PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Un laboratorio farmacéutico tiene una línea de producción con dos medicamentos A y B, con marca comercial y genérico respectivamente, de los cuales, entre los dos como máximo puede fabricar 10 unidades a la hora. Desde el punto de vista del rendimiento, se han de producir al menos 4 unidades por hora entre los dos y por motivos de política sanitaria, la producción de A ha de ser como mucho 2 unidades más que la de B.
Cada unidad de tipo A que vende le produce un beneficio de 60 euros, mientras que cada unidad de tipo B le produce un beneficio de 25 euros. Si se vende todo lo que se produce, determine las unidades de cada medicamento que deberá fabricar por hora para maximizar su beneficio y obtenga el valor de dicho beneficio.

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) **(0.5 puntos)** Calcule el valor del parámetro a para que la matriz A no tenga inversa.
b) **(1.25 puntos)** Para $a = 3$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - X \cdot B = C$.
c) **(0.75 puntos)** Para $a = 3$, compruebe que $A^2 = 11 \cdot A$ y exprese A^8 en función de la matriz A.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & si \quad -2 \le x < 0 \\ (x-1)^2 & si \quad 0 \le x \le 2 \end{cases}$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en todo su dominio.
b) **(0.7 puntos)** Calcule los extremos de la función f.
c) **(0.8 puntos)** Represente el recinto que encierra la gráfica de f, las rectas $x = -1$, $x = 1$ y el eje OX. Calcule el área de dicho recinto.

EJERCICIO 4

a) **(2 puntos)** Sea f una función de la que sabemos que la gráfica de su derivada, $f\,'$, es una parábola con vértice en el punto (0, 8) que corta al eje de abscisas en los puntos (–4, 0) y (4, 0).
1. Dibuje la gráfica de $f\,'$.

2. A partir de dicha gráfica, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, así como las abscisas de los extremos relativos de *f*.
3. Sabiendo que la gráfica de *f* pasa por el origen de coordenadas, calcule la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 0$.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la derivada de la función $g(x) = \left(-3 + x^2\right) \cdot e^{2x-1}$.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Un equipo andaluz de baloncesto jugó en una temporada un 40% de los partidos en casa y el resto fuera. De los partidos que jugó en casa, obtuvo un 60% de victorias y el resto fueron derrotas, mientras que de los que jugó fuera, obtuvo un 30% de victorias y el resto derrotas. Se elige un partido de este equipo al azar.

a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que el partido acabase en victoria.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el partido haya sido jugado en casa, sabiendo que el resultado final fue una derrota.

c) **(0.25 puntos)** Si además se sabe que el 10% de las victorias obtenidas en casa y el 20% de las obtenidas fuera se produjeron tras una prórroga, calcule la probabilidad de que el partido acabase en victoria y que además esa victoria haya sido tras una prórroga.

EJERCICIO 6

Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo espacio muestral con $P\left(A^C\right) = 0.4$ y $P\left(A \cap B^C\right) = 0.12$

a) **(0.5 puntos)** Calcule $P(A)$ y $P(A \cap B)$.

b) **(0.5 puntos)** Determine $P(B)$ para que *A* y *B* sean independientes.

c) **(1.5 puntos)** Si $P\left(B^C\right) = 0.2$, calcule $P(A \cup B)$, $P\left(A^C \cup B^C\right)$ y $P\left(A / B^C\right)$.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1 punto)** En una población constituida por los números naturales del 1 al 9, ¿cuántas muestras de tamaño 2 se pueden formar por muestreo aleatorio simple? Si se elige al azar una de esas muestras, ¿cuál es la probabilidad de que el valor medio de los dos números de esa muestra sea 5?

b) **(1.5 puntos)** Para estimar la proporción de andaluces contagiados por una enfermedad infecciosa en un momento determinado, se ha tomado una muestra de 10000 personas, resultando que 500 de ellas estaban infectadas.

1. Con ese dato, establezca un intervalo, al 97% de confianza, para la proporción real de infectados en la población andaluza.
2. A la vista del intervalo obtenido, razone si se podría aceptar que el 6% de la población andaluza estaba infectada.
3. Se toma una nueva muestra de mayor tamaño y resulta que hay la misma proporción de positivos en la nueva muestra. Con estos nuevos datos, razone si el nuevo intervalo al 97% de confianza contiene al intervalo anterior o está contenido en él.

EJERCICIO 8

El tiempo, en horas, que los alumnos de un instituto dedican a estudiar para los exámenes finales, se distribuye siguiendo una ley Normal de media desconocida y varianza 81. Se toma una muestra aleatoria de 16 alumnos de dicho instituto, obteniéndose los siguientes tiempos:

30 42 38 45 52 60 21 26 33 44 28 49 32 51 49 40

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo, con un 95% de confianza, para estimar el tiempo medio de estudio de los alumnos de ese instituto.

b) **(1 punto)** Calcule el mínimo tamaño de la muestra que se ha de tomar, para estimar el tiempo medio de estudio de esos alumnos con un error inferior a 2 horas y un nivel de confianza del 98%.

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Un laboratorio farmacéutico tiene una línea de producción con dos medicamentos A y B, con marca comercial y genérico respectivamente, de los cuales, entre los dos como máximo puede fabricar 10 unidades a la hora. Desde el punto de vista del rendimiento, se han de producir al menos 4 unidades por hora entre los dos y por motivos de política sanitaria, la producción de A ha de ser como mucho 2 unidades más que la de B.

Cada unidad de tipo A que vende le produce un beneficio de 60 euros, mientras que cada unidad de tipo B le produce un beneficio de 25 euros. Si se vende todo lo que se produce, determine las unidades de cada medicamento que deberá fabricar por hora para maximizar su beneficio y obtenga el valor de dicho beneficio.

Sea x = "nº de unidades del medicamento A", y = "nº de unidades del medicamento B".

La función objetivo que deseamos maximizar es $B(x,y)=60x+25y$.

Las restricciones son:

"Entre los dos como máximo puede fabricar 10 unidades a la hora" → $x+y\leq 10$

"Se han de producir al menos 4 unidades por hora entre los dos" → $x+y\geq 4$

"La producción de A ha de ser como mucho 2 unidades más que la de B" → $x\leq y+2$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 10 \\ x+y\geq 4 \\ x\leq y+2 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\leq 10 \\ x+y\geq 4 \\ y-x\geq -2 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=10$

x	$y=10-x$
0	10
10	0

$x+y=4$

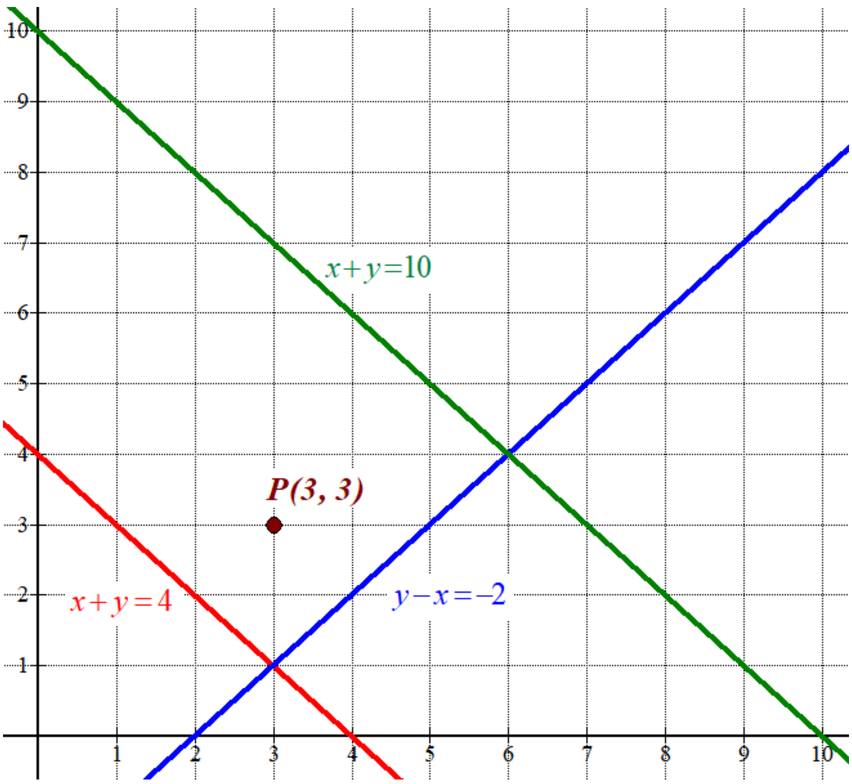
x	$y=4-x$
4	0
0	4

$y-x=-2$

x	$y=x-2$
2	0
4	2

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

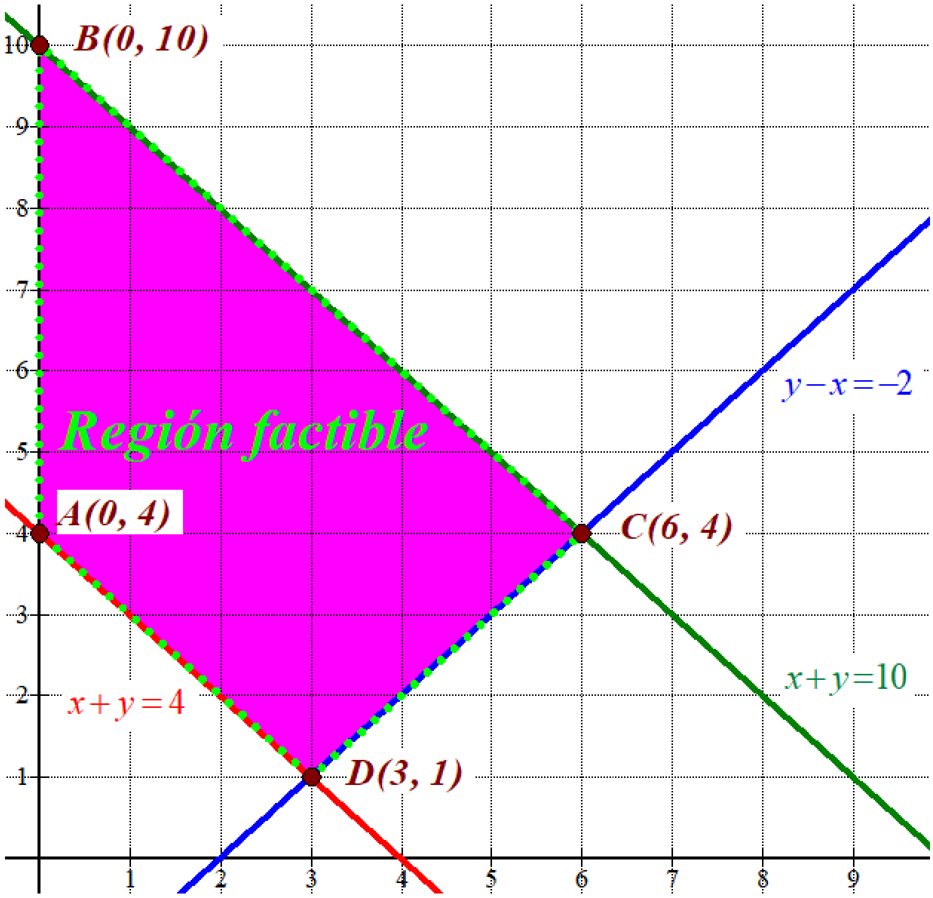


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 10 \\ x+y\geq 4 \\ y-x\geq -2 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es una región del primer cuadrante que está por debajo de la recta verde y por encima de la recta roja y azul.

Comprobamos que el punto P(3, 3) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3+3\leq 10 \\ 3+3\geq 4 \\ 3-3\geq -2 \\ 3\geq 0;\ 3\geq 0 \end{array}\right\}$$ **¡Se cumplen todas!**

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Para obtener el valor máximo de $B(x,y)=60x+25y$ en la región factible valoramos la función en cada vértice.

A(0, 4) → $B(0,4)=0+100=100$

B(0, 10) → $B(0,10)=0+250=250$

C(6, 4) → $B(6,4)=360+100=460$ ¡Máximo!

D(3, 1) → $B(3,1)=180+25=225$

El beneficio máximo es 460 € y se alcanza en el vértice C(6, 4).

Para obtener un beneficio máximo de 460 € hay que fabricar 6 medicamentos del tipo A y 4 medicamentos del tipo B a la hora.

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) **(0.5 puntos)** Calcule el valor del parámetro *a* para que la matriz *A* no tenga inversa.
b) **(1.25 puntos)** Para *a = 3*, resuelva la ecuación matricial $X\cdot A-X\cdot B=C$.
c) **(0.75 puntos)** Para *a = 3*, compruebe que $A^2=11\cdot A$ y exprese A^8 en función de la matriz *A*.

a) La matriz A no tiene inversa cuando su determinante se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=8a-24$$

$$|A|=0\Rightarrow 8a-24=0\Rightarrow \boxed{a=3}$$

La matriz A no tiene inversa cuando *a = 3*.

b) Para *a = 3* las matrices quedan $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

Despejamos la matriz X de la ecuación matricial $X\cdot A-X\cdot B=C$.

$$X\cdot A-X\cdot B=C\Rightarrow X\left(A-B\right)=C\Rightarrow X=C\left(A-B\right)^{-1}$$

Comprobamos que existe la inversa de la matriz *A – B*.

$$A-B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A-B|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=5-6=-1\neq 0$$

Hallamos la inversa de *A – B*.

$$\left(A-B\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A-B\right)^T\right)}{|A-B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos las matrices por su valor y determinamos la matriz X.

$$X=C\left(A-B\right)^{-1}\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5+6 & 2-2 \end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) Para *a = 3* la matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{r} A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+24 & 12+32 \\ 18+48 & 24+64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{pmatrix} \\ 11\cdot A = 11\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A^2 = 11\cdot A}$$

Calculamos A^8.

$$A^8 = A^2\cdot A^2\cdot A^2\cdot A^2 = 11A\cdot 11A\cdot 11A\cdot 11A = 11^4 A\cdot A\cdot A\cdot A =$$

$$= 11^4 A^2\cdot A^2 = 11^4\cdot 11A\cdot 11A = 11^6\cdot A\cdot A = 11^6\cdot A^2 = 11^6\cdot 11A = \boxed{11^7 A}$$

Hemos comprobado que $A^8 = 11^7\cdot A$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & si \quad -2\le x<0\\ (x-1)^2 & si \quad 0\le x\le 2\end{cases}$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f* en todo su dominio.
b) **(0.7 puntos)** Calcule los extremos de la función *f*.
c) **(0.8 puntos)** Represente el recinto que encierra la gráfica de *f*, las rectas *x = –1*, *x = 1* y el eje OX. Calcule el área de dicho recinto.

a) Para que sea continua debe serlo en *x = 0*.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)^2=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)^2=1\\ f(0)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1$$

La función es continua en *x = 0*. La función es continua en [–2, 2]

La función es derivable en *(–2,0)* ∪ *(0, 2)* y su derivada es $f\,'(x)=\begin{cases}2(x+1) & si \quad -2<x<0\\ 2(x-1) & si \quad 0<x<2\end{cases}$

Averiguamos si es derivable en *x = 0*.

$$\left.\begin{array}{l}f\,'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f\,'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2(x+1)=2\\ f\,'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f\,'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2(x-1)=-2\end{array}\right\}\Rightarrow f\,'(1^-)\neq f\,'(1^+)$$

La función no es derivable en *x = 0*. La función es derivable en *(–2, 0)* ∪ *(0, 2)*

b) Igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos.

$$f\,'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}2(x+1)=0\to x=-1\in(-2,0)\\ 2(x-1)=0\to x=1\in(0,2)\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores. Añadimos el valor *x = 0*, debido a que.la función no es derivable en *x = 0*.

En el intervalo $[-2,-1)$ tomamos *x = –1.5* y la derivada vale $f\,'(-1.5)=2(-1.5+1)=-1<0$. La función decrece en $[-2,-1)$.

En el intervalo $(-1,0)$ tomamos *x = –0.5* y la derivada vale $f\,'(-0.5)=2(-0.5+1)=1>0$. La función crece en $(-1,0)$.

En el intervalo $(0,1)$ tomamos *x = 0.5* y la derivada vale $f\,'(0.5)=2(0.5-1)=-1<0$. La función decrece en $(0,1)$

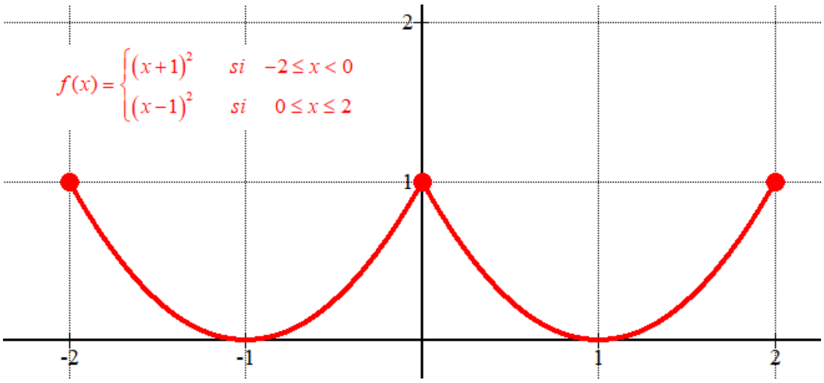
En el intervalo $(1,2)$ tomamos *x = 1.5* y la derivada vale $f\,'(1.5)=2(1.5-1)=1>0$. La función crece en $(1,2)$.

La función presenta un mínimo relativo en *x = –1*, un máximo relativo en *x = 0* y otro mínimo relativo en *x = 1*.

c) Hacemos una tabla de valores de la función

$Si\ -2 \le x < 0$

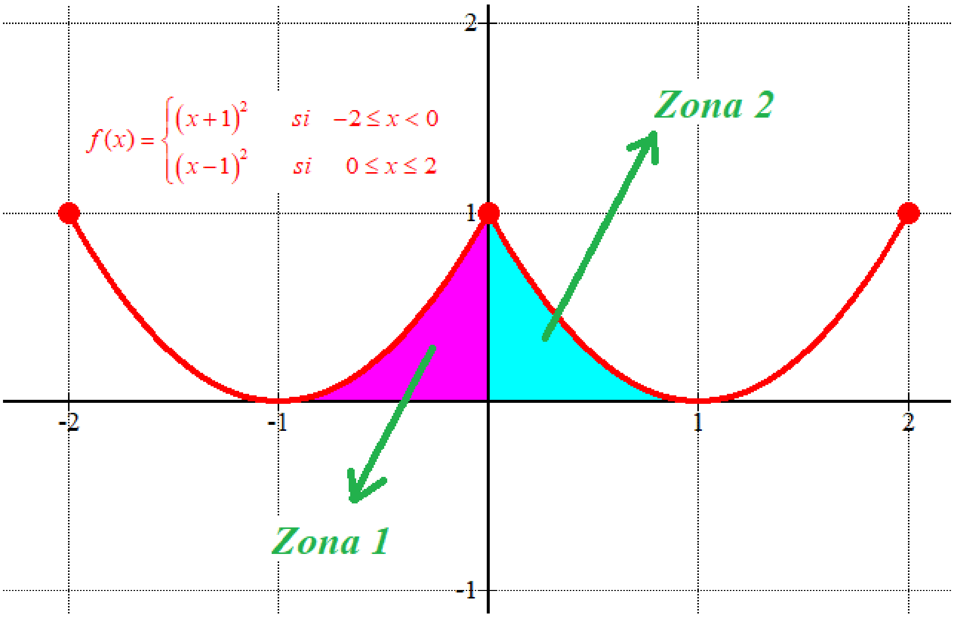
x	$f(x) = (x+1)^2$
-2	1
-1	0
-0.5	0.25



$Si\ 0 \le x \le 2$

x	$f(x) = (x-1)^2$
0	1
1	0
2	1

La región de la cual queremos hallar el área la dividimos en dos partes (una en rosa y otra en azul):



El área de la zona 1 (rosa) la calculamos con la siguiente integral:

$$Área\ Zona\,1 = \int_{-1}^{0} (x+1)^2\, dx = \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_{-1}^{0} = \left[\frac{(0+1)^3}{3} \right] - \left[\frac{(-1+1)^3}{3} \right] = \boxed{\frac{1}{3} u^2}$$

El área de la zona 2 (azul) la calculamos con la siguiente integral:

$$Área\ Zona\,2 = \int_{0}^{1} (x-1)^2\, dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_{0}^{1} = \left[\frac{(1-1)^3}{3} \right] - \left[\frac{(0-1)^3}{3} \right] = \boxed{\frac{1}{3} u^2}$$

El área de la región pedida es $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3} \simeq 0.667\ u^2}$.

EJERCICIO 4

a) **(2 puntos)** Sea *f* una función de la que sabemos que la gráfica de su derivada, *f ´*, es una parábola con vértice en el punto (0, 8) que corta al eje de abscisas en los puntos (–4, 0) y (4, 0).

1. Dibuje la gráfica de *f ´*.
2. A partir de dicha gráfica, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, así como las abscisas de los extremos relativos de *f*.
3. Sabiendo que la gráfica de *f* pasa por el origen de coordenadas, calcule la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x = 0*.

b) **(0.5 puntos)** Calcule la derivada de la función $g(x)=\left(-3+x^2\right)\cdot e^{2x-1}$.

a.1) Averiguamos la expresión de *f ´ (x)*.

$f'(x)=ax^2+bx+c$ con con vértice en el punto (0, 8) significa que *f ´ (0) = 8.*

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=ax^2+bx+c \\ f'(0)=8 \end{array}\right\} \Rightarrow 8=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \Rightarrow \boxed{c=8}$$

Como el vértice es un extremo de la función *f ´* se cumple que su derivada se anula, es decir, que *f ´´ (0) = 0.*

$$\left.\begin{array}{r} f''(x)=2ax+b \\ f''(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=2a\cdot 0+b \Rightarrow \boxed{b=0}$$

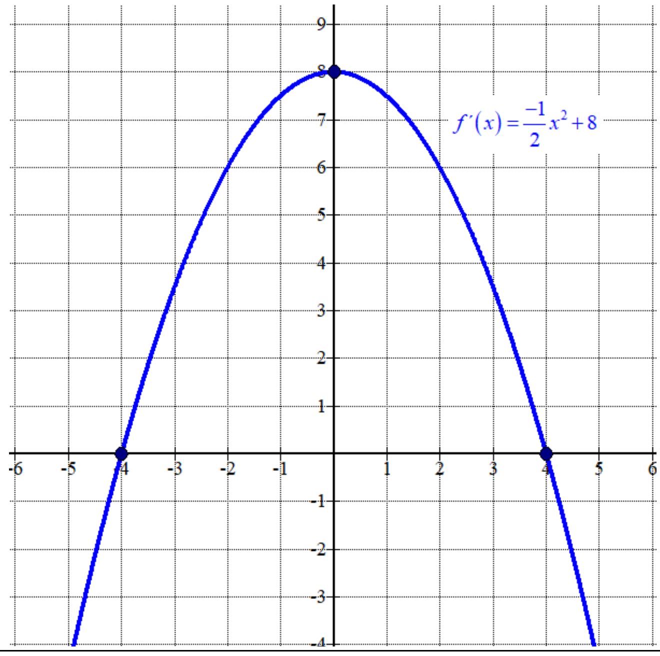
La parábola tiene expresión $f'(x)=ax^2+8$.

Como *f ´ (x)* corta al eje de abscisas en los puntos (–4, 0) y (4, 0) debe cumplirse que $f'(4)=0$ y $f'(-4)=0$.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=ax^2+8 \\ f'(4)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=a\cdot 4^2+8 \Rightarrow 16a=-8 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-8}{16}=\frac{-1}{2}}$$

La parábola tiene expresión $f'(x)=\frac{-1}{2}x^2+8$.

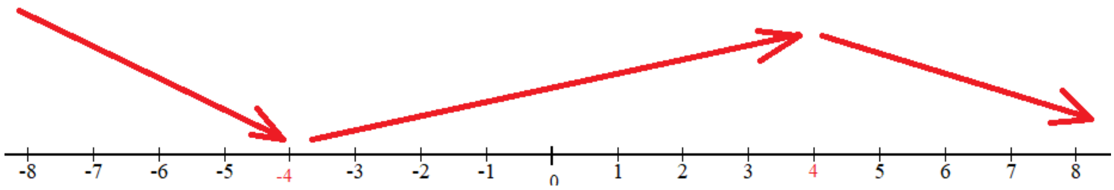
Dibujamos su gráfica.



a.2) La derivada de *f* es negativa en el intervalo $(-\infty,-4)$ y en $(4,+\infty)$, por lo que en dichos intervalos la función *f* es decreciente.

La derivada de *f* es positiva en el intervalo $(-4,4)$, por lo que en dicho intervalo la función *f* es creciente.

La función *f* sigue el esquema siguiente.



La función *f* presenta un mínimo relativo en *x* = *–4* y un máximo relativo en *x* = *4*.

a.3) La función pasa por el origen de coordenadas por lo que en *x* = *0* vale 0, es decir, *f(0)* = *0*.

Como $f'(0)=\frac{-1}{2}\cdot 0^2+8=8$ la recta tangente tiene la expresión:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f'(0)=8 \\ y-f(0)=f'(0)(x-0) \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=8(x-0)\Rightarrow \boxed{y=8x}$$

La recta tangente a la gráfica de *f* en *x* = *0* tiene ecuación $y=8x$.

b)

$$g(x)=(-3+x^2)\cdot e^{2x-1}\Rightarrow g'(x)=(2x)\cdot e^{2x-1}+(-3+x^2)\cdot e^{2x-1}\cdot 2$$

$$\boxed{g'(x)=e^{2x-1}(2x-6+2x^2)=(2x^2+2x-6)e^{2x-1}}$$

BLOQUE C

EJERCICIO 5

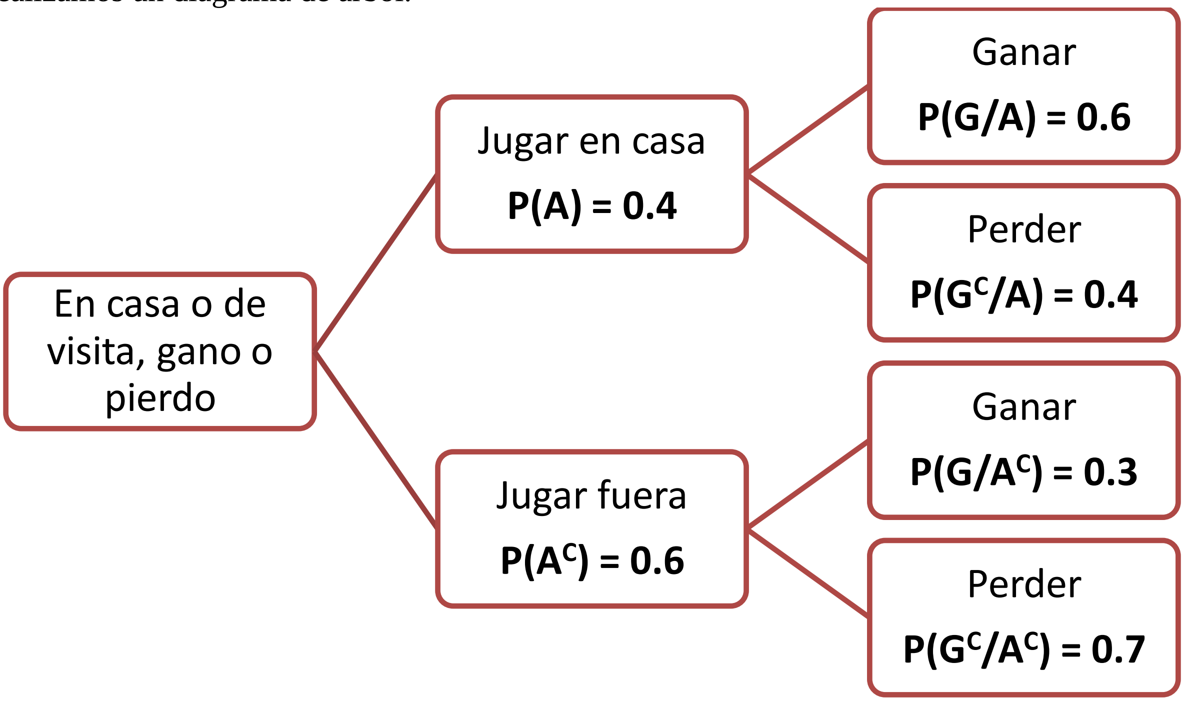
Un equipo andaluz de baloncesto jugó en una temporada un 40% de los partidos en casa y el resto fuera. De los partidos que jugó en casa, obtuvo un 60% de victorias y el resto fueron derrotas, mientras que de los que jugó fuera, obtuvo un 30% de victorias y el resto derrotas. Se elige un partido de este equipo al azar.

a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que el partido acabase en victoria.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el partido haya sido jugado en casa, sabiendo que el resultado final fue una derrota.

c) **(0.25 puntos)** Si además se sabe que el 10% de las victorias obtenidas en casa y el 20% de las obtenidas fuera se produjeron tras una prórroga, calcule la probabilidad de que el partido acabase en victoria y que además esa victoria haya sido tras una prórroga.

Llamamos A al suceso "Jugar en casa" y G = "Ganar un partido".
Realizamos un diagrama de árbol.



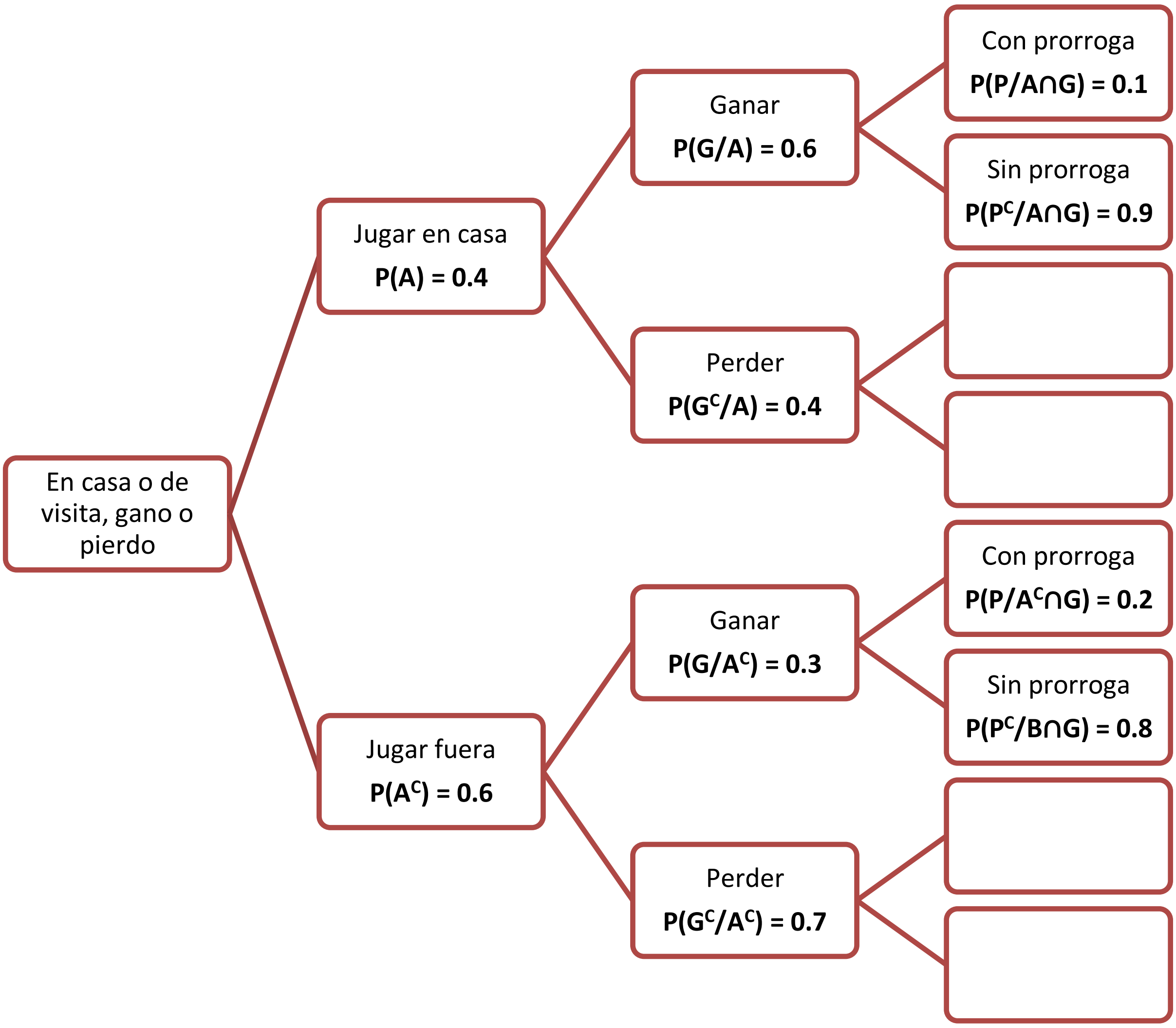
a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G)=P(A)P(G/A)+P(B)P(G/B)=0.4\cdot 0.6+0.6\cdot 0.3=\boxed{0.42}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/G^C)=\frac{P(A\cap G^C)}{P(G^C)}=\frac{P(A)P(G^C/A)}{1-P(G)}=\frac{0.4\cdot 0.4}{1-0.42}=\boxed{\frac{8}{29}\simeq 0.276}$$

c) Completamos el árbol con una tercera rama.



Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G \cap P) = P(A)P(G/A)P(P/A \cap G) + P(B)P(G/B)P(P/B \cap G) =$$

$$= 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.2 = \boxed{0.06}$$

EJERCICIO 6

Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo espacio muestral con $P\left(A^C\right)=0.4$ y $P\left(A\cap B^C\right)=0.12$

a) **(0.5 puntos)** Calcule $P(A)$ y $P(A\cap B)$.

b) **(0.5 puntos)** Determine $P(B)$ para que *A* y *B* sean independientes.

c) **(1.5 puntos)** Si $P\left(B^C\right)=0.2$, calcule $P(A\cup B)$, $P\left(A^C\cup B^C\right)$ y $P\left(A/B^C\right)$.

a) Realizamos una tabla con estos datos.

	B	**B^C**	
A		**0.12**	
A^C			**0.4**
			1

Completamos la tabla.

	B	**B^C**	
A	**0.48**	**0.12**	**0.6**
A^C			**0.4**
			1

No podemos completarla del todo por falta de datos, pero si hemos obtenido lo que nos piden.

$$P(A)=0.6 \qquad\qquad P(A\cap B)=0.48$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Con fórmulas de probabilidad.

$$P(A)=1-P\left(A^C\right)=1-0.4=\boxed{0.6}$$

$$P(A)=P\left(A\cap B^C\right)+P(A\cap B)\Rightarrow 0.6=0.12+P(A\cap B)\Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=0.6-0.12=0.48}$$

b) Para que *A* y *B* sean independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.48 \\ P(A)=0.6 \\ P(A\cap B)=P(A)P(B) \end{array}\right\}\Rightarrow 0.48=0.6\cdot P(B)\Rightarrow \boxed{P(B)=\frac{0.48}{0.6}=0.8}$$

c) Si $P\left(B^C\right)=0.2$ entonces $P(B)=1-P\left(B^C\right)=1-0.2=0.8$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.48 \\ P(A)=0.6 \\ P(B)=0.8 \end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.6+0.8-0.48=\boxed{0.92}$$

$$P\left(A^C\cup B^C\right)=P\left((A\cap B)^C\right)=1-P(A\cap B)=1-0.48=\boxed{0.52}$$

$$P\left(A/B^C\right)=\frac{P\left(A\cap B^C\right)}{P\left(B^C\right)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{0.2}=\frac{0.6-0.48}{0.2}=\boxed{0.6}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1 punto)** En una población constituida por los números naturales del 1 al 9, ¿cuántas muestras de tamaño 2 se pueden formar por muestreo aleatorio simple? Si se elige al azar una de esas muestras, ¿cuál es la probabilidad de que el valor medio de los dos números de esa muestra sea 5?

b) **(1.5 puntos)** Para estimar la proporción de andaluces contagiados por una enfermedad infecciosa en un momento determinado, se ha tomado una muestra de 10000 personas, resultando que 500 de ellas estaban infectadas.

1. Con ese dato, establezca un intervalo, al 97% de confianza, para la proporción real de infectados en la población andaluza.
2. A la vista del intervalo obtenido, razone si se podría aceptar que el 6% de la población andaluza estaba infectada.
3. Se toma una nueva muestra de mayor tamaño y resulta que hay la misma proporción de positivos en la nueva muestra. Con estos nuevos datos, razone si el nuevo intervalo al 97% de confianza contiene al intervalo anterior o está contenido en él.

a) Supongo que el muestreo es con reemplazamiento.

Podemos elegir las siguientes muestras:

1 1, 1 2, 1 3, 1 4,1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9, 2 1, 2 2, 2 3, …. ,9 1, 9 2, 9 3, 9 4, 9 5, 96, 9 7, 9 8, 9 9.

Un total de 9 · 9 = 81 muestras de tamaño 2.

El valor medio de la muestra es 5 cuando la muestra suma 10, y eso ocurre en los siguientes casos: 1 9, 2 8, 3 7, 4 6, 5 5, 6 4, 7 3, 8 2, 9 1. Ocurre de 9 maneras distintas.

Aplicando la regla de Laplace tenemos que

$$P(\text{Muestra tenga de media 5}) = \frac{N^o\,casos\ favorables}{N^o\,casos\ posibles} = \frac{9}{81} = \boxed{\frac{1}{9} \simeq 0.111}$$

Si suponemos el muestreo sin reemplazamiento.

Podemos elegir las siguientes muestras:

1 2, 1 3, 1 4,1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9, 2 1, 2 3, 2 4, …..,9 1, 9 2, 9 3, 9 4, 9 5, 96, 9 7, 9 8.

Un total de 8 · 9 = 72 muestras de tamaño 2.

El valor medio de la muestra es 5 cuando la muestra suma 10, y eso ocurre en los siguientes casos: 1 9, 2 8, 3 7, 4 6, 6 4, 7 3, 8 2, 9 1. Ocurre de 8 maneras distintas.

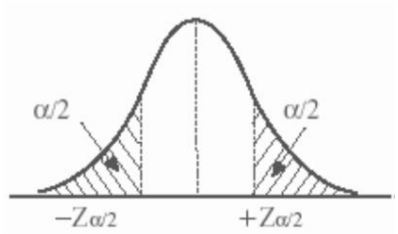
Aplicando la regla de Laplace tenemos que

$$P(\text{Muestra tenga de media 5}) = \frac{N^o\,casos\ favorables}{N^o\,casos\ posibles} = \frac{8}{72} = \boxed{\frac{1}{9} \simeq 0.111}$$

b.1) n = 10000. $pr = \frac{500}{10000} = 0.05$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.05 = 0.95$

Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1 - \propto = 0.97 \rightarrow \propto = 0.03 \rightarrow \propto/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.05 \cdot 0.95}{10000}} \simeq 0.00473$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(pr - Error,\ pr + Error\right) = \left(0.05 - 0.00473,\quad 0.05 + 0.00473\right) = \left(0.04527,\ 0.05473\right)$$

b.2) Una proporción de infectados del 6 % significa 0.06.

Este valor 0.06 no pertenece al intervalo de confianza obtenido en el apartado anterior $0.06 \notin \left(0.04527,\ 0.05473\right)$, por lo que no es aceptable esa proporción de afectados.

b.3) Si se toma una muestra de mayor tamaño y se obtiene la misma proporción tenemos que el centro del intervalo de confianza es el mismo, solo puede variar la amplitud del intervalo que lo mide el ERROR.

La fórmula del error es: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}}$. Lo único que cambia (a mayor) es “n” el tamaño de la muestra, entonces el error será menor y el nuevo intervalo de confianza estará contenido en el anterior.

EJERCICIO 8

El tiempo, en horas, que los alumnos de un instituto dedican a estudiar para los exámenes finales, se distribuye siguiendo una ley Normal de media desconocida y varianza 81. Se toma una muestra aleatoria de 16 alumnos de dicho instituto, obteniéndose los siguientes tiempos:

30 42 38 45 52 60 21 26 33 44 28 49 32 51 49 40

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo, con un 95% de confianza, para estimar el tiempo medio de estudio de los alumnos de ese instituto.

b) **(1 punto)** Calcule el mínimo tamaño de la muestra que se ha de tomar, para estimar el tiempo medio de estudio de esos alumnos con un error inferior a 2 horas y un nivel de confianza del 98%.

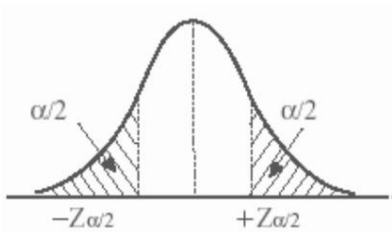
X = El tiempo, en horas, que los alumnos de un instituto dedican a estudiar para los exámenes finales.
Como la varianza es 81 la desviación típica es la raíz de 81, es decir, 9.
X = N(μ, 9)

a) n = 16. La media es

$$\bar{x} = \frac{30+42+38+45+52+60+21+26+33+44+28+49+32+51+49+40}{16} = 40$$

Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

1 – ∝ = 0.95 → ∝ = 0.05 →∝/2 = 0.025 →1 – ∝/2 = 0.975 → $z_{\alpha/2}$ **= 1.96**



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{9}{\sqrt{16}} = 4.41$$

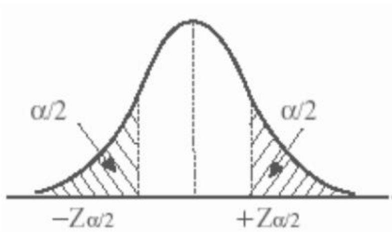
El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(40 - 4.41, \quad 40 + 4.41\right) = \left(35.59, 44.41\right)$$

a) ¿n?

Con un nivel de confianza del 98 % tenemos

1 – ∝ = 0.98 → ∝ = 0.02 →∝/2 = 0.01 →1 – ∝/2 = 0.99 → $z_{\alpha/2} = 2.33$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.33 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{2}{2.33} = \frac{9}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{9 \cdot 2.33}{2} \Rightarrow n = \left(\frac{9 \cdot 2.33}{2}\right)^2 \simeq 109.935$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 110 alumnos.