PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
- **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
- **b)** Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
- **c)** En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- **d)** Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- **e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

a) (1 punto) Una frutería vende dos tipos de surtidos de frutos rojos, A y B. El surtido de tipo A contiene 75 g de arándanos, 100 g de frambuesas y se vende a 2.40 euros, mientras que el de tipo B contiene 75 g de arándanos, 50 g de frambuesas y se vende a 1.80 euros. La frutería dispone de un total de 3.75 kg de arándanos y 4 kg de frambuesas y el número de surtidos que vende del tipo A, siempre es menor o igual al doble de los del tipo B.
Formule, sin resolver, el problema que permite obtener el número de surtidos de cada tipo que debe vender para que el beneficio sea máximo.

b) (1.5 puntos) Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices:

$$x+4y\geq 5 \qquad x+2y\geq 4 \qquad 7x+5y\leq 35 \qquad x\geq 0$$

¿En qué punto de la región anterior la función $F(x,y)=2x+y$ alcanza el mínimo y cuál es dicho valor?

EJERCICIO 2

Se considera la ecuación matricial $(10I_3-A)\cdot X=B$, donde $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\4&2&0\\2&2&5\end{pmatrix}$ y B es una matriz con tres filas y una columna.

a) **(0.5 puntos)** Razone qué dimensión ha de tener la matriz X.

b) **(0.5 puntos)** ¿Tiene solución la ecuación matricial anterior para cualquier matriz B de orden 3×1? ¿Por qué?

c) **(1.5 puntos)** Resuelva dicha ecuación matricial si $B=\begin{pmatrix}5 & 20 & -3\end{pmatrix}^t$.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}-2x+2a & si \quad -4\leq x\leq -2\\ -2x^2-4a & si \quad -2<x\leq 2\\ -8x+b & si \quad 2<x\leq 3\end{cases}$

a) **(1 punto)** Calcule los valores a y b para que la función sea continua en su dominio. Para esos valores, ¿es f derivable?

b) **(0.8 puntos)** Para $a = -2$ y $b = 16$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos y absolutos.
c) **(0.7 puntos)** Para $a = -2$ y $b = 16$, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

EJERCICIO 4

a) **(1 punto)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=\left(5x^3+4x-2\right)^4\cdot\ln\left(2x^5-4x^3+x\right) \qquad g(x)=\frac{e^{3x^2-5x}}{\left(6x^2+2\right)^3}$$

b) **(1.5 puntos)** Halle la función $h(x)$, sabiendo que su derivada es $h'(x)=4x^3+x^2-4x-1$ y que $h(2)=\frac{11}{3}$.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Sean A y B dos sucesos de un mismo experimento aleatorio de los que se sabe que:

$$P(A-B)=0.3 \qquad P\left(A^C\right)=0.35 \qquad P(B)=0.55$$

a) **(0.8 puntos)** Calcule la probabilidad de que suceda al menos uno de ellos.
b) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A.
c) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.
d) **(0.5 puntos)** Razone si los sucesos A y B son independientes.

EJERCICIO 6

En una determinada muestra de suelo se han aislado dos tipos de bacterias, A y B, de las cuales el 70% son de A y el 30% de B. La probabilidad de que una bacteria de tipo A reaccione a la prueba del nitrato es 0.15 y para la bacteria B es 0.8. De las bacterias aisladas se selecciona una al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que reaccione a la prueba del nitrato.
b) **(1 punto)** Si la bacteria ha reaccionado a la prueba del nitrato, calcule la probabilidad de que sea del tipo B.
c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la bacteria sea del tipo A y no reaccione a la prueba del nitrato.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.25 puntos)** Se desea tomar una muestra aleatoria estratificada de las personas de un municipio, cuyos estratos son los siguientes tramos de edad: de 0 a 25 años, de 26 a 45, de 46 a 60 y de 61 años o más. En el primer tramo hay 15 000 personas, en el segundo hay 16 800, en el tercero 11400 y en el cuarto 6 000. Sabiendo que el muestreo se hace con afijación proporcional y se han elegido al azar 375 personas del primer tramo, calcule el tamaño de la muestra total y su composición.
b) **(1.25 puntos)** Dada la población $\{1,3,5\}$, establezca todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y determine la media y la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas estas muestras.

EJERCICIO 8

Se quiere estimar la proporción de imprentas de una región que incluyen el uso de celulosa reciclada en los libros que imprimen. Para ello, se ha tomado una muestra aleatoria de 50 imprentas de esa región y en ella hay 12 que usan dicho material.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza al 95%, para estimar la proporción real de imprentas que usan celulosa reciclada.
b) **(1 punto)** Determine el tamaño mínimo de la muestra de imprentas de esa región que se deben seleccionar para que, manteniendo el mismo nivel de confianza y proporción muestral anteriores, la amplitud del intervalo sea como máximo de 0.2.

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

a) (1 punto) Una frutería vende dos tipos de surtidos de frutos rojos, A y B. El surtido de tipo A contiene 75 g de arándanos, 100 g de frambuesas y se vende a 2.40 euros, mientras que el de tipo B contiene 75 g de arándanos, 50 g de frambuesas y se vende a 1.80 euros. La frutería dispone de un total de 3.75 kg de arándanos y 4 kg de frambuesas y el número de surtidos que vende del tipo A, siempre es menor o igual al doble de los del tipo B.
Formule, sin resolver, el problema que permite obtener el número de surtidos de cada tipo que debe vender para que el beneficio sea máximo.

b) (1.5 puntos) Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices:

$$x+4y\geq 5 \qquad x+2y\geq 4 \qquad 7x+5y\leq 35 \quad x\geq 0$$

¿En qué punto de la región anterior la función $F(x,y)=2x+y$ alcanza el mínimo y cuál es dicho valor?

a) Llamamos x = número de surtidos de tipo A, y = número de surtidos de tipo B.

Organizamos todos los datos en una tabla.

	Gramos de arándanos	Gramos de frambuesas	Beneficio
Nº surtidos A (x)	75x	100x	2.4x
N surtidos B (y)	75y	50y	1.8y
TOTAL	$75x+75y$	$100x+50y$	$2.4x+1.8y$

La función a maximizar es el beneficio que viene dado como $B(x,y)=2.4x+1.8y$

Las restricciones son:

"La frutería dispone de un total de 3.75 kg =3750 gramos de arándanos y 4000 gramos de frambuesas" → $75x+75y\leq 3750;\ \ 100x+50y\leq 4000$

"El número de surtidos que vende del tipo A, siempre es menor o igual al doble de los del tipo B" → $x\leq 2y$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 75x+75y\leq 3750 \\ 100x+50y\leq 4000 \\ x\leq 2y \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\leq 50 \\ 2x+y\leq 80 \\ x\leq 2y \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Deseamos maximizar la función Beneficio $B(x,y)=2.4x+1.8y$ sometida a las restricciones

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 50 \\ 2x+y\leq 80 \\ x\leq 2y \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+4y=5$

x	$y=\dfrac{5-x}{4}$
1	1
5	0

$x+2y=4$

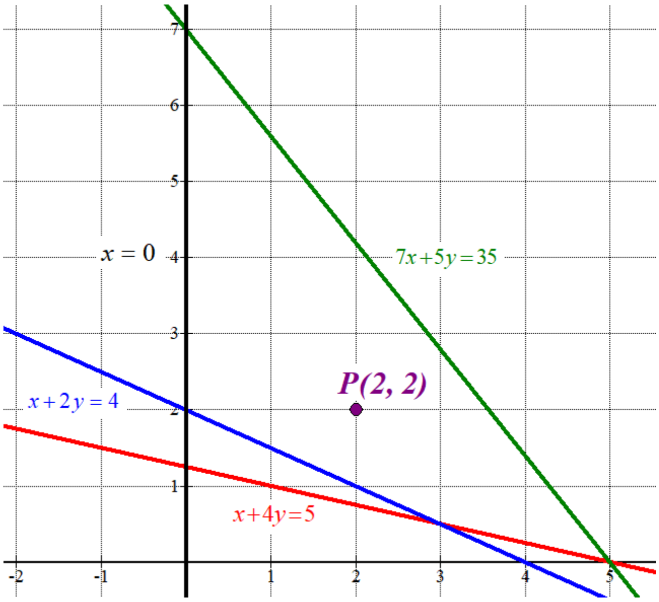
x	$y=\dfrac{4-x}{2}$
0	2
4	0

$7x+5y=35$

x	$y=\dfrac{35-7x}{5}$
0	7
5	0

$x=0$

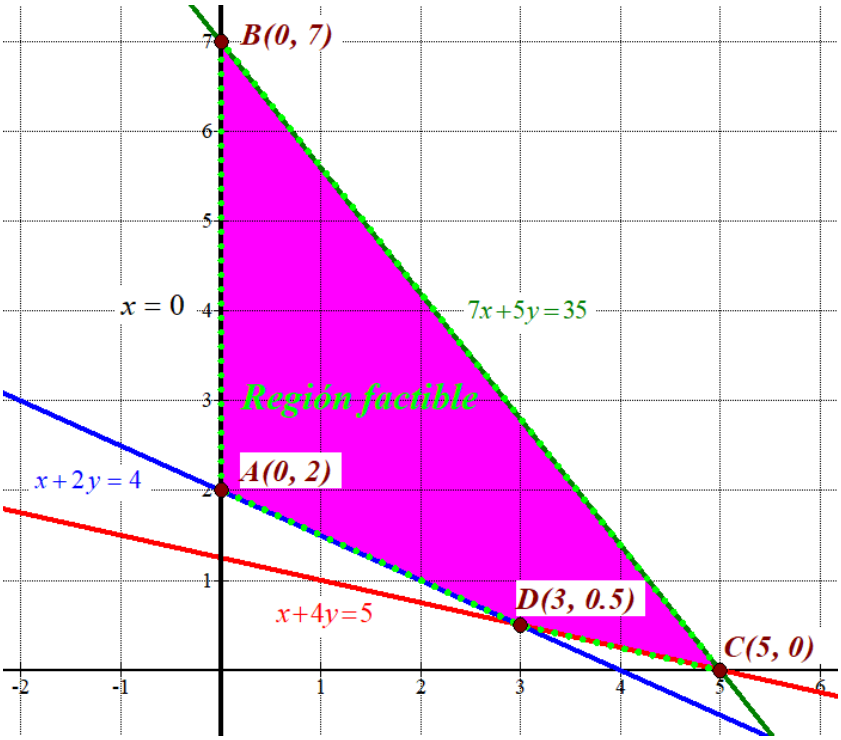
$x=0$	y
0	2
0	7



Como las restricciones son $x+4y\geq 5$ $\quad x+2y\geq 4$ $\quad 7x+5y\leq 35$ $\quad x\geq 0$ la región factible es una región del primer cuadrante que está por encima de la recta roja, por encima de la recta azul y por debajo de la recta verde y a la derecha de la recta vertical negra.
Comprobamos que el punto P(2, 2) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$2+4\cdot 2\geq 5 \qquad 2+2\cdot 2\geq 4 \qquad 7\cdot 2+5\cdot 2\leq 35 \qquad 2\geq 0$$ **¡Se cumplen todas!**

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas del punto D.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=4 \\ x+4y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=4-2y \\ x+4y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow 4-2y+4y=5 \Rightarrow 2y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \Rightarrow x=4-2\frac{1}{2}=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{D(3,0.5)}$$

Para obtener el valor mínimo de $F(x,y)=2x+y$ en la región factible valoramos la función en cada vértice.

A(0, 2) → $F(0,2)=0+2=2$ ¡Mínimo!
B(0, 7) → $F(0,7)=0+7=7$
C(5, 0) → $F(5,0)=10+0=10$
D(3, 0.5) → $F(3,0.5)=6+0.5=6.5$

El valor mínimo es 2 que se alcanza en el vértice A(0, 2).

EJERCICIO 2

Se considera la ecuación matricial $(10I_3 - A)\cdot X = B$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y B es una matriz con tres filas y una columna.

a) **(0.5 puntos)** Razone qué dimensión ha de tener la matriz *X*.

b) **(0.5 puntos)** ¿Tiene solución la ecuación matricial anterior para cualquier matriz *B* de orden 3×1 ? ¿Por qué?

c) **(1.5 puntos)** Resuelva dicha ecuación matricial si $B = \begin{pmatrix} 5 & 20 & -3 \end{pmatrix}^t$.

a) A es una matriz 3×3 y B es 3×1. La matriz $10I_3 - A$ es de dimensión 3×3.

X es una matriz $m\times n$.

$$\begin{array}{ll} (10I_3 - A)\cdot X & = B \\ 3\times \boxed{3 \quad \cdot m}\times n & \rightarrow 3\times 1 \end{array}$$

Para poder realizarse el producto el número de columnas de $10I_3 - A$ (*3*) debe ser igual al número de filas de X (*m*), por lo que *m = 3.*

El resultado del producto es una matriz de dimensión $3\times n$ y debe ser una matriz de dimensión 3×1, por lo que *n = 1.*

La matriz X es de dimensión 3×1.

b) Para que tenga solución debe tener inversa la matriz $10I_3 - A$ y para ello debe tener determinante no nulo. Lo comprobamos.

$$10I_3 - A = 10\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|10I_3 - A| = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 320 - 20 = 300 \neq 0$$

La matriz $10I_3 - A$ es invertible y la ecuación matricial $(10I_3 - A)\cdot X = B$ tiene solución para cualquier expresión 3×1 de B siendo la solución $X = (10I_3 - A)^{-1}\cdot B$

c) La solución es $X = (10I_3 - A)^{-1}\cdot B$.

$B = \begin{pmatrix} 5 & 20 & -3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix}$ que es de dimensión 3×1.

Hallamos primero la inversa de $10I_3 - A$.

$$(10I_3 - A)^{-1} = \frac{Adj\left((10I_3 - A)^T\right)}{|10I_3 - A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 8 & -4 & -2 \\ -1 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}{300} =$$

$$= \frac{1}{300}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{300}\begin{pmatrix} 40 & 5 & 0 \\ 20 & 40 & 0 \\ 24 & 18 & 60 \end{pmatrix}$$

Sustituimos los valores de las matrices y hallamos X.

$$X = (10I_3 - A)^{-1} \cdot B$$

$$X = \frac{1}{300}\begin{pmatrix} 40 & 5 & 0 \\ 20 & 40 & 0 \\ 24 & 18 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{300}\begin{pmatrix} 200+100 \\ 100+800 \\ 120+360-180 \end{pmatrix} = \frac{1}{300}\begin{pmatrix} 300 \\ 900 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} -2x+2a & si & -4\le x\le -2 \\ -2x^2-4a & si & -2<x\le 2 \\ -8x+b & si & 2<x\le 3 \end{cases}$

a) **(1 punto)** Calcule los valores *a* y *b* para que la función sea continua en su dominio. Para esos valores, ¿es *f* derivable?
b) **(0.8 puntos)** Para *a = –2* y *b = 16*, estudie la monotonía de la función *f* y calcule sus extremos relativos y absolutos.
c) **(0.7 puntos)** Para *a = –2* y *b = 16*, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje OX y las rectas *x = –2* y *x = 2*.

a) La función debe ser continua en *x = –2*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} -2x+2a=4+2a \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} -2x^2-4a=-8-4a \\ f(-2)=4+2a \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=f(-2) \end{array}\right\} \Rightarrow -8-4a=4+2a \Rightarrow -6a=12 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-12}{6}=-2}$$

Como *a = –2* la función queda $f(x)=\begin{cases} -2x-4 & si & -4\le x\le -2 \\ -2x^2+8 & si & -2<x\le 2 \\ -8x+b & si & 2<x\le 3 \end{cases}$

La función debe ser continua en *x = 2*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} -2x^2+8=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} -8x+b=-16+b \\ f(2)=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \end{array}\right\} \Rightarrow -16+b=0 \Rightarrow \boxed{b=16}$$

Los valores buscados son *a = –2* y *b = 16*.

¿es *f* derivable?

La función $f(x)=\begin{cases} -2x-4 & si & -4\le x\le -2 \\ -2x^2+8 & si & -2<x\le 2 \\ -8x+16 & si & 2<x\le 3 \end{cases}$ es derivable en cada intervalo pues son trozos de funciones polinómicas.

$$f'(x)=\begin{cases} -2 & si & -4\le x<-2 \\ -4x & si & -2<x<2 \\ -8 & si & 2<x\le 3 \end{cases}$$

Falta comprobar su derivabilidad en *x = –2* y en *x = 2*.

¿Es derivable en $x = -2$?

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = \lim_{x\to -2^-} f'(x) = -2 \\ f'(-2^+) = \lim_{x\to -2^+} f'(x) = -4\cdot(-2) = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(-2^-) \neq f'(-2^+)$$

La función no es derivable en $x = -2$.

¿Es derivable en $x = 2$?

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = -4\cdot 2 = -8 \\ f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = -8 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(-2^-) = f'(-2^+) = -8$$

La función es derivable en $x = 2$.

Resumiendo: La función es derivable en $[-4,3]-\{-2\}$

b) Para $a = -2$ y $b = 16$ la función queda $f(x) = \begin{cases} -2x-4 & si \quad -4 \le x \le -2 \\ -2x^2+8 & si \quad -2 < x \le 2 \\ -8x+16 & si \quad 2 < x \le 3 \end{cases}$

Y la función derivada es $f'(x) = \begin{cases} -2 & si \quad -4 \le x < -2 \\ -4x & si \quad -2 < x \le 2 \\ -8 & si \quad 2 < x \le 3 \end{cases}$

En el intervalo $[-4,-2)$ la derivada es siempre negativa y por tanto la función es decreciente en $[-4,-2)$.

En el intervalo $(-2,2)$ la derivada se anula en $x = 0$. El estudio de la monotonía en este intervalo lo dividimos en dos intervalos.

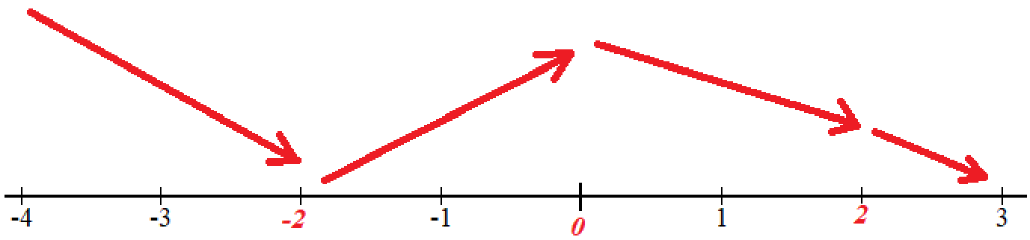
En el intervalo $(-2,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $4 > 0$. La función crece en $(-2,0)$.

En el intervalo $(0,2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $-4 < 0$. La función decrece en $(0,2)$.

En el intervalo $(2,3]$ la derivada es siempre negativa y por tanto la función es decreciente en $(2,3]$.

Resumiendo: La función decrece en $[-4,-2)\cup(0,3)$ y crece en $(-2,0)$.

La función sigue el esquema siguiente.



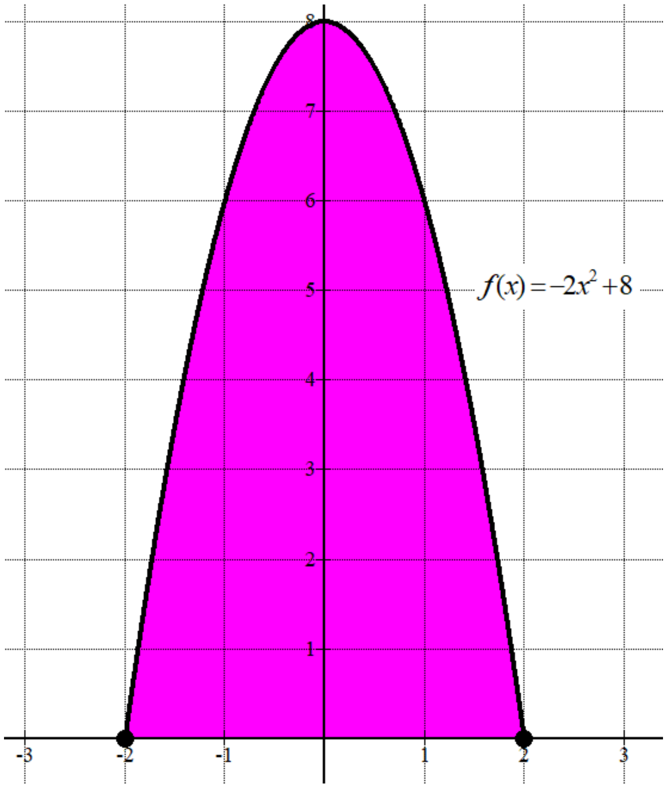
La función presenta un mínimo relativo en $x = -2$ y un máximo relativo en $x = 0$.
El valor del mínimo relativo es $f(-2) = 0$. Y el valor del máximo relativo es $f(0) = 8$.

El mínimo relativo tiene coordenadas $(-2,0)$

El máximo relativo tiene coordenadas $(0,8)$

c) La función entre –2 y 2 es $f(x) = -2x^2 + 8$
Obtenemos una tabla de valores para completar la gráfica de $f(x)$ y dibujar la región de la cual queremos hallar el área.

x	$y = -2x^2 + 8$
-2	0
-1	6
0	8
1	6
2	0



El valor del área de la región coloreada de rosa es la que deseamos calcular. La calculamos haciendo uso de la integral definida de la función entre –2 y 2.

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{2} -2x^2 + 8dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 8x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\cdot 2^3 + 8\cdot 2\right] - \left[-\frac{2}{3}\cdot(-2)^3 + 8\cdot(-2)\right] = -\frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} + 16 = -\frac{32}{3} + 32 = \boxed{\frac{64}{3} \simeq 21.33u^2}$$

EJERCICIO 4

a) **(1 punto)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=\left(5x^3+4x-2\right)^4\cdot\ln\left(2x^5-4x^3+x\right) \qquad g(x)=\frac{e^{3x^2-5x}}{\left(6x^2+2\right)^3}$$

b) **(1.5 puntos)** Halle la función *h(x)*, sabiendo que su derivada es $h'(x)=4x^3+x^2-4x-1$ y que $h(2)=\frac{11}{3}$.

a) La derivada de *f(x)*:

$$f'(x)=4\left(5x^3+4x-2\right)^3\left(15x^2+4\right)\cdot\ln\left(2x^5-4x^3+x\right)+\left(5x^3+4x-2\right)^4\frac{10x^4-12x^2+1}{2x^5-4x^3+x}$$

La derivada de *g(x)*:

$$g'(x)=\frac{e^{3x^2-5x}(6x-5)\left(6x^2+2\right)^3-e^{3x^2-5x}3\left(6x^2+2\right)^2(12x)}{\left(6x^2+2\right)^6}$$

$$g'(x)=\frac{e^{3x^2-5x}(6x-5)\left(6x^2+2\right)-36xe^{3x^2-5x}}{\left(6x^2+2\right)^4}=\frac{e^{3x^2-5x}\left[(6x-5)\left(6x^2+2\right)-36x\right]}{\left(6x^2+2\right)^4}$$

$$g'(x)=\frac{e^{3x^2-5x}\left[36x^3+12x-30x^2-10-36x\right]}{\left(6x^2+2\right)^4}=\frac{e^{3x^2-5x}\left[36x^3-30x^2-24x-10\right]}{\left(6x^2+2\right)^4}$$

b) Realizamos la integral de la derivada y obtendremos la función salvo un parámetro.

$$h(x)=\int h'(x)dx=\int 4x^3+x^2-4x-1dx=x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2-x+K$$

Para determinar el valor de K utilizamos que $h(2)=\frac{11}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} h(x)=x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2-x+K \\ h(2)=\frac{11}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{11}{3}=2^4+\frac{1}{3}\cdot2^3-2\cdot2^2-2+K\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{11}{3}=16+\frac{8}{3}-8-2+K\Rightarrow\frac{11}{3}-16-\frac{8}{3}+8+2=K\Rightarrow K=-5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{h(x)=x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2-x-5}$$

La función es $h(x)=x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2-x-5$.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Sean A y B dos sucesos de un mismo experimento aleatorio de los que se sabe que:

$$P(A-B)=0.3 \qquad P\left(A^C\right)=0.35 \qquad P(B)=0.55$$

a) **(0.8 puntos)** Calcule la probabilidad de que suceda al menos uno de ellos.
b) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que ocurra B, sabiendo que no ha ocurrido A.
c) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.
d) **(0.5 puntos)** Razone si los sucesos A y B son independientes.

$P(A-B)=0.3 \Rightarrow P\left(A\cap B^C\right)=0.3$

$P\left(A^C\right)=0.35 \Rightarrow P(A)=1-0.35=0.65$

$P(B)=0.55$

Podemos hacer una tabla de contingencia.

	B	**B^C**	
A		**0.30**	**0.65**
A^C			**0.35**
	0.55		**1**

Completamos la tabla

	B	**B^C**	
A	**0.35**	**0.30**	**0.65**
A^C	**0.20**	**0.15**	**0.35**
	0.55	**0.45**	**1**

a) Nos piden calcular $P(A\cup B)$.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ y mirando en la tabla tenemos:

$$P(A\cup B)=0.65+0.55-0.35=\boxed{0.85}$$

b) Nos piden calcular $P\left(B/A^C\right)$

$P\left(B/A^C\right)=\dfrac{P\left(A^C\cap B\right)}{P\left(A^C\right)}$ y mirando en la tabla tenemos:

$$P\left(B/A^C\right)=\frac{0.20}{0.35}=\boxed{\frac{4}{7}\simeq 0.571}$$

c) Nos piden calcular $P\left(A^C\cap B^C\right)$

Mirando en la tabla tenemos que $P\left(A^C\cap B^C\right)=\boxed{0.15}$

d) Nos piden comprobar si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.35 \\ P(A)P(B)=0.65\cdot 0.55=0.3575 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

A y B no son independientes.

OTRA FORMA DE HACERLO

Usando las fórmulas de probabilidad.

$$P\left(A^C\right)=0.35 \Rightarrow P(A)=1-0.35=0.65$$
$$P(B)=0.55$$

$$P(A-B)=P\left(A\cap B^C\right)=0.3$$
$$P(A)=P(A\cap B)+P\left(A\cap B^C\right) \Rightarrow 0.65=P(A\cap B)+0.30 \Rightarrow P(A\cap B)=0.35$$

a) Nos piden calcular $P(A\cup B)$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.65+0.55-0.35=\boxed{0.85}$$

b) Nos piden calcular $P\left(B/A^C\right)$

$$P\left(B/A^C\right)=\frac{P\left(A^C\cap B\right)}{P\left(A^C\right)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{0.35}=\frac{0.55-0.35}{0.35}=\boxed{\frac{4}{7}\simeq 0.571}$$

c) Nos piden calcular $P\left(A^C\cap B^C\right)$

$$P\left(A^C\cap B^C\right)=P\left((A\cup B)^C\right)=1-P(A\cup B)=1-0.85=\boxed{0.15}$$

d) Nos piden comprobar si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.35 \\ P(A)P(B)=0.65\cdot 0.55=0.3575 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

A y B no son independientes.

EJERCICIO 6

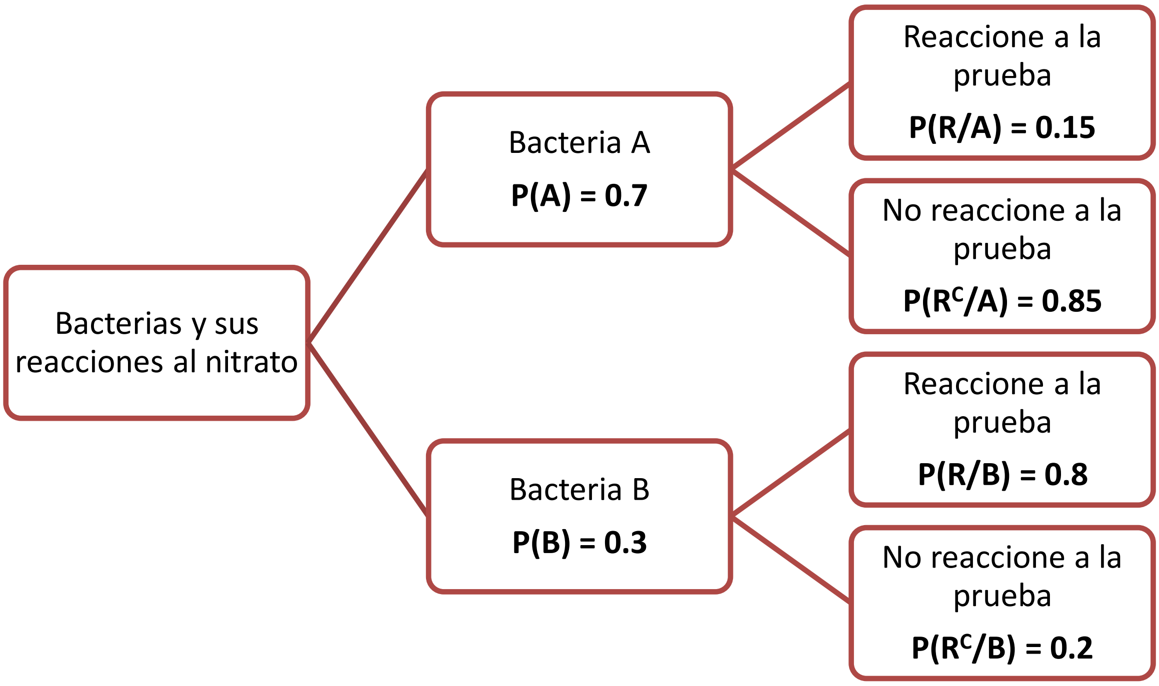
En una determinada muestra de suelo se han aislado dos tipos de bacterias, A y B, de las cuales el 70% son de A y el 30% de B. La probabilidad de que una bacteria de tipo A reaccione a la prueba del nitrato es 0.15 y para la bacteria B es 0.8. De las bacterias aisladas se selecciona una al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que reaccione a la prueba del nitrato.

b) **(1 punto)** Si la bacteria ha reaccionado a la prueba del nitrato, calcule la probabilidad de que sea del tipo B.

c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la bacteria sea del tipo A y no reaccione a la prueba del nitrato.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\mathrm{R}) = P(A)P(R/A) + P(B)P(R/B) = 0.7 \cdot 0.15 + 0.3 \cdot 0.8 = \boxed{0.345}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/R) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{P(B)P(R/B)}{P(R)} = \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.345} = \boxed{\frac{16}{23} \simeq 0.696}$$

c) Nos piden calcular $P\left(A \cap R^C\right)$.

$$P\left(A \cap R^C\right) = P(A)P\left(R^C / A\right) = 0.7 \cdot 0.85 = \boxed{0.595}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.25 puntos)** Se desea tomar una muestra aleatoria estratificada de las personas de un municipio, cuyos estratos son los siguientes tramos de edad: de 0 a 25 años, de 26 a 45, de 46 a 60 y de 61 años o más. En el primer tramo hay 15 000 personas, en el segundo hay 16 800, en el tercero 11400 y en el cuarto 6 000. Sabiendo que el muestreo se hace con afijación proporcional y se han elegido al azar 375 personas del primer tramo, calcule el tamaño de la muestra total y su composición.

b) **(1.25 puntos)** Dada la población $\{1,3,5\}$, establezca todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y determine la media y la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas estas muestras.

a) Se debe emplear muestreo aleatorio estratificado. Consiste en elegir por igual en cada grupo de la población a muestrear.
Como se han elegido del tramo de 0 a 25 años 375 personas y son 15000 la proporción es de $\frac{375}{15000}=\frac{1}{40}=0.025=2.5\%$

Debemos elegir un 2.5 % de las 16800 personas del tramo de 26 a 45 años, es decir, $\frac{16800\cdot 2.5}{100}=420$ personas.

Debemos elegir un 2.5 % de las 11400 personas del tramo de 46 a 60 años, es decir, $\frac{11400\cdot 2.5}{100}=285$ personas.

Debemos elegir un 2.5 % de las 6000 personas del tramo de 61 años o más, es decir, $\frac{6000\cdot 2.5}{100}=150$ personas.

El tamaño total de la muestra es 375 + 420 + 285 + 150 = 1230 personas, siendo 375 del tramo de 0 a 25 años, 420 del tramo de 26 a 45 años, 285 del tramo de 46 a 60 años y 150 del ramo de 61 años o más.

b) La media de los elementos de la población tiene el mismo valor que la media de las medias muestrales de tamaño 2.

$$\frac{1+3+5}{3}=3$$

La desviación típica de la población es $\sqrt{\frac{(1-3)^2+(3-3)^2+(5-3)^2}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

La desviación típica de las medias muestrales es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\simeq 1.15$

Calculamos de nuevo estos valores a partir de las muestras de tamaño 2 posibles.

Muestras de tamaño 2	1 1	1 3	1 5	3 1	3 3	3 5	5 1	5 3	5 5
Media de la muestra	1	2	3	2	3	4	3	4	5

Calculamos la media de las medias muestrales.

$$\bar{x}=\frac{1+2+3+2+3+4+3+4+5}{9}=\frac{27}{9}=3$$

La desviación típica de las muestras es:

$$\sigma=\sqrt{\frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{9}}=$$

$$=\sqrt{\frac{4+1+0+1+0+1+0+1+4}{9}}=\sqrt{\frac{12}{9}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

EJERCICIO 8

Se quiere estimar la proporción de imprentas de una región que incluyen el uso de celulosa reciclada en los libros que imprimen. Para ello, se ha tomado una muestra aleatoria de 50 imprentas de esa región y en ella hay 12 que usan dicho material.

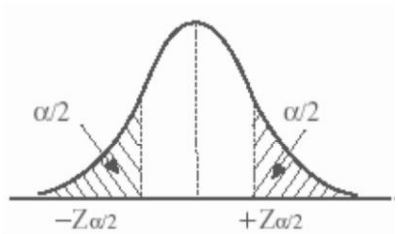
a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza al 95%, para estimar la proporción real de imprentas que usan celulosa reciclada.

b) **(1 punto)** Determine el tamaño mínimo de la muestra de imprentas de esa región que se deben seleccionar para que, manteniendo el mismo nivel de confianza y proporción muestral anteriores, la amplitud del intervalo sea como máximo de 0.2.

n = 50. $pr = \frac{12}{50} = 0.24$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.24 = 0.76$

a) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{50}} = 0.118$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.24 - 0.118,\quad 0.24 + 0.118) = (0.122, 0.358)$$

b) ¿n?

Con un nivel de confianza del 95% tenemos $z_{\alpha/2}$ = **1.96**

Si la amplitud del intervalo de confianza debe ser como máximo de 0.2 entonces el error debe ser la mitad, es decir, 0.1.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{n}} = 0.1 \Rightarrow \frac{0.1}{1.96} = \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{n}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{0.1}{1.96}\right)^2 = \frac{0.1824}{n} \Rightarrow n = \frac{0.1824}{\left(\frac{0.1}{1.96}\right)^2} = 70.07$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 71 imprentas.