PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) **(0.7 puntos)** Calcule A^{40} y $\left(A^t\right)^{30}$.

b) **(0.6 puntos)** Calcule $\left(A^{-1}+A\right)^2$.

c) **(1.2 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $\left(A^t+I_2\right)\cdot X = A^t - I_2$

EJERCICIO 2

Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x-3y\geq -9 \qquad x+y\leq 11 \qquad 6x+y\leq 36 \qquad x+2y\geq 6$$

a) **(1.5 puntos)** Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.

b) **(0.25 puntos)** ¿Pertenece el punto (5, 7) a la región factible anterior?

c) **(0.75 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y)=10x-6y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x\leq -1 \\ -3x^2+4 & si \quad -1<x<1 \\ 2x-1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f* en todo su dominio.

b) **(0.8 puntos)** Represente gráficamente la función *f*.

c) **(0.7 puntos)** Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función *f*, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

EJERCICIO 4

Una fábrica estima que sus costes de producción, expresados en miles de euros, vienen dados por la función $f(x)=x^2-6x+10$, donde x es la cantidad semanal a producir expresada en miles de kilogramos.

a) **(1 punto)** ¿Cuál debe ser la producción semanal para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es dicho coste?

b) **(1.5 puntos)** Calcule la recta tangente a la función de costes en el punto de abscisa $x = 4$. Represente gráficamente la función de costes y la recta tangente hallada.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una determinada ciudad tiene en la plantilla del ayuntamiento 1000 agentes de la policía local, 600 bomberos y 400 funcionarios de protección civil. En esta plantilla, el 42% de policías, el 20% de bomberos y el 50% de funcionarios de protección civil son mujeres. Se elige una persona al azar de la plantilla.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) **(1 punto)** Si la persona elegida es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que sea bombero?

EJERCICIO 6

Una urna A contiene 4 bolas rojas y 5 verdes y otra urna B contiene 6 bolas rojas y 3 verdes. Lanzamos dos dados y si la suma es mayor o igual a 9, extraemos una bola de la urna A y en caso contrario, la extraemos de la urna B.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea verde y de la urna B.

b) **(1 punto)** Halle la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Se quiere estudiar la proporción de ciudadanos enfermos de COVID-19 en una determinada población. Para ello, se elige una muestra al azar de 1000 ciudadanos, revelándose que el 15% de ellos están enfermos.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 95%, para estimar la proporción real de enfermos de COVID-19 en dicha población.

b) **(1 punto)** Determine el tamaño muestral mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de ciudadanos enfermos de COVID-19 en esa población sea inferior al 1%.

EJERCICIO 8

El peso de los paquetes de arroz de una marca comercial concreta sigue una ley Normal de media 1000 g y varianza 256 g^2.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que el peso medio de las muestras de tamaño 64 sea menor que 996 g.

b) **(1.5 puntos)** Tras varias denuncias presentadas por falta de peso en los citados paquetes, una organización de consumidores ha procedido a tomar una muestra de 64 paquetes, resultando que la suma de los pesos ha sido de 63744 g. Halle un intervalo de confianza al 90% para estimar el peso medio real de los paquetes de arroz de esa marca.

c) **(0.25 puntos)** A la vista del intervalo obtenido y teniendo en cuenta que el peso que marca el paquete es de 1000 g, ¿cree que la denuncia tiene base?

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

a) **(0.7 puntos)** Calcule A^{40} y $\left(A^t\right)^{30}$.

b) **(0.6 puntos)** Calcule $\left(A^{-1}+A\right)^2$.

c) **(1.2 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $\left(A^t+I_2\right)\cdot X = A^t - I_2$

a) Calculamos las potencias sucesivas de A en busca de una regularidad.

$$A^2 = A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}$$

....

$$\boxed{A^{40}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -40 & 1\end{pmatrix}}$$

Calculamos las potencias sucesivas de A^t en busca de una regularidad

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(A^t\right)^2 = A^t\cdot A^t=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(A^t\right)^3 = \left(A^t\right)^2\cdot A^t=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1-2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

....

$$\left(A^t\right)^{30}=\begin{pmatrix}1 & -30\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Calculamos la inversa de A.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Existe la inversa de A.

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de $\left(A^{-1} + A\right)^2$

$$A^{-1} + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left(A^{-1} + A\right)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

c) Despejamos X en la ecuación matricial $\left(A^t + I_2\right) \cdot X = A^t - I_2$.

$$\left(A^t + I_2\right) \cdot X = A^t - I_2 \Rightarrow X = \left(A^t + I_2\right)^{-1} \cdot \left(A^t - I_2\right)$$

Hallamos la inversa de $A^t + I_2$.

$$A^t + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left|A^t + I_2\right| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$\left(A^t + I_2\right)^{-1} = \frac{Adj\left(\left(A^t + I_2\right)^T\right)}{\left|A^t + I_2\right|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos los valores de las matrices y obtenemos la expresión de X.

$$A^t - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(A^t + I_2\right)^{-1} \cdot \left(A^t - I_2\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x-3y\geq -9 \quad x+y\leq 11 \quad 6x+y\leq 36 \quad x+2y\geq 6$$

a) **(1.5 puntos)** Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.

b) **(0.25 puntos)** ¿Pertenece el punto (5, 7) a la región factible anterior?

c) **(0.75 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y)=10x-6y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$5x-3y=-9$

x	$y=\frac{5x+9}{3}$
0	3
3	8

$x+y=11$

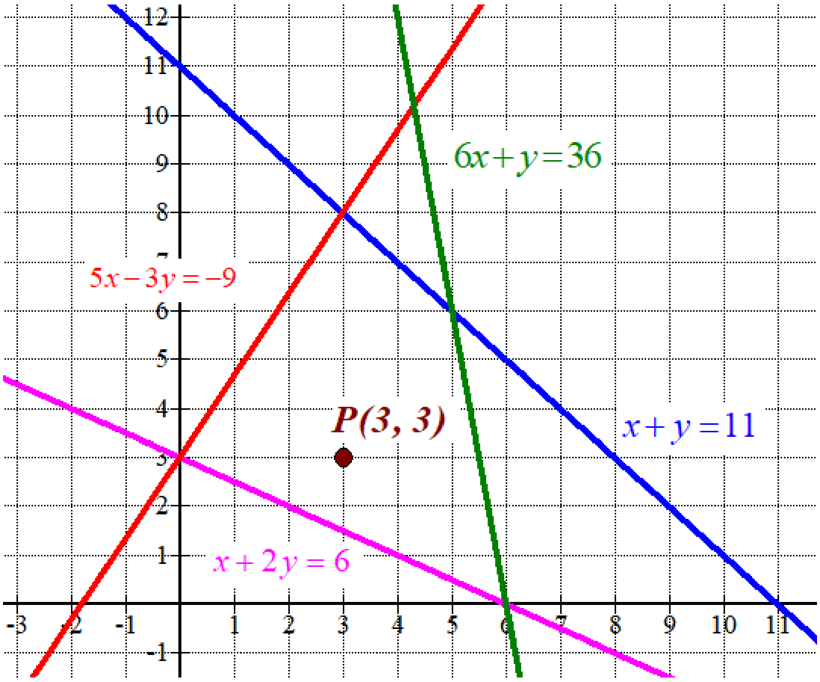
x	$y=11-x$
3	8
5	6

$6x+y=36$

x	$y=36-6x$
5	6
6	0

$x+2y=6$

x	$y=\frac{6-x}{2}$
0	3
6	0

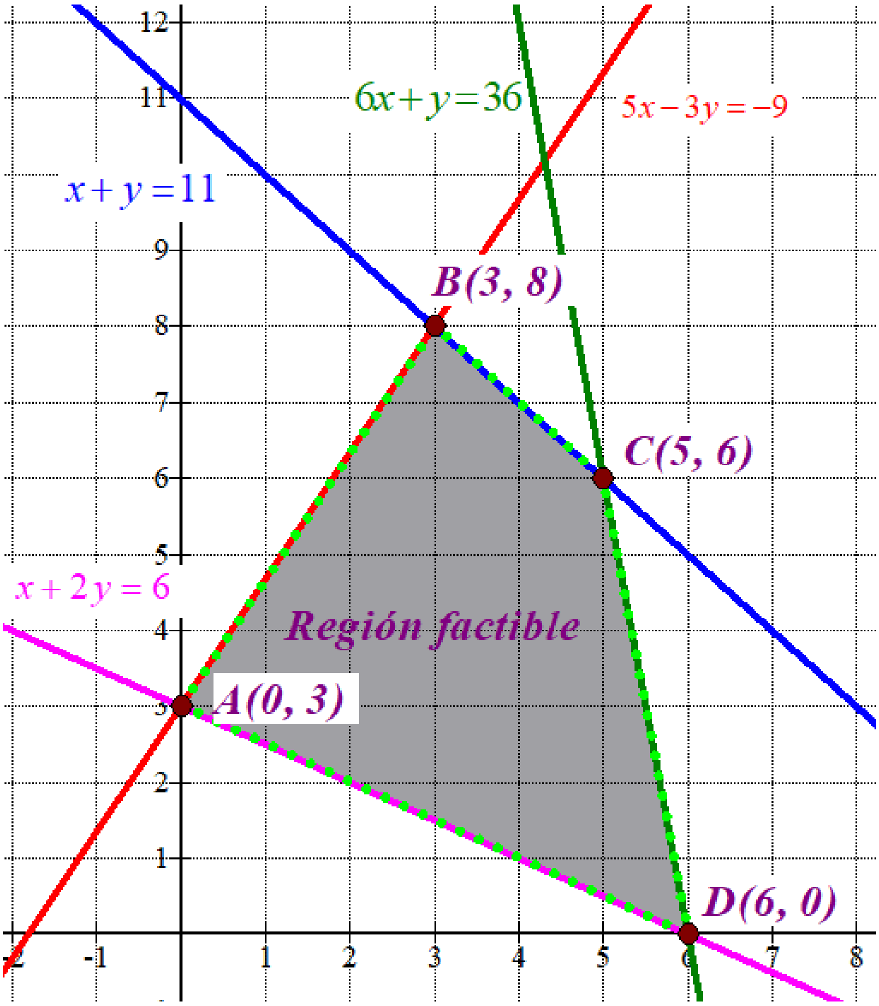


Como las restricciones son $5x-3y\geq -9 \quad x+y\leq 11 \quad 6x+y\leq 36 \quad x+2y\geq 6$ la región factible es una región que está por debajo de la recta roja, azul y verde, y por encima de la recta rosa.

Comprobamos que el punto P(3, 3) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

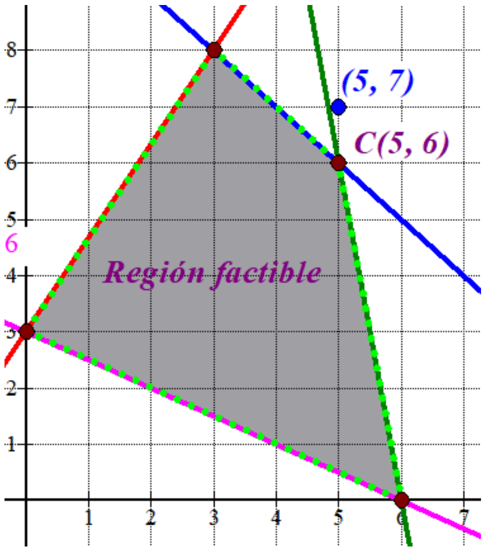
$$15-9\geq -9 \quad 3+3\leq 11 \quad 18+3\leq 36 \quad 3+6\geq 6$$ **¡Se cumplen todas!**

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible son A(0,3), B(3, 8), C(5, 6) y D(6, 0)

b) El punto (5, 7) está fuera de la región factible.



c) Para obtener el valor mínimo y máximo de $F(x,y)=10x-6y$ en la región factible valoramos la función en cada vértice.

A(0, 3) → $F(0,3)=0-18=-18$

B(3, 8) → $F(3,8)=30-48=-18$

C(5, 6) → $F(5,6)=50-36=14$

D(6, 0) → $F(6,0)=60-0=60$

El valor mínimo es –18 y se alcanza en A y en B. También se alcanza en cualquier punto del segmento AB.
El valor máximo es 60 y se alcanza en D(6, 0).

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x\leq -1 \\ -3x^2+4 & si \quad -1<x<1 \\ 2x-1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función *f* en todo su dominio.
b) **(0.8 puntos)** Represente gráficamente la función *f*.
c) **(0.7 puntos)** Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función *f*, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

a) En el intervalo $(-\infty,-1)$ la función es continua, pues el denominador se anula en $x = 0$ que no pertenece al intervalo.

En el intervalo $(-1,1)$ la función es continua y derivable, pues es una función polinómica.

En el intervalo $(1,+\infty)$ la función es continua y derivable, pues es una función polinómica.

¿Es continua en $x = -1$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{-1}=-1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}-3x^2+4=1 \\ f(-1)=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$$

No es continua en $x = -1$.

¿Es continua en $x = 1$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}-3x^2+4=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}2x-1=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=1$$

Es continua en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ y su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & si \quad x<-1 \\ -6x & si \quad -1<x<1 \\ 2 & si \quad x>1 \end{cases}$$

La función no es derivable en $x = -1$, pues no es continua.

¿La función es derivable en $x = 1$?

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}-6x=-6 \\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}2=2 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(1^-)\neq f'(1^+)$$

La función no es derivable en $x = 1$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$ y es derivable en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

b) Hacemos una tabla de valores.

$Si\ x\le -1$

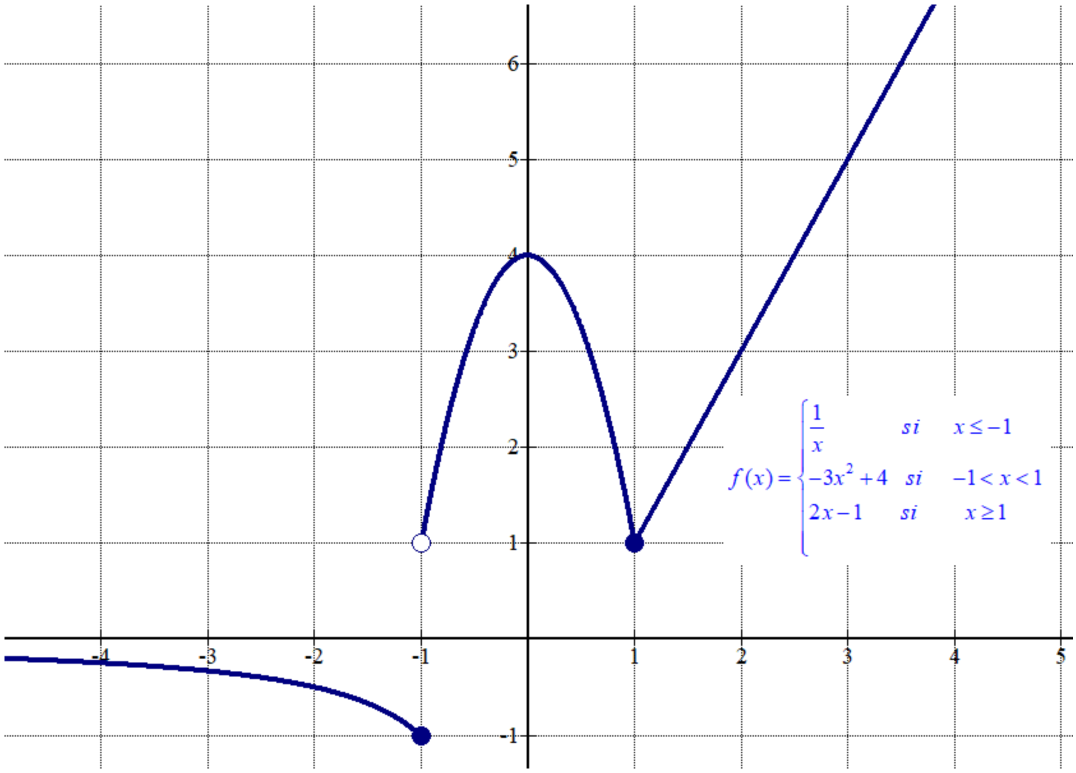
x	$f(x)=\frac{1}{x}$
-3	-0.33
-2	-0.5
-1	-1

$Si\ -1<x<1$

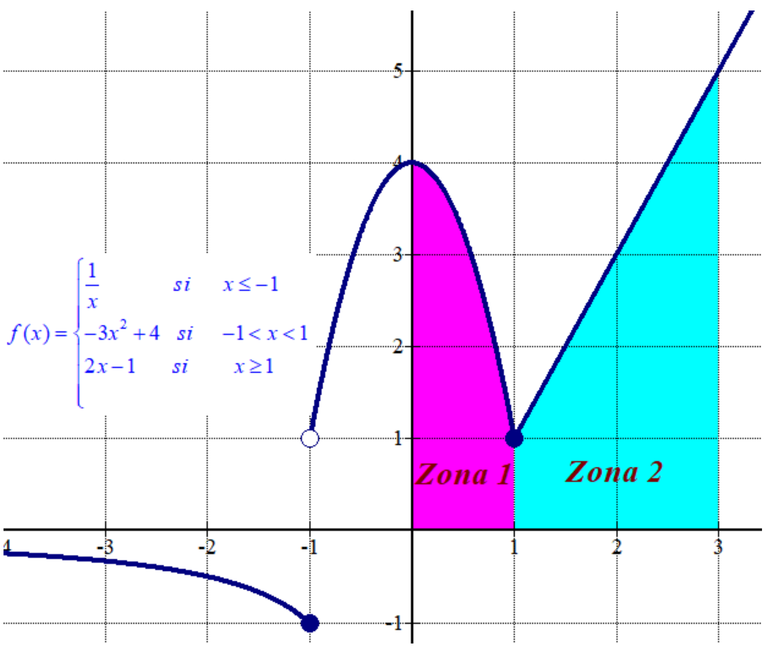
x	$f(x)=-3x^2+4$
-1	1¡No se incluye!
0	4
1	1¡No se incluye!

$Si\ x\ge 1$

x	$f(x)=2x-1$
1	1
2	3
3	5



c) La región de la cual queremos hallar el área la dividimos en dos partes (una en rosa y otra en azul):



$$\acute{A}rea\ Zona\,1 = \int_0^1 -3x^2 + 4dx = \left[-x^3 + 4x\right]_0^1 = \left[-1^3 + 4\cdot 1\right] - \left[-0^3 + 4\cdot 0\right] = 3$$

$$\acute{A}rea\ Zona\,2 = \int_1^3 2x - 1dx = \left[x^2 - x\right]_1^3 = \left[3^2 - 3\right] - \left[1^2 - 1\right] = 6$$

El área de la región pedida es $3 + 6 = 9\ u^2$.

EJERCICIO 4

Una fábrica estima que sus costes de producción, expresados en miles de euros, vienen dados por la función $f(x)=x^2-6x+10$, donde x es la cantidad semanal a producir expresada en miles de kilogramos.

a) **(1 punto)** ¿Cuál debe ser la producción semanal para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es dicho coste?

b) **(1.5 puntos)** Calcule la recta tangente a la función de costes en el punto de abscisa *x = 4*. Represente gráficamente la función de costes y la recta tangente hallada.

a) Calculamos la derivada de *f(x)* y averiguamos donde se anula:

$$f'(x)=2x-6$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

Sustituimos este valor en la derivada segunda: $f''(x)=2 \Rightarrow f''(3)=2>0$

La función presenta un mínimo en *x = 3*.

Como $f(3)=3^2-6\cdot 3+10=1$, los costes de producción mínimos son 1000 € y se consigue produciendo 3000 kilogramos semanalmente.

b) La recta tangente a la función de costes en el punto de abscisa *x = 4* tiene ecuación

$$y-f(4)=f'(4)(x-4)$$

Calculamos el valor de la función y la derivada en *x = 4*.

$$f(x)=x^2-6x+10 \Rightarrow f(4)=4^2-6\cdot 4+10=2$$
$$f'(x)=2x-6 \Rightarrow f'(4)=2\cdot 4-6=2$$

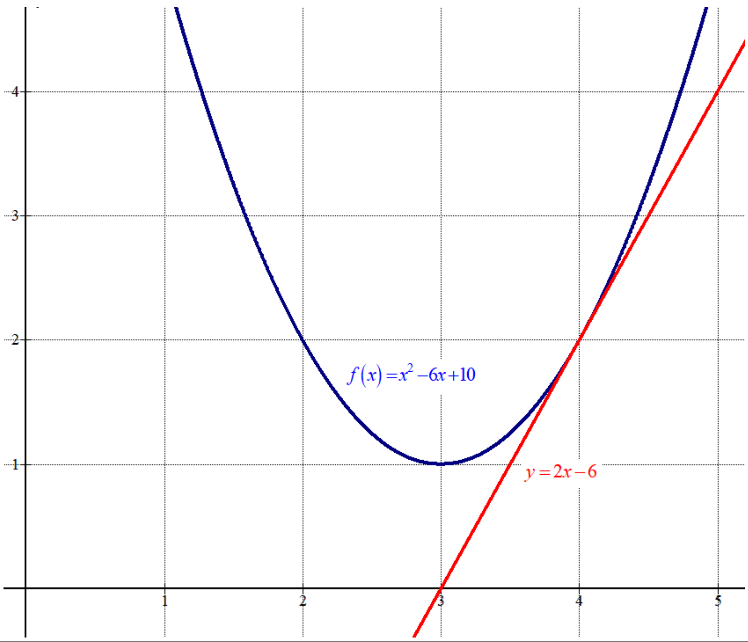
$$\left.\begin{array}{r} f(4)=2 \\ f'(4)=2 \\ y-f(4)=f'(4)(x-4) \end{array}\right\} \Rightarrow y-2=2(x-4) \Rightarrow y-2=2x-8 \Rightarrow \boxed{y=2x-6}$$

La recta tangente tiene ecuación $y=2x-6$.

Representamos la función y la tangente.

x	$f(x)=x^2-6x+10$
0	10
2	2
3	1
4	2
6	10

x	$y=2x-6$
3	0
4	2



BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una determinada ciudad tiene en la plantilla del ayuntamiento 1000 agentes de la policía local, 600 bomberos y 400 funcionarios de protección civil. En esta plantilla, el 42% de policías, el 20% de bomberos y el 50% de funcionarios de protección civil son mujeres. Se elige una persona al azar de la plantilla.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) **(1 punto)** Si la persona elegida es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que sea bombero?

Si el 42 % de los policías (1000) son mujeres. Habrán $\frac{1000 \cdot 42}{100} = 420$ mujeres policía.

Si el 20 % de los bomberos (600) son mujeres. Habrán $\frac{600 \cdot 20}{100} = 120$ mujeres bombero.

Si el 50 % de los funcionarios de protección civil (400) son mujeres. Habrán $\frac{400 \cdot 50}{100} = 200$ mujeres funcionario de protección civil.

En total hay 420 + 120 + 200 = 740 mujeres de un total de 1000 + 600 + 400 = 2000 empleados del ayuntamiento.

	Mujeres	**Hombres**	TOTAL
Policías	420	580	**1000**
Bomberos	120	480	**600**
Protección civil	200	200	**400**
TOTAL	**740**	**1260**	**2000**

a) Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que al elegir una persona sea mujer es

$$P(Mujer) = \frac{740}{2000} = \boxed{0.37}$$

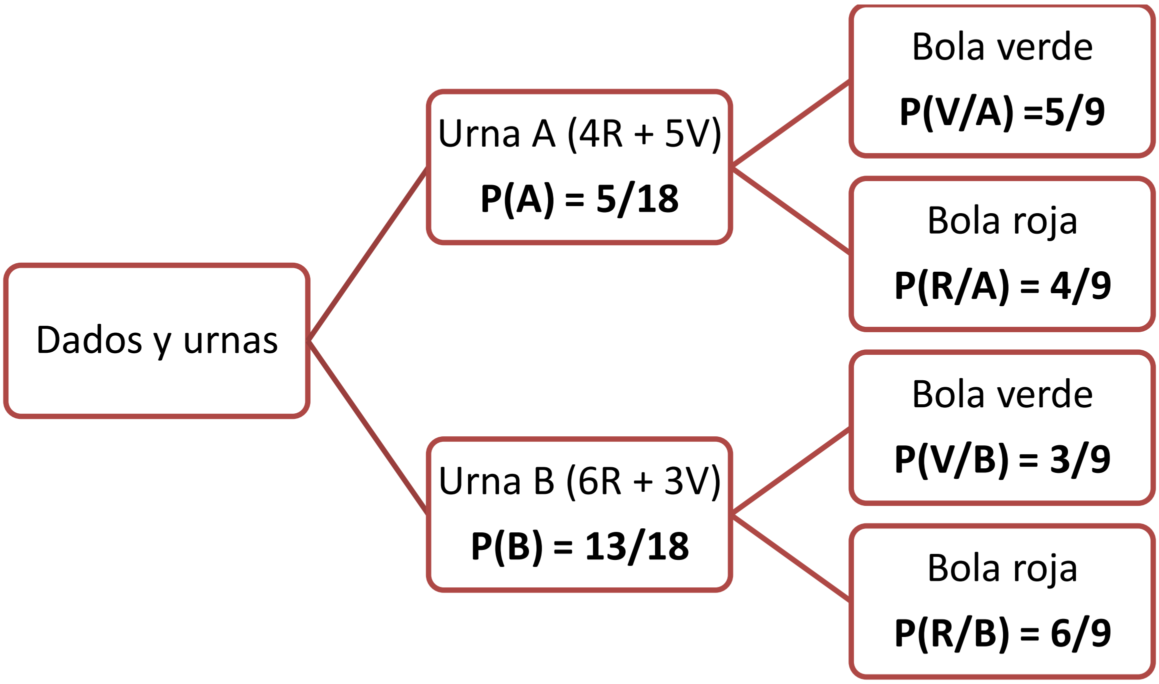
b) Hay 1260 hombres. De ellos 480 son bomberos.
Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que habiendo elegido un hombre este sea bombero es $\frac{480}{1260} = \boxed{\frac{8}{21} \simeq 0.381}$

EJERCICIO 6
Una urna A contiene 4 bolas rojas y 5 verdes y otra urna B contiene 6 bolas rojas y 3 verdes. Lanzamos dos dados y si la suma es mayor o igual a 9, extraemos una bola de la urna A y en caso contrario, la extraemos de la urna B.
a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea verde y de la urna B.
b) **(1 punto)** Halle la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

Realizamos un diagrama de árbol.
Llamamos A = “Elegir urna A”, B = “Elegir urna B”, V = “Sacar bola verde”, R = “Sacar bola roja”
La probabilidad de elegir la urna A es la probabilidad de sacar una suma mayor o igual a 9 al lanzar dos dados. Hay 36 resultados posibles y de ellos suman 9 o más cuando sale 5 + 4, 4 + 5, 6 + 3, 3 + 6, 5 + 5, 6 + 4, 4 + 6, 6 + 5, 5 + 6, 6 + 6. Hay solo 10 combinaciones favorables de las 36 posibles.

$$P(A)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

La probabilidad de elegir la urna B es $P(B)=1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$



a)

$$P(B\cap V)=P(B)P(V/B)=\frac{13}{18}\cdot\frac{3}{9}=\boxed{\frac{13}{54}\simeq 0.241}$$

b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R)=P(A)P(R/A)+P(B)P(R/B)=\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{9}+\frac{13}{18}\cdot\frac{6}{9}=\boxed{\frac{49}{81}\simeq 0.605}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Se quiere estudiar la proporción de ciudadanos enfermos de COVID-19 en una determinada población. Para ello, se elige una muestra al azar de 1000 ciudadanos, revelándose que el 15% de ellos están enfermos.

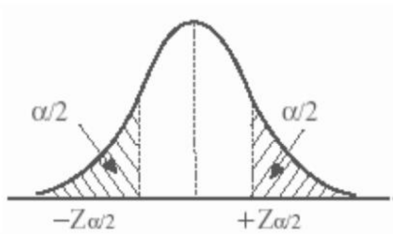
a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 95%, para estimar la proporción real de enfermos de COVID-19 en dicha población.

b) **(1 punto)** Determine el tamaño muestral mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de ciudadanos enfermos de COVID-19 en esa población sea inferior al 1%.

n = 1000. $pr = 0.15;\ qr = 1 - pr = 1 - 0.15 = 0.85$

a) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{1000}} = 0.022$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(pr - Error,\ pr + Error\right) = \left(0.15 - 0.022,\quad 0.15 + 0.022\right) = \left(0.128, 0.172\right)$$

b) ¿n?

Con un nivel de confianza del 95% tenemos $z_{\alpha/2}$ = **1.96**

El error debe ser inferior a 0.01.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{n}} = 0.01 \Rightarrow \frac{0.01}{1.96} = \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{n}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{0.01}{1.96}\right)^2 = \frac{0.15 \cdot 0.85}{n} \Rightarrow n = \frac{0.15 \cdot 0.85}{\left(\frac{0.01}{1.96}\right)^2} = 4898.04$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 4899 ciudadanos.

EJERCICIO 8
El peso de los paquetes de arroz de una marca comercial concreta sigue una ley Normal de media 1000 g y varianza 256 g^2.
a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que el peso medio de las muestras de tamaño 64 sea menor que 996 g.
b) **(1.5 puntos)** Tras varias denuncias presentadas por falta de peso en los citados paquetes, una organización de consumidores ha procedido a tomar una muestra de 64 paquetes, resultando que la suma de los pesos ha sido de 63744 g. Halle un intervalo de confianza al 90% para estimar el peso medio real de los paquetes de arroz de esa marca.
c) **(0.25 puntos)** A la vista del intervalo obtenido y teniendo en cuenta que el peso que marca el paquete es de 1000 g, ¿cree que la denuncia tiene base?

X = Peso de los paquetes de arroz de una marca comercial concreta en gramos.

La varianza es 256 y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{256} = 16$

X = N(1000, 16)

a) Si X = N(1000, 16) la distribución de medias de tamaño 64 sigue una distribución $\overline{X_{64}} = N\left(1000, \frac{16}{\sqrt{64}}\right) \Rightarrow \overline{X_{64}} = N(1000, 2)$

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{64}} < 996\right)$.

$$P\left(\overline{X_{64}} < 996\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\overline{X_{64}} - 1000}{2} < \frac{996-1000}{2}\right) =$$

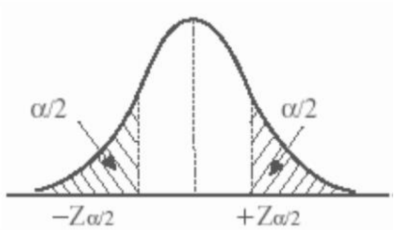
$$= P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = \{\text{Mirando en la tabla N(0, 1)}\} =$$

$$= 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

b) n = 64. La media es $\bar{x} = \frac{63744}{64} = 996$

Con un nivel de confianza del 90 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{16}{\sqrt{64}} = 3.29$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\overline{x}-Error, \overline{x}+Error\right)=\left(996-3.29, \quad 996+3.29\right)=\left(992.71, 999.29\right)$$

c) Con el nivel de confianza del 90% la denuncia tiene base, porque el extremo superior del intervalo no llega a los 1000 g y el peso de los paquetes de arroz que afirman es de 1000 g no está en el intervalo. Lo normal es que pesen menos de 1000 gramos.