ y su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} a & si & x<1 \\ 2x-\frac{1}{2} & si & x>1 \end{cases}$$

La función debe ser derivable en *x = 1*, por lo que las derivadas laterales en *x = 1* deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} a=a \\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x-\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ f'(1^-)=f'(1^+) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=\frac{3}{2}}$$

El valor buscado es $a=\frac{3}{2}$.

c) Para $a<0$ y $b=\frac{1}{2}$ la función queda $f(x)=\begin{cases} ax+\frac{1}{2} & si \quad x<1 \\ x^2-\frac{1}{2}x+a & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

Su derivada en $\mathbb{R}-\{1\}$ es $f'(x)=\begin{cases} a & si \quad x<1 \\ 2x-\frac{1}{2} & si \quad x>1 \end{cases}$

Como a < 0 entonces la función es decreciente en el intervalo $(-\infty,1)$.

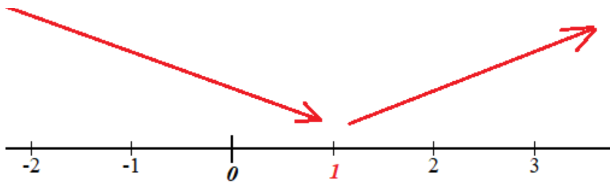
En el intervalo $(1,+\infty)$ buscamos cuando se anula la derivada.

$$2x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{4} \notin (1,+\infty)$$

Por lo que la derivada no cambia de signo en el intervalo $(1,+\infty)$.

Como $f'(2)=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}>0$ la derivada siempre es positiva en $(1,+\infty)$ y la función crece en dicho intervalo.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,1)$ y crece en $(1,+\infty)$. La función tiene un mínimo relativo en x = *1*.



d) Para $a=0$ y $b=\frac{1}{2}$ la función queda $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad x<1 \\ x^2-\frac{1}{2}x & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

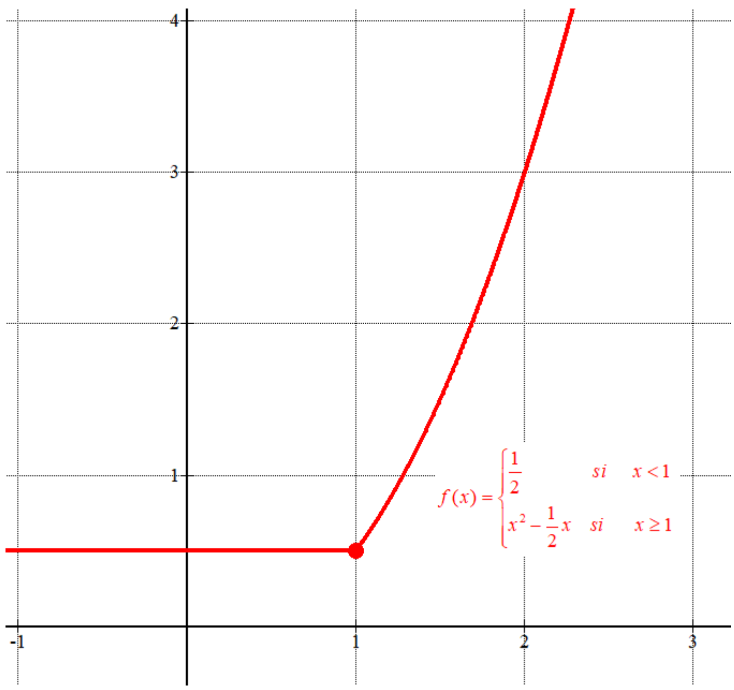
Hacemos una tabla de valores.

Si $x<1$

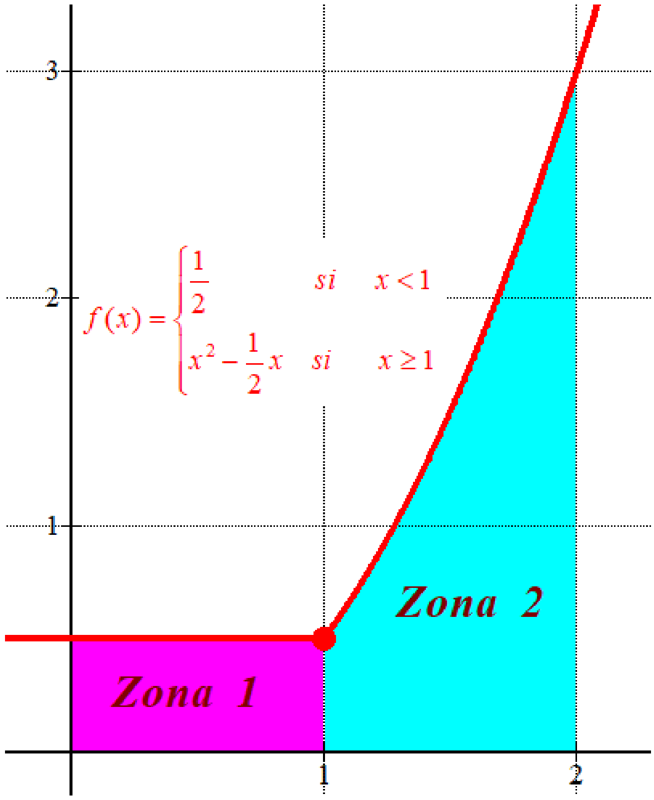
x	$f(x)=\frac{1}{2}$
-1	0.5
0	0.5
0.5	0.5

Si $x\geq 1$

x	$f(x)=x^2-\frac{1}{2}x$
1	$1/2$
2	3
4	14



La región de la cual queremos hallar el área la dividimos en dos partes (una en rosa y otra en azul):



La zona 1 es un rectángulo de base 1 y altura 0.5 por lo que su área vale $1 \cdot 0.5 = 0.5\ u^2$.
La zona 2 está limitada por una curva y determinamos su área usando el cálculo integral.

$$\acute{A}rea\ Zona\ 2=\int_1^2 x^2-\frac{1}{2}xdx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_1^2=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4}x^2\right]_1^2$$

$$=\left[\frac{2^3}{3}-\frac{1}{4}2^2\right]-\left[\frac{1^3}{3}-\frac{1}{4}1^2\right]=\frac{8}{3}-1-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{19}{12}u^2}$$

El área de la región pedida es $0.5+\frac{19}{12}=\boxed{\frac{25}{12}\simeq 2.083\ u^2}$.

EJERCICIO 4

La cotización en bolsa de una empresa en un determinado día viene expresada, en euros, por la función *c(t)*, con $t \in [0,24]$, medido en horas.

La variación instantánea de esta función es la derivada de *c*, que viene dada por $c'(t) = 0.03t^2 - 0.9t + 6$, con $t \in (0,24)$.

a) **(1.25 puntos)** Estudie los intervalos en los que la función *c* es creciente.
b) **(0.5 puntos)** Analice los puntos críticos de la función *c*, indicando en cuáles se alcanza el máximo y el mínimo relativos.
c) **(0.75 puntos)** Halle la expresión analítica de la función *c*, sabiendo que la cotización en bolsa de la empresa era de 50 euros en el instante inicial.

a) Averiguamos donde se anula la derivada:

$$c'(t) = 0 \Rightarrow 0.03t^2 - 0.9t + 6 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{multiplico por 100} \\ \text{y divido por 3} \end{array} \right\} \Rightarrow t^2 - 30t + 200 = 0 \Rightarrow$$

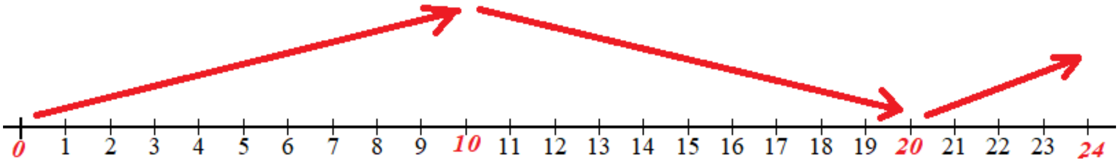
$$\Rightarrow t = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(200)}}{2} = \frac{30 \pm 10}{2} = \begin{cases} \dfrac{30+10}{2} = 20 = t \in (0,24) \\ \dfrac{30-10}{2} = 10 = t \in (0,24) \end{cases}$$

Estudiamos la evolución del signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

En el intervalo $(0,10)$ tomamos *t = 5* y la derivada vale
$c'(5) = 0.03 \cdot 5^2 - 0.9 \cdot 5 + 6 = 2.25 > 0$. La función crece en $(0,10)$.
En el intervalo $(10,20)$ tomamos *t = 15* y la derivada vale
$c'(15) = 0.03 \cdot 15^2 - 0.9 \cdot 15 + 6 = -0.75 < 0$. La función decrece en $(10,20)$
En el intervalo $(20,24)$ tomamos *t = 21* y la derivada vale
$c'(21) = 0.03 \cdot 21^2 - 0.9 \cdot 21 + 6 = 0.33 > 0$. La función crece en $(20,24)$

La función *c* es creciente en $(0,10) \cup (20,24)$

b) Los puntos críticos son *t = 10* y *t = 20*.
Por lo visto en el apartado anterior en *t = 10* hay un máximo relativo y en *t = 20* hay un mínimo relativo.



c) Hallamos la integral de la derivada y obtendremos la función salvo un parámetro.

$$c(t) = \int c'(t)\,dt = \int 0.03t^2 - 0.9t + 6dt = \frac{0.03}{3}t^3 - \frac{0.9}{2}t^2 + 6t = 0.01t^3 - 0.45t^2 + 6 + K$$

Como *c(0) = 50* lo sustituimos en la función y hallamos el valor de K.

$$\left. \begin{array}{l} c(t) = 0.01t^3 - 0.45t^2 + 6t + K \\ c(0) = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow 50 = 0.01 \cdot 0^3 - 0.45 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 + K \Rightarrow \boxed{K = 50}$$

La función de cotización es $c(t) = 0.01t^3 - 0.45t^2 + 6t + 50$

BLOQUE C

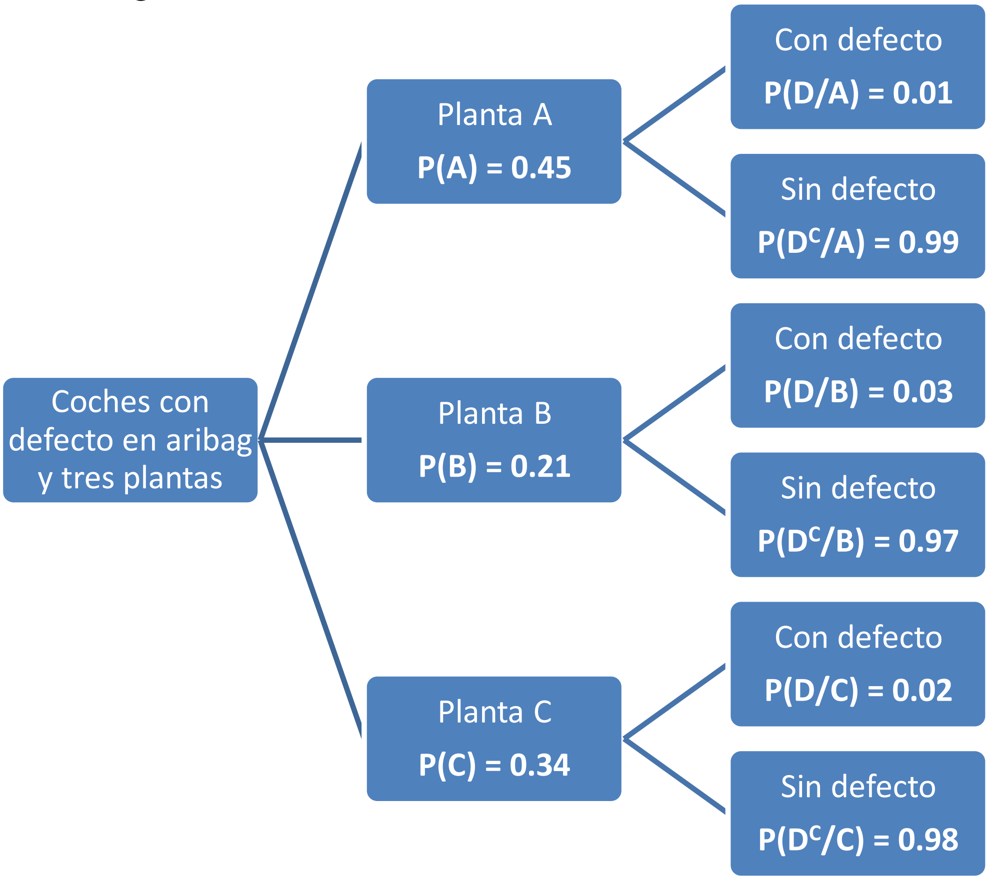
EJERCICIO 5

Una empresa dedicada a la fabricación de coches lanza al mercado un nuevo modelo que fabrica en tres plantas diferentes, A, B y C. La planta A produce el 45% de los vehículos, la planta B el 21% y el resto los produce la planta C. Se ha detectado un defecto en la colocación del airbag, que afecta al 1% de los coches procedentes de la planta A, al 3% de los procedentes de la planta B y al 2% de los de la planta C. Se selecciona un coche al azar de este nuevo modelo.

a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso y proceda de la planta C?

b) **(1.25 puntos)** Si el coche elegido no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la planta A?

Llamamos A, B y C a los sucesos "coche fabricado en la planta A, B o C" respectivamente.
Y llamamos D = "Tener un defecto en el airbag".
Realizamos un diagrama de árbol.



a) $P\left(D^C \cap C\right) = P(C)P\left(D^C / C\right) = 0.34 \cdot 0.98 = \boxed{0.3332}$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P\left(A / D^C\right) = \frac{P\left(A \cap D^C\right)}{P\left(D^C\right)} = \frac{P(A)P\left(D^C / A\right)}{P(A)P\left(D^C / A\right) + P(B)P\left(D^C / B\right) + P(C)P\left(D^C / C\right)} =$$

$$= \frac{0.45 \cdot 0.99}{0.45 \cdot 0.99 + 0.21 \cdot 0.97 + 0.34 \cdot 0.98} = \boxed{\frac{4455}{9824} \simeq 0.453}$$

EJERCICIO 6

La probabilidad de que una persona sana se contagie de otra enferma por un virus es del 80% si coinciden en una reunión.

a) **(1 punto)** Si una persona enferma se reúne con dos personas sanas, teniendo en cuenta que contagiar a distintas personas son sucesos independientes entre sí, ¿cuál es la probabilidad de que se contagien las dos personas a la vez? ¿Cuál es la probabilidad de que se contagie alguna de ellas?

b) **(1.5 puntos)** Una prueba para detectar la enfermedad da el resultado correcto en el 90% de los casos cuando se le aplica a personas contagiadas y da falsos positivos en el 5% de los casos cuando se aplica a personas sanas. Si una persona sana se reúne con una enferma y resulta positivo en una prueba posterior, ¿qué probabilidad hay de que se haya contagiado en la reunión?

a) Llamamos C1 y C2 a que se contagien la persona 1 y la persona 2, respectivamente.
Sabemos que $P(C1)=P(C2)=0.8$ y que $P\left(C1^C\right)=P\left(C2^C\right)=1-0.8=0.2$

¿cuál es la probabilidad de que se contagien las dos personas a la vez?

Nos piden calcular $P(C1\cap C2)$. Como son sucesos independientes tenemos:

$$P(C1\cap C2)=P(C1)P(C2)=0.8\cdot 0.8=\boxed{0.64}$$

¿Cuál es la probabilidad de que se contagie alguna de ellas?

Nos piden calcular $P(C1\cup C2)$.

Este es el suceso contrario a no contagiarse ninguna de ellas.

$$P(C1\cup C2)=1-P\left(C1^C\cap C2^C\right)=\left\{C1^C \text{ y } C2^C \text{ son independientes}\right\}=$$

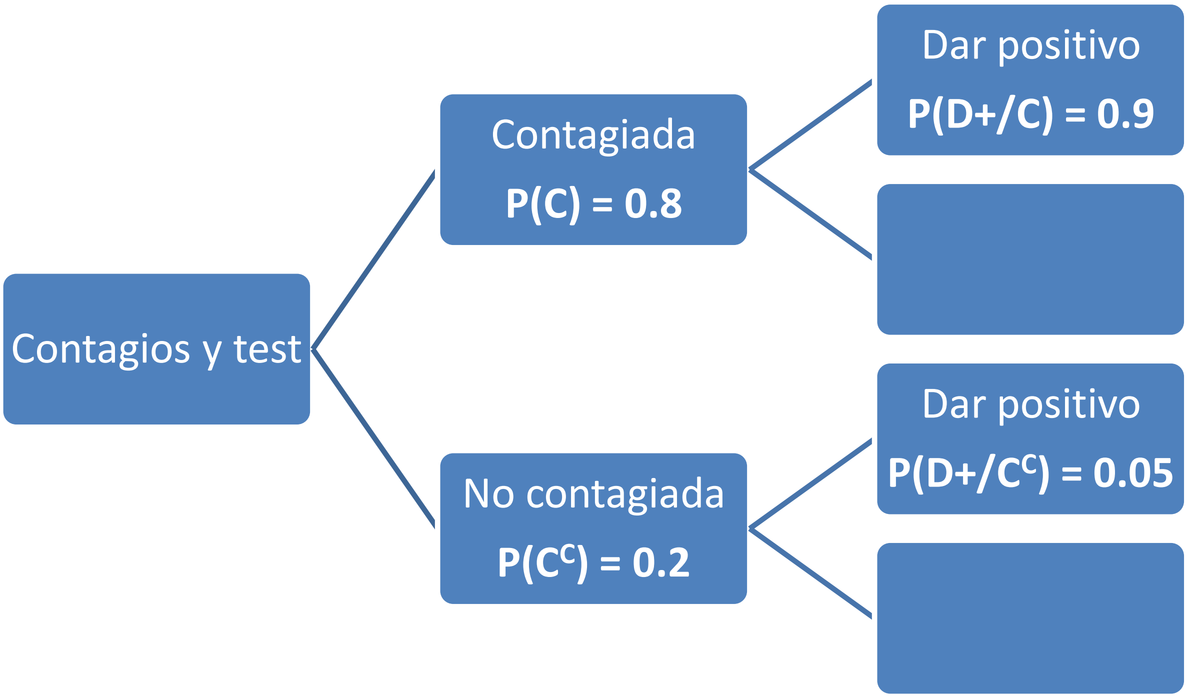
$$=1-P\left(C1^C\right)P\left(C2^C\right)=1-0.2\cdot 0.2=1-0.04=\boxed{0.96}$$

También se puede calcular directamente.

$$P(C1\cup C2)=P(C1)+P(C2)-P(C1\cap C2)=0.8+0.8-0.64=\boxed{0.96}$$

b) Llamamos C al suceso "Ser contagiado" y D+ al suceso "Dar positivo en test"
Sabemos que $P(D+/C)=0.9$ y que $P\left(D+/C^C\right)=0.05$.

Realizamos un diagrama de árbol de la situación planteada.



Nos piden calcular $P(C/D+)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes. También utilizaremos el teorema de la probabilidad total para calcular $P(D+)$.

$$P(C/D+)=\frac{P(C\cap D+)}{P(D+)}=\frac{P(C)P(D+/C)}{P(C)P(D+/C)+P(C^C)P(D+/C^C)}=$$

$$=\frac{0.8\cdot 0.9}{0.8\cdot 0.9+0.2\cdot 0.05}=\boxed{\frac{72}{73}\simeq 0.9863}$$

Es muy probable que se haya contagiado en la reunión.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Para un estudio acerca del uso del transporte público en una ciudad, se selecciona una muestra aleatoria de 500 individuos, obteniéndose que 175 de ellos lo usan.

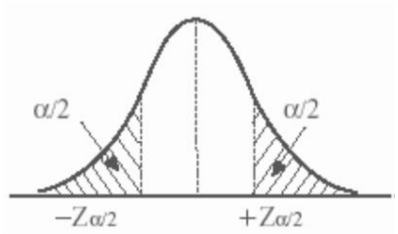
a) **(1.5 puntos)** Halle un intervalo de confianza al 94% para estimar la proporción real de individuos que usan el transporte público en esa ciudad.

b) **(1 punto)** Manteniendo la proporción muestral, ¿cuántos individuos se deberían seleccionar como mínimo, para que, con un nivel de confianza del 97%, la proporción muestral difiera de la proporción real a lo sumo en un 2%?

n = 500. $pr = \frac{175}{500} = 0.35$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.35 = 0.65$

a) Con un nivel de confianza del 94 % tenemos

$$1 - \propto = 0.94 \rightarrow \propto = 0.06 \rightarrow \propto/2 = 0.03 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0.97 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.88}$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{500}} = 0.0401$$

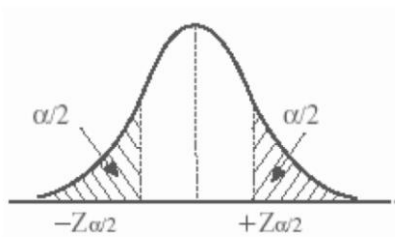
El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.35 - 0.0401,\quad 0.35 + 0.0401) = (0.3099,\ 0.3901)$$

b) ¿n?

Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1 - \propto = 0.97 \rightarrow \propto = 0.03 \rightarrow \propto/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$



El error debe ser inferior a 0.02.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{n}} = 0.02 \Rightarrow \frac{0.02}{2.17} = \sqrt{\frac{0.35 \cdot 0.65}{n}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{0.02}{2.17}\right)^2 = \frac{0.35 \cdot 0.65}{n} \Rightarrow n = \frac{0.35 \cdot 0.65}{\left(\frac{0.02}{2.17}\right)^2} \simeq 2678.187$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 2679 individuos.

EJERCICIO 8

La estatura de las mujeres de una población sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 7 cm.

a) **(1.5 puntos)** Se toma una muestra aleatoria de 300 mujeres de esta población, que da una estatura media de 168 cm. Construya un intervalo de confianza al 97% para estimar la estatura media de las mujeres de esta población.

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esta población para que, con un nivel de confianza del 94%, el error máximo cometido al estimar la estatura media de las mujeres de esa población sea inferior a 1.2 cm.

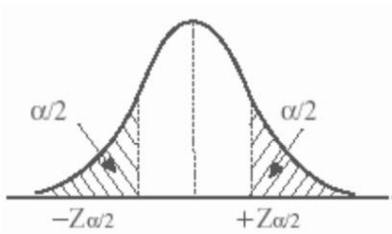
X = La estatura de las mujeres de una población.

X = N(μ, 7)

a) n = 300. La media es $\overline{x} = 168$

Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{7}{\sqrt{300}} = 0.877$$

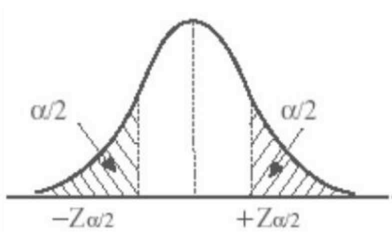
El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(168 - 0.877, \quad 168 + 0.877\right) = \left(167.123, 168.877\right)$$

b) ¿n?

Con un nivel de confianza del 94 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.94 \rightarrow \alpha = 0.06 \rightarrow \alpha/2 = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.97 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.88$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.2 = 1.88 \cdot \frac{7}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{1.2}{1.88} = \frac{7}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{7 \cdot 1.88}{1.2} \Rightarrow n = \left(\frac{7 \cdot 1.88}{1.2}\right)^2 \simeq 120.268$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 121 mujeres.