	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2021-2022** **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (2 puntos) Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de a para que A tenga inversa.

b) Calcule los valores de a para que la solución del sistema $(A-B)X = Y$ sea

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A.2. (2 puntos) La plataforma digital Plusfix va a lanzar un nuevo canal de cine y deporte y tiene que elaborar una propuesta piloto de contenidos, teniendo en cuenta que el tiempo dedicado al cine no puede ser mayor que el tiempo dedicado al deporte. La propuesta piloto debe tener una duración entre 600 y 900 minutos, debe tener al menos 200 minutos de cine y como mucho 500 minutos de deporte. Además, con la emisión de la propuesta la plataforma obtiene 15 € de beneficio por cada minuto de emisión de cine y 10 € de beneficio por cada minuto de emisión de deporte. Determine cuántos minutos de cine y cuántos de deporte debe tener la propuesta para obtener el máximo beneficio y obtenga el beneficio que obtiene la plataforma con dicha propuesta.

A.3. (2 puntos)

a) Halle

$$\int_0^1 \frac{x}{2x^2+5}\,dx.$$

b) Considere

$$f(x) = \frac{x}{2x^2+5} \text{ y } g(x) = \ln(x).$$

Halle la derivada de la función compuesta $f \circ g(x)$.

A.4. (2 puntos) Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo experimento aleatorio. Suponga que $P(A) = 0,7$, $P(B^C) = 0,7$ y $P(A \cap B) = 0,2$.

a) ¿Son A y B independientes? Justifique la respuesta.

b) Calcule $P(A^C \cap B^C)$.

Nota: A^C y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.

A.5. (2 puntos) El peso en gramos de ciertas bolsas de palomitas se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200. Determine un intervalo de confianza del 95% para el peso medio de dichas bolsas de palomitas.
b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 gramos, con un nivel de confianza del 90%.

B.1. (2 puntos) Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=2 \\ ax-z=0 \\ ay+z=a \end{array}\right\}$$

a) Determine *a* para que el sistema NO sea compatible determinado.
b) Resuelva el sistema para *a = 2*.

B.2. (2 puntos) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax^2-1, & si \;\; x\le 1 \\ (x-a)^2, & si \;\; x>1 \end{cases}$

a) Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen que *f* sea una función continua en su dominio.
b) Para *a = 1/2*, determine, si existen, los puntos de corte de la gráfica de *f* con el eje de las *x*.

B.3. (2 puntos) Un ensayo clínico indica que la cantidad de glucosa en sangre en ratones tras la ingesta de un determinado fármaco depende del tiempo transcurrido, *t* (en minutos), según la siguiente función expresada en mg/dl:

$$f(t)=90+Ct^2e^{-t/5},\; 0\le t\le 60$$

a) Obtenga razonadamente el valor de la constante *C* sabiendo que la tasa de variación instantánea de la cantidad de glucosa a los 5 minutos de la ingesta del producto es 15/e.
b) Para *C = 3*, indique a partir de qué momento disminuye la cantidad de glucosa en sangre. Señale también la cantidad máxima de glucosa en sangre alcanzada tras la ingesta del fármaco.
Nota: Expresa los resultados con 2 cifras decimales.

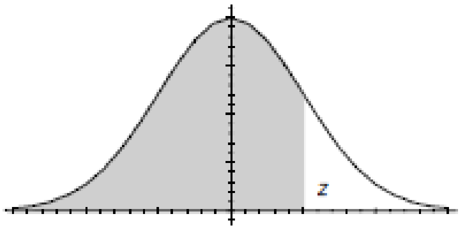
B.4. (2 puntos) Un virus muy peligroso está presente en el 5% de la población nacional. Se tiene un test para detectar la presencia del virus que es correcto en el 85% de los casos. Es decir, entre los portadores del virus, el test ha dado positivo el 85% de las veces y entre los no portadores ha dado negativo el 85% de las veces.
a) Si se practica el test a un individuo de la población escogido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dé positivo?
b) Si da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo escogido realmente sea un portador del virus?

B.5. (2 puntos) El 64% de los individuos de una población tienen una misma característica. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.
a) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con esa característica de la muestra?
b) Halle la probabilidad de que más del 70% de los individuos de la muestra posean dicha característica.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. (2 puntos) Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de a para que A tenga inversa.
b) Calcule los valores de a para que la solución del sistema $(A-B)X = Y$ sea

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Para que la matriz A tenga inversa debe tener determinante no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{vmatrix} = -a + a - 2a + a^2 = a^2 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ o \\ a = 2 \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de “a” distinto de 0 y de 2.

b) Sustituimos y resolvemos la ecuación matricial.

$$A - B = \begin{pmatrix} -a & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & a & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)X = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} -a-1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = 0 \\ -a+1 = 2 \rightarrow \boxed{a = -1} \end{cases}$$

El valor buscado es $a = -1$.

A.2. (2 puntos) La plataforma digital Plusfix va a lanzar un nuevo canal de cine y deporte y tiene que elaborar una propuesta piloto de contenidos, teniendo en cuenta que el tiempo dedicado al cine no puede ser mayor que el tiempo dedicado al deporte. La propuesta piloto debe tener una duración entre 600 y 900 minutos, debe tener al menos 200 minutos de cine y como mucho 500 minutos de deporte. Además, con la emisión de la propuesta la plataforma obtiene 15 € de beneficio por cada minuto de emisión de cine y 10 € de beneficio por cada minuto de emisión de deporte. Determine cuántos minutos de cine y cuántos de deporte debe tener la propuesta para obtener el máximo beneficio y obtenga el beneficio que obtiene la plataforma con dicha propuesta.

Llamemos x = tiempo dedicado al cine, y = tiempo dedicado al deporte.

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x,y)=15x+10y$.

Las restricciones del problema son:

"Las cantidades deben ser positivas" → $x\geq 0;\quad y\geq 0$

"El tiempo dedicado al cine no puede ser mayor que el tiempo dedicado al deporte" → $x\leq y$

"La propuesta piloto debe tener una duración entre 600 y 900 minutos" → $600\leq x+y\leq 900$

"Debe tener al menos 200 minutos de cine y como mucho 500 minutos de deporte" → $200\leq x;\quad y\leq 500$

Reuniendo todas las restricciones tenemos el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\quad y\geq 0 \\ x\leq y \\ 600\leq x+y\leq 900 \\ 200\leq x;\quad y\leq 500 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x\geq 0;\quad y\geq 0 \\ y\geq x \\ 600\leq x+y\leq 900 \\ 200\leq x \\ y\leq 500 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$y=x$

x	$y=x$
0	0
100	100

$x+y=600$

x	$y=600-x$
0	600
400	200

$x+y=900$

x	$y=900-x$
0	900
400	500

$x=200$

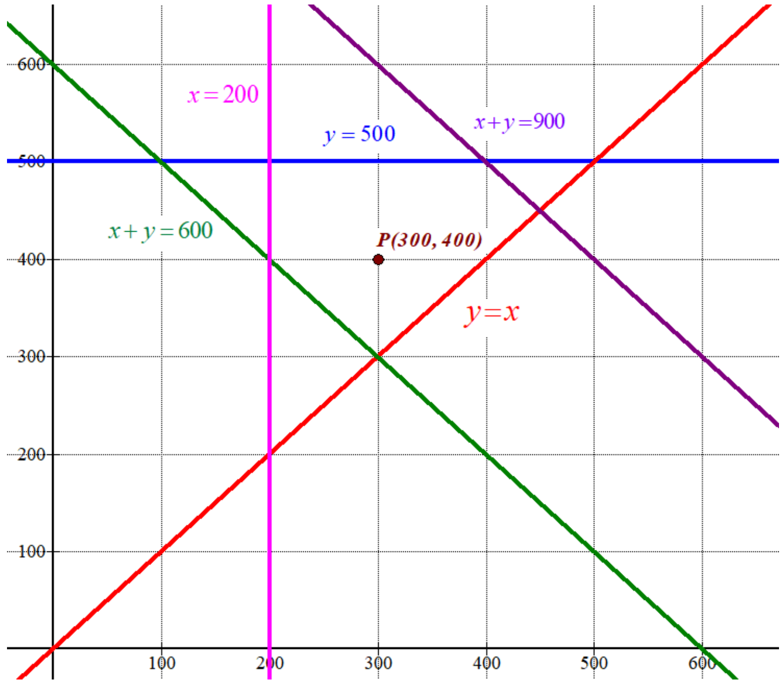
Recta vertical

$y=500$

x	$y=500$
0	500
100	500

$x\geq 0;\quad y\geq 0$

Primer cuadrante

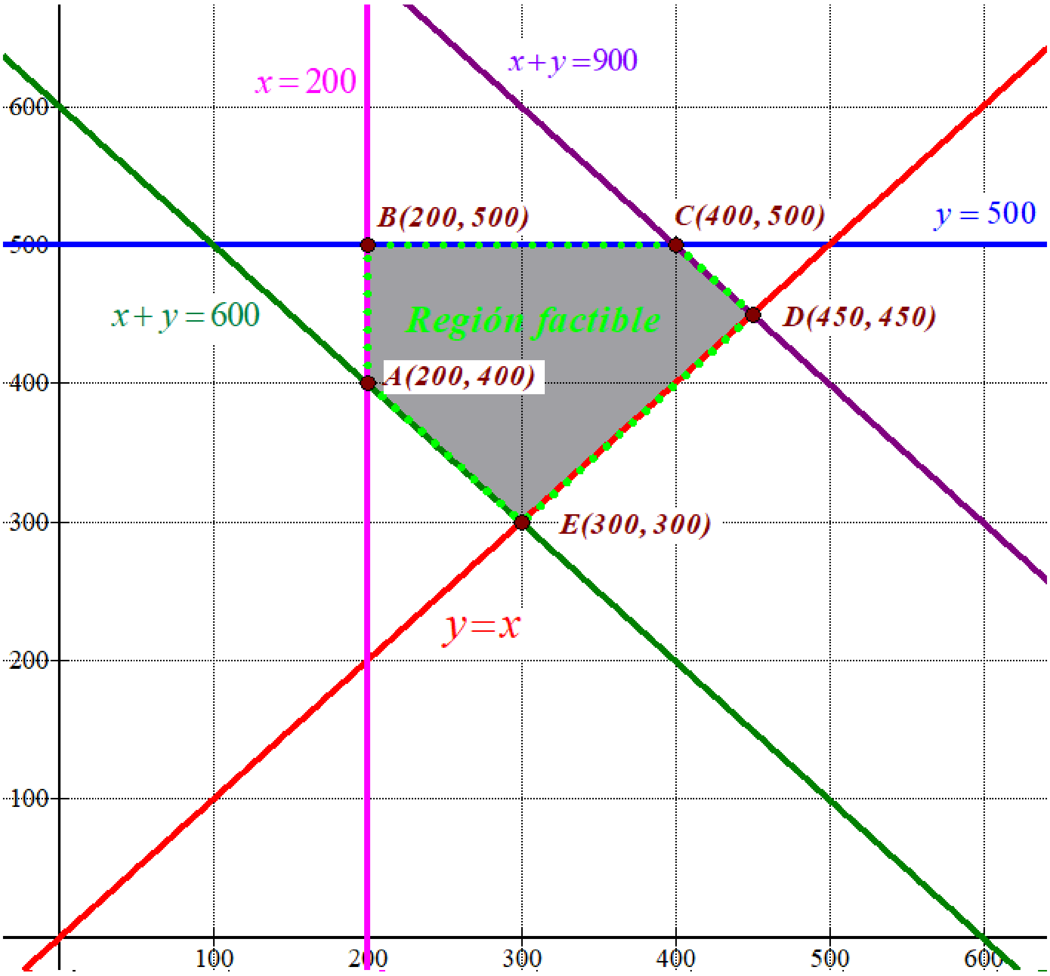


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{r} x \geq 0; \quad y \geq 0 \\ y \geq x \\ 600 \leq x+y \leq 900 \\ 200 \leq x \\ y \leq 500 \end{array}\right\}$ la región está en el primer cuadrante por debajo de la recta horizontal azul, debajo de la recta violeta, por encima de la recta roja, por encima de la recta verde y a la derecha de la recta vertical rosa.

Lo comprobamos probando si el punto P(300, 400) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{r} 300 \geq 0; \quad 400 \geq 0 \\ 400 \geq 300 \\ 600 \leq 300+400 \leq 900 \\ 200 \leq 300 \\ 400 \leq 500 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Determinamos las coordenadas del punto D. Resolvemos el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=900 \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow x+x=900 \Rightarrow x=450 \Rightarrow \boxed{D(450,450)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x,y)=15x+10y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(200, 400) → $B(200,400)=3000+4000=7000$

B(200, 500) → $B(200,500)=3000+5000=8000$

C(400, 500) → $B(400,500)=6000+5000=11000$

D(450, 450) → $B(450,450)=6750+4500=11250$ ¡Máximo!

E(300, 300) → $B(300,300)=4500+3000=7500$

El beneficio máximo es de 11250 € y se consigue en el vértice D(450, 450), que significa dedicar 450 minutos al cine y otros 450 al deporte.

A.3. (2 puntos)
a) Halle

$$\int_0^1 \frac{x}{2x^2+5}dx.$$

b) Considere

$$f(x)=\frac{x}{2x^2+5} \text{ y } g(x)=\ln(x).$$

Halle la derivada de la función compuesta $f \circ g(x)$.

a) Calculamos la integral indefinida.

$$\int \frac{x}{2x^2+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2+5}dx = \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+5\right)+K$$

Ahora calculamos la integral definida pedida.

$$\int_0^1 \frac{x}{2x^2+5}dx = \left[\frac{1}{4}\ln\left(2x^2+5\right)\right]_0^1 = \left[\frac{1}{4}\ln\left(2\cdot 1^2+5\right)\right]-\left[\frac{1}{4}\ln\left(2\cdot 0^2+5\right)\right] = \boxed{\frac{1}{4}\ln 7-\frac{1}{4}\ln 5 \simeq 0.3365}$$

b) Derivamos aplicando la regla de la cadena.

$$f(x)=\frac{x}{2x^2+5} \Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot\left(2x^2+5\right)-x(4x)}{\left(2x^2+5\right)^2}=\frac{2x^2+5-4x^2}{\left(2x^2+5\right)^2}=\frac{5-2x^2}{\left(2x^2+5\right)^2}$$

$$g(x)=\ln(x) \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{x}$$

$$(f\circ g)'(x)=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)=f'\left(\ln(x)\right)\cdot g'(x)=\frac{5-2(\ln x)^2}{\left(2(\ln x)^2+5\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\boxed{\frac{5-2(\ln x)^2}{x\left(2(\ln x)^2+5\right)^2}}$$

A.4. (2 puntos) Sean A y B dos sucesos asociados a un mismo experimento aleatorio. Suponga que $P(A)=0,7$, $P(B^C)=0,7$ y $P(A\cap B)=0,2$.

a) ¿Son A y B independientes? Justifique la respuesta.

b) Calcule $P(A^C\cap B^C)$.

Nota: A^C y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.

a) Para que sean A y B independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=0,7 \\ P(B^C)=0,7 \Rightarrow P(B)=1-0,7=0,3 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)\cdot P(B)=0.7\cdot 0.3=0.21$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0,2 \\ P(A)\cdot P(B)=0.21 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

b)

$$P(A^C\cap B^C)=P\left((A\cup B)^C\right)=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]=$$

$$=1-[0.7+0.3-0.2]=\boxed{0.2}$$

OTRA FORMA DE HACERLO.

Con una tabla de contingencia.

	B	**B^C**	
A	0.2		0.7
A^C			
		0.7	1

Completamos la tabla.

	B	**B^C**	
A	0.2	0.5	0.7
A^C	0.1	0.2	0.3
	0.3	0.7	1

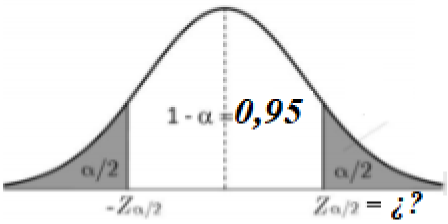
Por lo que $P(A^C\cap B^C)=0.2$

A.5. (2 puntos) El peso en gramos de ciertas bolsas de palomitas se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10.
a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200. Determine un intervalo de confianza del 95% para el peso medio de dichas bolsas de palomitas.
b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 gramos, con un nivel de confianza del 90%.

a) X = Peso en gramos de ciertas bolsas de palomitas.
X = N(μ, 10)
Tamaño de muestra es $n = 20$ y la media muestral es $\bar{x} = 200$

Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95 %.

$$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Calculamos el error del intervalo de confianza.

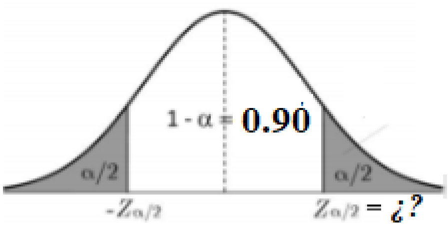
$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96\cdot\frac{10}{\sqrt{20}} \simeq 4.383$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x}-Error,\ \bar{x}+Error\right) = (200-4.383,\ 200+4.383) = (195.617,\ 204.383)$$

b) Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90 %

$$1-\alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \alpha/2 = 0.05 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$



Igualamos el error a 0.5.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 1.645\cdot\frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5\cdot\sqrt{n} = 1.645\cdot 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.645\cdot 10}{0.5} \Rightarrow \boxed{n = \left(\frac{1.645\cdot 10}{0.5}\right)^2 = 1082.41}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 1083 bolsas de palomitas.

B.1. (2 puntos) Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=2 \\ ax-z=0 \\ ay+z=a \end{array}\right\}$$

a) Determine *a* para que el sistema NO sea compatible determinado.
b) Resuelva el sistema para *a = 2*.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante y vemos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}=a^2-2a+a=a^2-a$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \end{cases}$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).
Cuando *a = 0* o *a = 1* el sistema no es compatible determinado.

b) Para *a = 2* el sistema es compatible determinado.

El sistema queda $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=2 \\ 2x-z=0 \\ 2y+z=2 \end{array}\right\}$. Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=2 \\ 2x-z=0 \\ 2y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+z=2 \\ 2x=z \\ 2y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+2x=2 \\ 2y+2x=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y=2 \\ y+x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y=2 \\ y=1-x \end{array}\right\} \Rightarrow 3x+2(1-x)=2 \Rightarrow 3x+2-2x=2 \Rightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y=1-0=1} \\ \boxed{z=2\cdot 0=0} \end{cases}$$

La solución es *x = 0*; *y = 1*; *z = 0*.

B.2. (2 puntos) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax^2-1, & si \quad x\le 1 \\ (x-a)^2, & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Determine los valores de $a\in\mathbb{R}$ que hacen que *f* sea una función continua en su dominio.
b) Para *a = 1/2*, determine, si existen, los puntos de corte de la gráfica de *f* con el eje de las *x*.

a) Para que sea continua en su dominio debe ser continua en *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} ax^2-1=a-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} (x-a)^2=(1-a)^2 \\ f(1)=a-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow a-1=(1-a)^2 \Rightarrow a-1=1+a^2-2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-3a+2=0 \Rightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases} \frac{3+1}{2}=2=a \\ \frac{3-1}{2}=1=a \end{cases}$$

La función es continua si *a = 1* o *a = 2*.

b) Para *a = 1/2* la función es $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}-1, & si \quad x\le 1 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2, & si \quad x>1 \end{cases}$.

El eje de las *x* tiene ecuación *y = 0*.

Hallamos los puntos de corte entre ambas funciones.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}-1, & si \quad x\le 1 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2, & si \quad x>1 \end{cases} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2}-1=0 \Rightarrow \frac{x^2}{2}=1 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} +\sqrt{2}\notin(-\infty,1] \\ -\sqrt{2}\in(-\infty,1] \end{cases} \\ o \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0 \to x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\notin(1,+\infty) \end{cases}$$

La función *f(x)* corta el eje de las *x* solamente en $x=-\sqrt{2}$

B.3. (2 puntos) Un ensayo clínico indica que la cantidad de glucosa en sangre en ratones tras la ingesta de un determinado fármaco depende del tiempo transcurrido, *t* (en minutos), según la siguiente función expresada en mg/dl:

$$f(t)=90+Ct^2e^{-t/5},\ 0\le t\le 60$$

a) Obtenga razonadamente el valor de la constante *C* sabiendo que la tasa de variación instantánea de la cantidad de glucosa a los 5 minutos de la ingesta del producto es 15/e.
b) Para *C* = *3*, indique a partir de qué momento disminuye la cantidad de glucosa en sangre. Señale también la cantidad máxima de glucosa en sangre alcanzada tras la ingesta del fármaco.
Nota: Expresa los resultados con 2 cifras decimales.

a) La tasa de variación instantánea de la cantidad de glucosa a los 5 minutos de la ingesta del producto es 15/e significa que *f ´(5) = 15/e*.

$$f(t)=90+Ct^2e^{-t/5}\Rightarrow f'(t)=2Cte^{-t/5}+\frac{-1}{5}Ct^2e^{-t/5}=2Cte^{-t/5}-\frac{1}{5}Ct^2e^{-t/5}$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(t)=2Cte^{-t/5}-\frac{1}{5}Ct^2e^{-t/5} \\ f'(5)=\frac{15}{e}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{15}{e}=2C\cdot 5\cdot e^{-5/5}-\frac{1}{5}C\cdot 5^2\cdot e^{-5/5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{15}{e}=10C\,e^{-1}-5C\,e^{-1}\Rightarrow\frac{15}{e}=5C\,e^{-1}\Rightarrow\frac{15}{e}=\frac{5C}{e}\Rightarrow 15=5C\Rightarrow\boxed{C=3}$$

b) Para *C* = *3* la función es $f(t)=90+3t^2e^{-t/5},\ 0\le t\le 60$.
Utilizamos la derivada para estudiar su comportamiento.

$$f(t)=90+3t^2e^{-t/5}\Rightarrow f'(t)=6te^{-t/5}-\frac{1}{5}3t^2e^{-t/5}=te^{-t/5}\left(6-\frac{3t}{5}\right)$$

$$f'(t)=0\Rightarrow te^{-t/5}\left(6-\frac{3t}{5}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{t=0}\\ e^{-t/5}=0\to \text{¡Imposible!}\\ 6-\frac{3t}{5}=0\to 6=\frac{3t}{5}\to 30=3t\to\boxed{t=10}\end{cases}$$

Los puntos críticos son en *t = 0* y en *t = 10*. Vemos que ocurre en los intervalos (0, 10) y en (10, 60).

En el intervalo $(0,10)$ tomamos *t = 5* y la derivada vale $f'(5)=5e^{-5/5}\left(6-\frac{3\cdot 5}{5}\right)=\frac{15}{e}>0$.

La función crece en $(0,10)$.

En el intervalo $(10,60)$ tomamos *t = 15* y la derivada vale

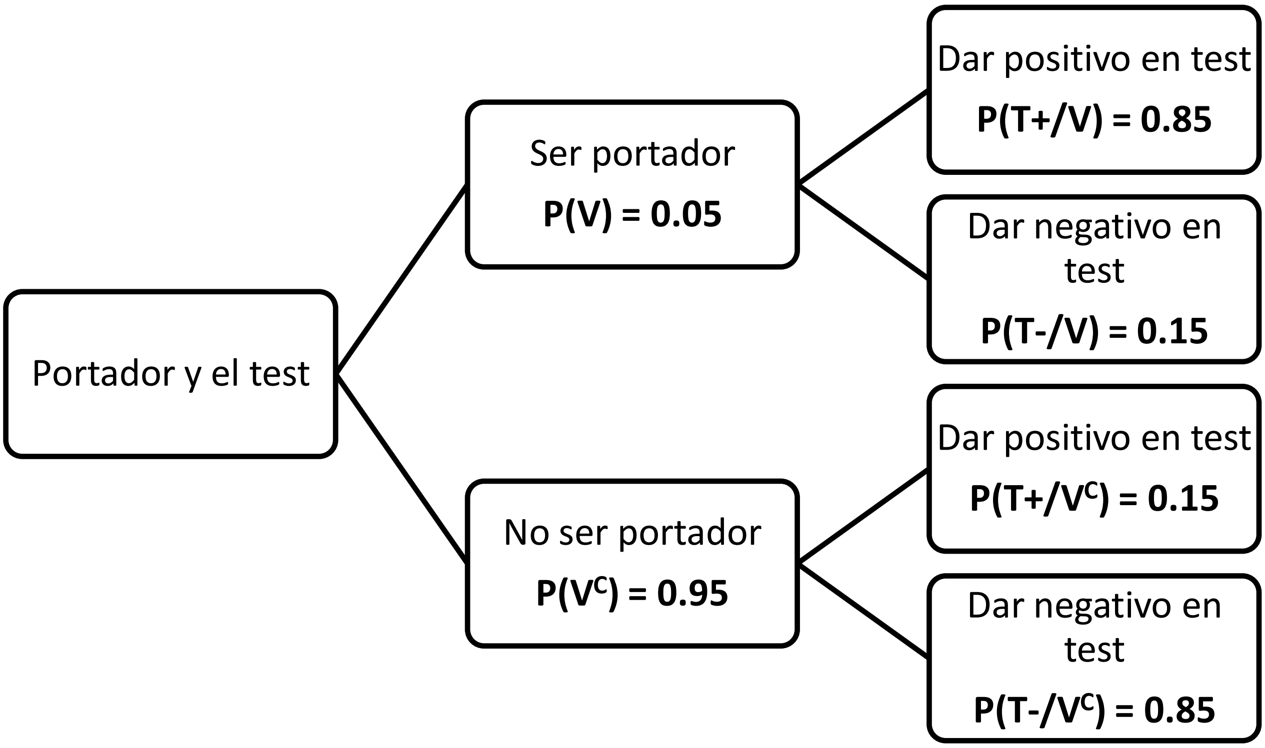
$f'(15)=15e^{-15/5}\left(6-\frac{3\cdot 15}{5}\right)=\frac{-45}{e^3}<0$. La función decrece en $(10,60)$.

La cantidad de glucosa en sangre disminuye entre los 10 y los 60 minutos.
La cantidad máxima de glucosa en sangre alcanzada tras la ingesta del fármaco se produce a los 10 minutos y es de $f(10)=90+3\cdot 10^2e^{-10/5}\simeq 130.60\ mg/dl$.

B.4. (2 puntos) Un virus muy peligroso está presente en el 5% de la población nacional. Se tiene un test para detectar la presencia del virus que es correcto en el 85% de los casos. Es decir, entre los portadores del virus, el test ha dado positivo el 85% de las veces y entre los no portadores ha dado negativo el 85% de las veces.
a) Si se practica el test a un individuo de la población escogido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dé positivo?
b) Si da positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo escogido realmente sea un portador del virus?

Llamamos V = "Ser portador del virus", T+ = "Dar positivo en el test" y T– = "Dar negativo en el test"

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T+)=P(V)P(T+/V)+P(V^C)P(T+/V^C)=$$

$$=0.05\cdot 0.85+0.95\cdot 0.15=\boxed{0.185}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V/T+)=\frac{P(V\cap T+)}{P(T+)}=\frac{P(V)P(T+/V)}{P(T+)}=\frac{0.05\cdot 0.85}{0.185}=\boxed{\frac{17}{74}\simeq 0.2297}$$

B.5. (2 puntos) El 64% de los individuos de una población tienen una misma característica. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.
a) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con esa característica de la muestra?
b) Halle la probabilidad de que más del 70% de los individuos de la muestra posean dicha característica.

a) La variable proporción X sigue una distribución normal de media 0.64 y desviación típica

$$\sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0.64 \cdot 0.36}{120}} \simeq 0.04$$

X = N(0.64, 0.04)

b) Nos piden calcular $P(X > 0.7)$

$$P(X > 0.7) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{0.7 - 0.64}{0.04}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = 1 - 0.9332 = \boxed{0.0668}$$