Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 5

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Considere la función $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a *f(x)* en el punto de abscisa *x = 0.* [1,25 puntos]

b) Encuentre en que intervalos la función *f(x)* es creciente y en cuales es decreciente. Indique también los extremos relativos y diga si son máximos o mínimos. [1,25 puntos]

2. Para vender un exceso de producción de 100 bañadores y 200 pares de chancletas, una tienda de ropa de playa prepara dos promociones: la oferta azul y la oferta amarilla. La oferta azul consiste en un lote con tres pares de chancletas y un bañador por 50€, y la oferta amarilla, en un lote con un par de chancletas y dos bañadores por 30€. Para cumplir los propósitos de la tienda, el número de lotes vendidos de la oferta azul debería ser la mitad o más que el número de lotes vendidos de la oferta amarilla.

a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones de venta que tiene la tienda. [1,25 puntos]

b) ¿Cuántos lotes de cada tipo tendrán que venderse para optimizar los ingresos? ¿Cuáles serán esos ingresos? [1,25 puntos]

3. Una empresa de productos lácteos ingresó el pasado año un total de 1.800.000 € por las ventas de quesos. Las exportaciones a la Unión Europea aportaron tantos ingresos como las ventas a nivel estatal y las exportaciones a países extracomunitarios juntas. Este año la empresa ha ingresado 1.950.000€ y sabemos que las ventas estatales han disminuido un 5%, las exportaciones a la Unión Europea han aumentado un 15% y las exportaciones a países extracomunitarios han aumentado un 10%. Determine las cantidades que ingresó por cada concepto (ventas a nivel estatal, exportaciones a la Unión Europea y exportaciones a países extracomunitarios) el año pasado, así como las cantidades que ha ingresado este año. [2,5 puntos]

4. Suponga que la temperatura del agua del mar en una zona concreta es dada por la función $f(x)=\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+4}$, en la que x representa la profundidad en metros negativos (por ejemplo, *f(–5)* representa el valor de la temperatura del agua en grados Celsius a 5 metros de profundidad).

a) ¿Cuál es la temperatura del agua en la superficie? ¿A qué profundidades la temperatura es de cero grados? ¿Hacia qué valor tiende la temperatura cuando bajamos a mucha profundidad? [1,25 puntos]

b) Calcule a qué profundidad la temperatura es más baja y cuál es el valor de esa temperatura mínima. [1,25 puntos]

5. Hacemos dos pruebas de consumo de combustible en un vehículo: en la primera, el vehículo recorre 200 km por carretera y 100 km por ciudad, y consume un total de 17 litros, mientras que en la segunda recorre 300 km por carretera y 50 km por ciudad, y consume 17,5 litros. Suponiendo que los consumos medios por carretera y por ciudad son siempre constantes:

a) ¿Cuál es el consumo medio por 100 km en cada una de las dos pruebas? [1,25 puntos]

b) ¿Cuántos litros consumirá el mismo vehículo si en una tercera prueba recorre 400 km por carretera y 150 km por ciudad? [1,25 puntos]

6. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) Calcule A^2, A^3 y A^4. [1,25 puntos]

b) Deduce cuánto valdrá la matriz A^{100}. [1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Considere la función $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a *f(x)* en el punto de abscisa *x = 0.* [1,25 puntos]

b) Encuentre en que intervalos la función *f(x)* es creciente y en cuales es decreciente. Indique también los extremos relativos y diga si son máximos o mínimos. [1,25 puntos]

a) La recta tangente a la gráfica de esta función en el punto de abscisa *x* = 0 tiene ecuación:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

Hallamos *f(0)* y *f ´(0)* y obtenemos la expresión de la recta tangente.

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\frac{2\cdot 0}{0^2+1}=0 \\ f'(0)=\frac{-2\cdot 0^2+2}{(0^2+1)^2}=2 \\ y-f(0)=f'(0)(x-0) \end{array}\right\}\Rightarrow y-0=2(x-0)\Rightarrow \boxed{y=2x}$$

La ecuación de la recta tangente en *x = 0* es $y=2x$.

b) Igualamos la derivada a cero en busca de los puntos críticos.

$$f'(x)=0\Rightarrow \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow -2x^2+2=0\Rightarrow 2x^2=2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale $f'(-2)=\frac{-2(-2)^2+2}{((-2)^2+1)^2}=\frac{-6}{25}<0$. La función decrece en $(-\infty,-1)$.

En el intervalo $(-1,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=2>0$. La función crece en $(-1,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=\frac{-2\cdot 2^2+2}{(2^2+1)^2}=\frac{-6}{25}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:

La función decrece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(-1,1)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = -1$. Como $f(-1)=\dfrac{2(-1)}{(-1)^2+1}=\dfrac{-2}{2}=-1$ las coordenadas del mínimo relativo son (–1, –1).

La función presenta un máximo relativo en $x = 1$. Como $f(1)=\dfrac{2\cdot 1}{1^2+1}=\dfrac{2}{2}=1$ las coordenadas del máximo relativo son (1, 1).

2. Para vender un exceso de producción de 100 bañadores y 200 pares de chancletas, una tienda de ropa de playa prepara dos promociones: la oferta azul y la oferta amarilla. La oferta azul consiste en un lote con tres pares de chancletas y un bañador por 50€, y la oferta amarilla, en un lote con un par de chancletas y dos bañadores por 30€. Para cumplir los propósitos de la tienda, el número de lotes vendidos de la oferta azul debería ser la mitad o más que el número de lotes vendidos de la oferta amarilla.

a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones de venta que tiene la tienda. [1,25 puntos]

b) ¿Cuántos lotes de cada tipo tendrán que venderse para optimizar los ingresos? ¿Cuáles serán esos ingresos? [1,25 puntos]

a) Llamamos "x" al número de lotes de la oferta azul e "y" al número de lotes de la oferta amarilla.

Hacemos una tabla para organizar los datos.

	Nº bañadores	Nº chancletas	Ingresos
Nº lotes azul (x)	x	3x	50x
Nº lotes amarilla (y)	2y	y	30y
TOTAL	$x+2y$	$3x+y$	$50x+30y$

Queremos maximizar los ingresos (función objetivo) → $f(x,y)=50x+30y$

Las restricciones planteadas en el problema las expresamos como inecuaciones.

"Disponen de 100 bañadores y 200 pares de chancletas" → $x+2y\le 100;\ 3x+y\le 200$

"El número de lotes vendidos de la oferta azul debería ser la mitad o más que el número de lotes vendidos de la oferta amarilla" → $x\ge \frac{y}{2}$ → $y\le 2x$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y\le 100 \\ 3x+y\le 200 \\ y\le 2x \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas que la delimitan.

$x+2y=100$

x	$y=\frac{100-x}{2}$
20	40
60	20

$3x+y=200$

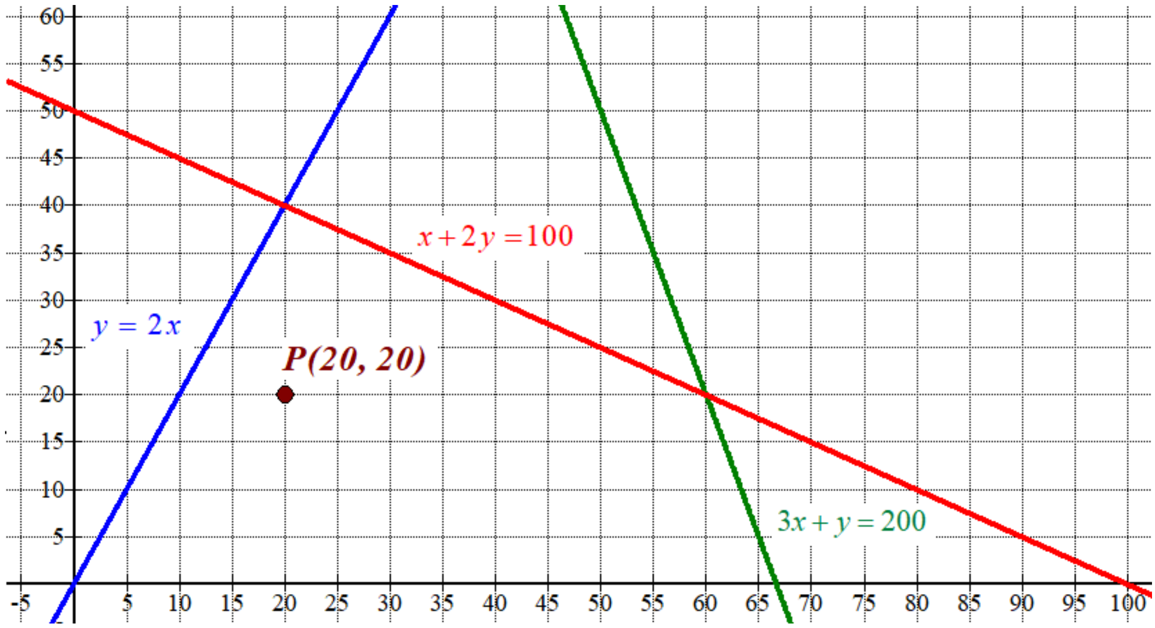
x	$y=200-3x$
0	200
60	20

$y=2x$

x	$y=2x$
0	0
10	20

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer Cuadrante

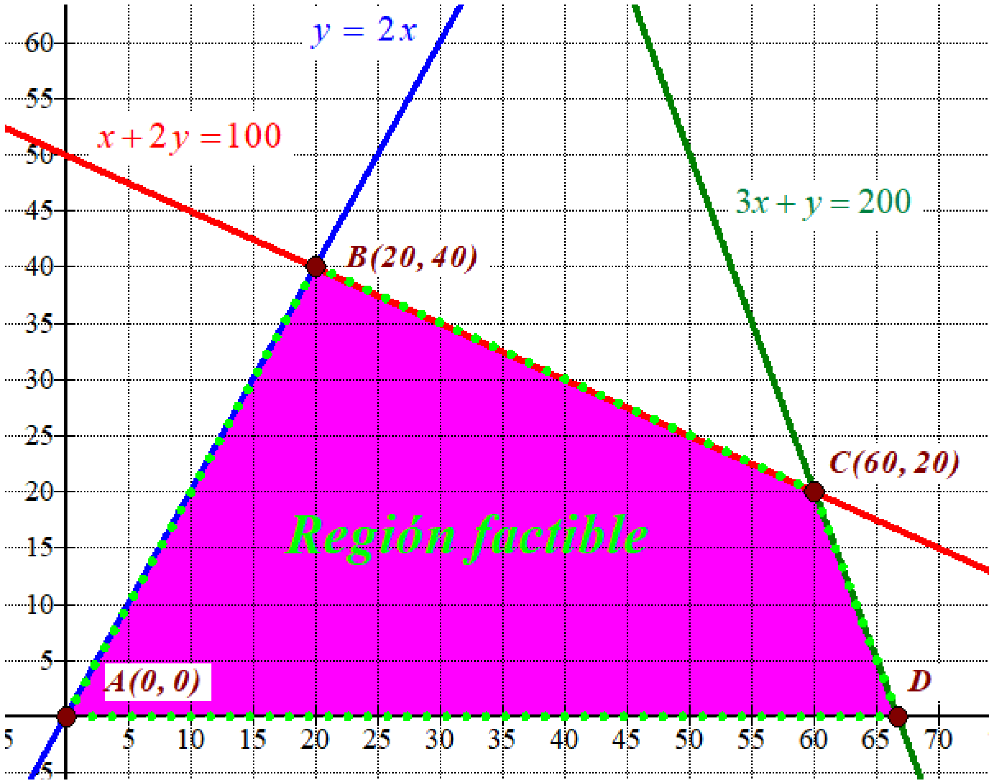


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+2y\le 100 \\ 3x+y\le 200 \\ y\le 2x \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul, roja y verde.

Comprobamos que el punto P(20, 20) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 20+40\le 100 \\ 60+20\le 200 \\ 20\le 40 \\ 20\ge 0;\ 20\ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas del vértice D resolviendo el sistema correspondiente:

$$D \rightarrow \left.\begin{array}{l} y=0 \\ 3x+2y=200 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=200 \Rightarrow x=\frac{200}{3} \Rightarrow \boxed{D(200/3,0)}$$

b) Valoramos la función objetivo $f(x,y)=50x+30y$ en cada vértice de la región factible para determinar su valor máximo en la región factible.

A(0, 0) → $f(0,0)=0$

B(20, 40) → $f(20,40)=1000+1200=2200$

C(60, 20) → $f(60,20)=3000+600=3600$ ¡Máximo!

C(200/3, 0) → $f\left(\frac{200}{3},0\right)=50\frac{200}{3}+0=\frac{10000}{3}\simeq 3333$

Para obtener unos ingresos máximos se deben vender 60 lotes de la oferta azul y 20 de la oferta amarilla. Conseguimos unos ingresos máximos de 3600 €.

3. Una empresa de productos lácteos ingresó el pasado año un total de 1.800.000 € por las ventas de quesos. Las exportaciones a la Unión Europea aportaron tantos ingresos como las ventas a nivel estatal y las exportaciones a países extracomunitarios juntas. Este año la empresa ha ingresado 1.950.000€ y sabemos que las ventas estatales han disminuido un 5%, las exportaciones a la Unión Europea han aumentado un 15% y las exportaciones a países extracomunitarios han aumentado un 10%. Determine las cantidades que ingresó por cada concepto (ventas a nivel estatal, exportaciones a la Unión Europea y exportaciones a países extracomunitarios) el año pasado, así como las cantidades que ha ingresado este año. [2,5 puntos]

Consideramos las siguientes variables:

x: importe de las ventas a nivel estatal del año pasado,
y: importe de las exportaciones a Europa del año pasado,
z: importe de las exportaciones a países no comunitarios el pasado año.

"Ingresó el pasado año un total de 1.800.000 € por las ventas de quesos" → $x+y+z=1.800.000$

"Las exportaciones a la Unión Europea aportaron tantos ingresos como las ventas a nivel estatal y las exportaciones a países extracomunitarios juntas" → $y=x+z$

"Este año la empresa ha ingresado 1.950.000€ y sabemos que las ventas estatales han disminuido un 5% (el 95% las del año pasado), las exportaciones a la Unión Europea han aumentado un 15% (un 115 % las del año pasado) y las exportaciones a países extracomunitarios han aumentado un 10% (un 110 % las del año pasado)" → $0.95x+1.15y+1.10z=1.950.000$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1800000 \\ y=x+z \\ 0.95x+1.15y+1.10z=1950000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+x+z+z=1800000 \\ 0.95x+1.15(x+z)+1.10z=1950000 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+2z=1800000 \\ 0.95x+1.15x+1.15z+1.10z=1950000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=900000 \\ 2.1x+2.25z=1950000 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=900000-z \\ 2.1x+2.25z=1950000 \end{array}\right\} \Rightarrow 2.1(900000-z)+2.25z=1950000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1890000-2.1z+2.25z=1950000 \Rightarrow 0.15z=60000 \Rightarrow \boxed{z=\frac{60000}{0.15}=400000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=900000-400000=500000} \Rightarrow \boxed{y=500000+400000=900000}$$

Las ventas el año pasado a nivel estatal han sido de 500 000 €, las exportaciones a la Unión Europea han sido de 900 000 € y las exportaciones a países extracomunitarios de 400 000 €.
Las ventas en el año actual han sido de 500 000 · 0.95 = 475 000 € a nivel estatal, las exportaciones a Europa han tenido un valor de 900 000 · 1.15 = 1 035 000 € y las exportaciones a países extracomunitarios de 400 000 · 1.10 = 440 000 €.

4. Suponga que la temperatura del agua del mar en una zona concreta está dada por la función $f(x)=\frac{x^2+5x+4}{x^2+4}$, en la que x representa la profundidad en metros negativos (por ejemplo, $f(-5)$ representa el valor de la temperatura del agua en grados Celsius a 5 metros de profundidad).
a) ¿Cuál es la temperatura del agua en la superficie? ¿A qué profundidades la temperatura es de cero grados? ¿Hacia qué valor tiende la temperatura cuando bajamos a mucha profundidad?
[1,25 puntos]
b) Calcule a qué profundidad la temperatura es más baja y cuál es el valor de esa temperatura mínima.
[1,25 puntos]

a) En la superficie la temperatura es *f(0)*.

$$f(0)=\frac{0^2+5\cdot 0+4}{0^2+4}=1$$

La temperatura es de 1º.

¿A qué profundidades la temperatura es de cero grados?
Buscamos cuando la función se anula (la temperatura es 0º).

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{x^2+5x+4}{x^2+4} \\ f(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2+5x+4}{x^2+4}=0 \Rightarrow x^2+5x+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-16}}{2}=\frac{-5\pm 3}{2}=\begin{cases} \frac{-5+3}{2}=\boxed{-1=x} \\ \frac{-5-3}{2}=\boxed{-4=x} \end{cases}$$

La temperatura es de 0º a 1 y a 4 metros de profundidad.

¿Hacia qué valor tiende la temperatura cuando bajamos a mucha profundidad?

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+5x+4}{x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}=\frac{1+0+0}{1+0}=\boxed{1}$$

La temperatura tiende a estabilizarse en 1º C a mucha profundidad.

b) Buscamos los extremos de la función usando la derivada.

$$f(x)=\frac{x^2+5x+4}{x^2+4} \Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+5)(x^2+4)-(x^2+5x+4)(2x)}{(x^2+4)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{2x^3}+\cancel{8x}+5x^2+20-\cancel{2x^3}-10x^2-\cancel{8x}}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{-5x^2+20}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=\dfrac{-5x^2+20}{\left(x^2+4\right)^2} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{-5x^2+20}{\left(x^2+4\right)^2}=0\Rightarrow -5x^2+20=0\Rightarrow 5x^2=20\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{20}{5}=4\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Existen dos puntos críticos: $x = -2$ y $x = 2$.
Como tratamos con un caso real y solo tiene sentido el valor negativo, pues hablamos de profundidad, estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = -2$.

En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$f'(-3)=\dfrac{-5(-3)^2+20}{\left((-3)^2+4\right)^2}=\dfrac{-25}{256}<0$. La función decrece en $(-\infty,-2)$.

En el intervalo $(-2,2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{-5\cdot 0^2+20}{\left(0^2+4\right)^2}=\dfrac{20}{16}>0$.

La función crece en $(-2,2)$.

En $x = -2$ hay un mínimo de la función. Como $f(-2)=\dfrac{(-2)^2+5(-2)+4}{(-2)^2+4}=\dfrac{-1}{4}$.

A dos metros de profundidad la temperatura es mínima siendo de –1/4 de grado.

5. Hacemos dos pruebas de consumo de combustible en un vehículo: en la primera, el vehículo recorre 200 km por carretera y 100 km por ciudad, y consume un total de 17 litros, mientras que en la segunda recorre 300 km por carretera y 50 km por ciudad, y consume 17,5 litros. Suponiendo que los consumos medios por carretera y por ciudad son siempre constantes:
a) ¿Cuál es el consumo medio por 100 km en cada una de las dos pruebas? [1,25 puntos]
b) ¿Cuántos litros consumirá el mismo vehículo si en una tercera prueba recorre 400 km por carretera y 150 km por ciudad? [1,25 puntos]

a) En la primera prueba ha consumido 17 litros por recorrer 300 km, por tanto la media es de 0.057 litros por km o, equivalentemente, 5.7 litros por 100 km.
En la segunda prueba ha consumido 17.5 litros por recorrer por 350 km, por tanto la media es de 0.05 litros por km o, equivalentemente, 5 litros por 100 km.

b) Llamamos x = litros consumidos por 100 km por carretera e y = litros consumidos por 100 km por ciudad.
Queremos calcular el consumo en litros en 400 km por carretera y 150 por ciudad, por tanto queremos calcular: $4x+1.5y$.
De las dos primeras vueltas sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=17 \\ 3x+0.5y=17.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=17-2x \\ 3x+0.5y=17.5 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x+0.5(17-2x)=17.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+8.5-x=17.5 \Rightarrow 2x=9 \Rightarrow \boxed{x=\frac{9}{2}=4.5} \Rightarrow \boxed{y=17-2\cdot 4.5=8}$$

El consumo en carretera es de 4.5 litros por 100 km. El consumo por ciudad es de 8 litros por 100 km.

Recorriendo 400 km por carretera y 150 km por ciudad consumirá $4.5\cdot 4+8\cdot 1.5=30$ litros.

6. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) Calcule A^2, A^3 y A^4. [1,25 puntos]

b) Deduce cuánto valdrá la matriz A^{100}. [1,25 puntos]

a)

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+a & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 2a^2+a^2 & a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 3a^3+a^3 & a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 4a^3 & a^4 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a^{2-1} & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2 & a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^{3-1} & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 4a^3 & a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 4a^{4-1} & a^4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, sabemos que $A^{100} = \begin{pmatrix} a^{100} & 0 \\ 100a^{100-1} & a^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{100} & 0 \\ 100a^{99} & a^{100} \end{pmatrix}$