UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2021-2022**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (2 puntos) Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

y $B=A+aI$, donde I es la matriz identidad de orden 3 y a es un número real.

a) Calcule $A\left(A^2-A^4\right)$.

b) Calcule los valores de a para que las matrices B y AB sean invertibles.

A.2. (2 puntos) Un almacén de legumbres al por mayor tiene sacos de dos tipos, con capacidad para 5 kg de peso y con capacidad para 10 kg de peso. Solo tiene 180 sacos de capacidad 10 kg. Debe poner a la venta como mucho 2000 kg de alubias en sacos de ambos tipos. Por cada 3 sacos de 10 kg puede vender como mucho 2 sacos de 5 kg, y como mínimo tiene que poner a la venta 20 sacos de 5 kg y 60 de 10 kg. Por cada saco de 10 kg obtiene un beneficio de 5 € y por cada saco de 5 kg obtiene un beneficio de 2 €. Determine cuántos sacos de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

A.3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\begin{cases}2x-a, & si\ x<-2\\ x^2, & si\ -2\le x\le 1\\ x+b, & si\ 1<x\end{cases}$$

a) Determine los valores de a y b que hacen que f sea continua en $\mathbb{R}$.
b) Para $a = b = -8$, calcule

$$\int_{-3}^{0} f(x)\,dx .$$

A.4. (2 puntos) Sean A y B sucesos independientes de un experimento aleatorio con $P(B)=1/2$.

a) Calcule $P(A)$ para el caso en que $P(A\cup B)=3/4$.

b) Calcule $P(A)$ para el caso en que $P\left(A\cap B^C\right)=1/4$.

Nota: B^c denota el suceso complementario de B.

A.5. (2 puntos) Para estimar la proporción poblacional de las familias que tienen internet en una determinada ciudad se ha tomado una muestra de familias al azar.

a) Si la proporción poblacional fuese $P=0{,}8$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de familias para garantizar que, con una confianza del 99%, el margen de error en la estimación no supera el 6%.

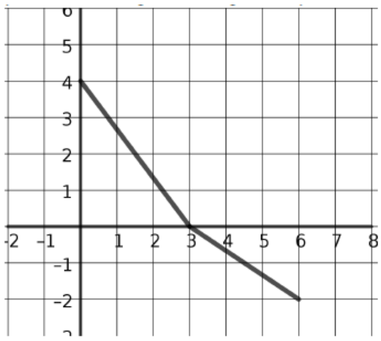
b) Tomada al azar una muestra de 200 familias, se encontró que 170 tenían internet. Determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de familias que tienen internet.

B.1. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} 2ax + z &= 1 \\ ax - y + z &= 0 \\ ay + z &= a+1 \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de *a*.
b) Resuelva el sistema para *a = 0*.

B.2. (2 puntos) La siguiente figura representa la gráfica de una **función lineal** a trozos $f:[0,6] \longrightarrow \mathbb{R}$



a) Determine razonadamente el valor de la integral definida $\int_0^3 f(x)\,dx$.

b) ¿Cuál número es mayor, $\int_0^3 f(x)\,dx$ o $\int_0^6 f(x)\,dx$? Razone la respuesta.

B.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-K)^2}$$

a) Obtenga el valor de la constante *K* para que la recta tangente a la función en *x = 9* sea paralela al eje de las *x*. Indique la expresión de dicha recta.
b) Para *K = 3*, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* y clasifique los extremos relativos de esta función.

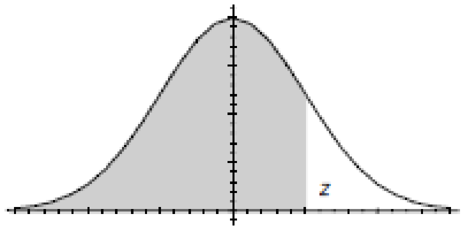
B.4. (2 puntos) Ganar en el juego del gambón depende de la actitud de los participantes. El 50% de ellos son pesimistas y se sienten perdedores antes de haber jugado. El 30% no lo ve claro y el resto son optimistas y se sienten ganadores antes de jugar. La probabilidad de que ganen los primeros es 0,5, de que ganen los segundos es 0,7 y de que ganen los últimos es 0,9.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador escogido al azar gane el juego?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador sea alguien que se haya sentido un perdedor antes de haber jugado el juego?

B.5. (2 puntos) Sea una población donde observamos la variable aleatoria X con distribución normal de media 20 y desviación típica 5. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 25.
a) ¿Cuál es la distribución de $\overline{X}$?
b) Calcule $P\left(19 < \overline{X} < 22\right)$.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. (2 puntos) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $B = A + aI$, donde I es la matriz identidad de orden 3 y a es un número real.

a) Calcule $A\left(A^2 - A^4\right)$.

b) Calcule los valores de a para que las matrices B y AB sean invertibles.

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión $A\left(A^2 - A^4\right)$

$$A\left(A^2 - A^4\right) = A\left(A^2 - A^2\right) = A \cdot 0 = 0$$

b) Para que la matriz B sea invertible tiene que tener determinante no nulo.

$$B = A + aI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - a$$

$$|B| = 0 \Rightarrow a^3 - a = 0 \Rightarrow a\left(a^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a = 0} \\ a^2 - 1 = 0 \to a^2 = 1 \to \boxed{a = \sqrt{1} = \pm 1} \end{cases}$$

La matriz B es invertible si “a” es distinto de 0, de –1 y de 1.

Para que la matriz AB sea invertible tiene que tener determinante no nulo

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

La matriz *AB* tiene determinante nulo, independientemente del valor de “a”.
La matriz *AB* no es invertible para ningún valor de “a”.

A.2. (2 puntos) Un almacén de legumbres al por mayor tiene sacos de dos tipos, con capacidad para 5 kg de peso y con capacidad para 10 kg de peso. Solo tiene 180 sacos de capacidad 10 kg. Debe poner a la venta como mucho 2000 kg de alubias en sacos de ambos tipos. Por cada 3 sacos de 10 kg puede vender como mucho 2 sacos de 5 kg, y como mínimo tiene que poner a la venta 20 sacos de 5 kg y 60 de 10 kg. Por cada saco de 10 kg obtiene un beneficio de 5 € y por cada saco de 5 kg obtiene un beneficio de 2 €. Determine cuántos sacos de cada tipo debe vender para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

Llamemos x = número de sacos de 5 kg, y = número de sacos de 10 kg.

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x,y)=2x+5y$.

Las restricciones del problema son:

“Las cantidades deben ser positivas” → $x \geq 0; \quad y \geq 0$

“Solo tiene 180 sacos de capacidad 10 kg” → $y \leq 180$

“Debe poner a la venta como mucho 2000 kg de alubias en sacos de ambos tipos” → $5x+10y \leq 2000$

“Por cada 3 sacos de 10 kg puede vender como mucho 2 sacos de 5 kg” → $3x \leq 2y$

“Como mínimo tiene que poner a la venta 20 sacos de 5 kg y 60 de 10 kg” → $x \geq 20; \ y \geq 60$

Reuniendo todas las restricciones tenemos el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0; \quad y \geq 0 \\ y \leq 180 \\ 5x+10y \leq 2000 \\ 3x \leq 2y \\ x \geq 20; \ y \geq 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 0; \quad y \geq 0 \\ y \leq 180 \\ x+2y \leq 400 \\ 2y \geq 3x \\ x \geq 20; \ y \geq 60 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$y=180$

x	$y=180$
0	180
100	180

$x+2y=400$

x	$y=\frac{400-x}{2}$
0	200
400	0

$2y=3x$

x	$y=\frac{3x}{2}$
0	0
400	600

$x=20$

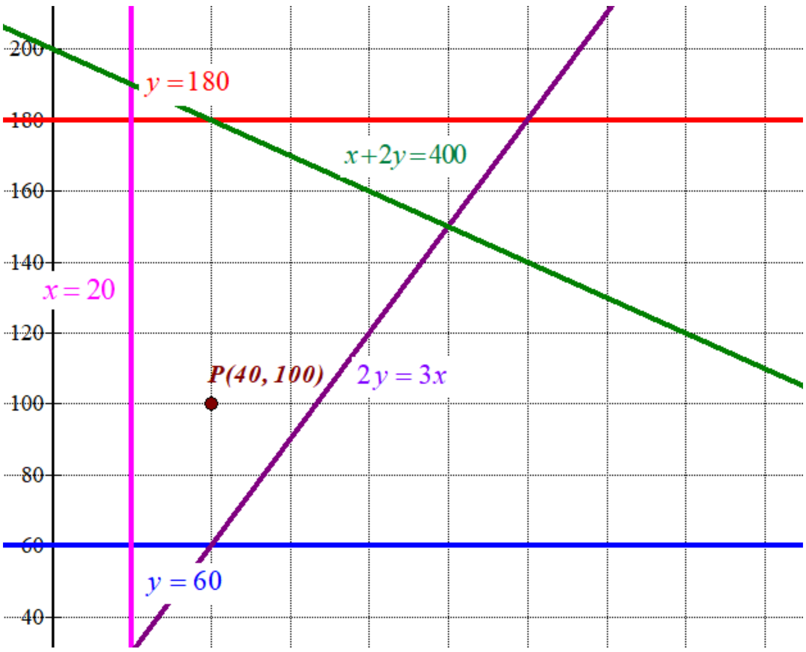
Recta vertical

$y=60$

x	$y=60$
0	60
100	60

$x \geq 0; \quad y \geq 0$

Primer cuadrante

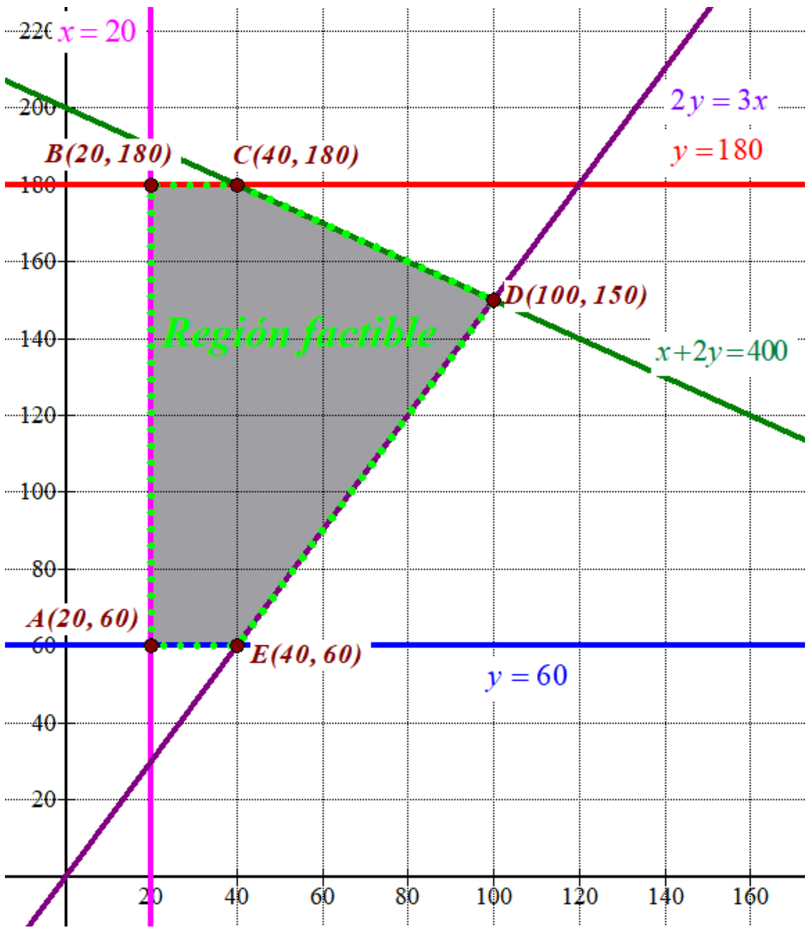


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 0; \quad y \geq 0 \\ y \leq 180 \\ x+2y \leq 400 \\ 2y \geq 3x \\ x \geq 20; \ y \geq 60 \end{array}\right\}$ la región está en el primer cuadrante por debajo de la recta horizontal roja, debajo de la recta verde, por encima de la recta violeta, por encima de la recta horizontal azul y a la derecha de la recta vertical rosa.

Lo comprobamos probando si el punto P(40, 100) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 40 \geq 0; \quad 100 \geq 0 \\ 100 \leq 180 \\ 40+200 \leq 400 \\ 200 \geq 3 \cdot 40 \\ 40 \geq 20; \ 100 \geq 60 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Determinamos las coordenadas del punto D. Resolvemos el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$\left.\begin{array}{l} 2y=3x \\ x+2y=400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y=3x \\ x=400-2y \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=3(400-2y) \Rightarrow 2y=1200-6y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8y=1200 \Rightarrow y=\frac{1200}{8}=150 \Rightarrow x=400-300=100 \Rightarrow \boxed{D(100,150)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x,y)=x+2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(20, 60) → $B(20,60)=40+300=340$

B(20, 180) → $B(20,180)=40+900=940$

C(40, 180) → $B(40,180)=80+900=980$ ¡Máximo!

D(100, 150) → $B(100,150)=200+750=950$

E(40, 60) → $B(40,60)=80+300=380$

El beneficio máximo es de 980 € y se consigue en el vértice C(40, 180), que significa vender 40 sacos de 5 kg y 180 de 10 kg.

A.3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\begin{cases} 2x-a, & si\ x<-2 \\ x^2, & si\ -2\le x\le 1 \\ x+b, & si\ 1<x \end{cases}$$

a) Determine los valores de *a* y *b* que hacen que *f* sea continua en $\mathbb{R}$.
b) Para *a* = *b* = –*8*, calcule

$$\int_{-3}^{0} f(x)dx .$$

a) La función debe ser continua en *x* = *–2*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} 2x-a=-4-a \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} x^2=4 \\ f(-2)=(-2)^2=4 \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=f(-2) \end{array}\right\} \Rightarrow 4=-4-a\Rightarrow \boxed{a=-8}$$

La función debe ser continua en *x* = *1*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x+b=1+b \\ f(1)=1^2=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1=1+b\Rightarrow \boxed{b=0}$$

Los valores buscados son *a* = *–8* y *b* = *0*.

b) Para *a* = *b* = *–8* la función queda $f(x)=\begin{cases} 2x+8, & si\ x<-2 \\ x^2, & si\ -2\le x\le 1 \\ x-8, & si\ 1<x \end{cases}$.

En el intervalo (–3, 0) la función es $f(x)=\begin{cases} 2x+8, & si\ -3\le x<-2 \\ x^2, & si\ -2\le x\le 0 \end{cases}$, por lo que la integral definida se divide en dos integrales.

$$\int_{-3}^{0} f(x)dx=\int_{-3}^{-2}2x+8dx+\int_{-2}^{0}x^2dx=\left[x^2+8x\right]_{-3}^{-2}+\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0}=$$

$$=\left[(-2)^2+8(-2)\right]-\left[(-3)^2+8(-3)\right]+\left[\frac{0^3}{3}\right]-\left[\frac{(-2)^3}{3}\right]=$$

$$=4-16-9+24+0+\frac{8}{3}=\boxed{\frac{17}{3}}$$

A.4. (2 puntos) Sean A y B sucesos independientes de un experimento aleatorio con $P(B)=1/2$.

a) Calcule *P(A)* para el caso en que $P(A\cup B)=3/4$.

b) Calcule *P(A)* para el caso en que $P\left(A\cap B^C\right)=1/4$.

Nota: B^c denota el suceso complementario de B.

a) Como A y B son independientes se cumple que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=3/4 \\ P(B)=1/2 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ P(A\cap B)=P(A)P(B) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{4}=P(A)+\frac{1}{2}-P(A)\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3=4P(A)+2-2P(A)\Rightarrow 2P(A)=1\Rightarrow \boxed{P(A)=\frac{1}{2}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} P\left(A\cap B^C\right)=1/4 \\ P(B)=1/2 \\ P(A)=P(A\cap B)+P\left(A\cap B^C\right) \\ P(A\cap B)=P(A)P(B) \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)=P(A)\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Rightarrow$$

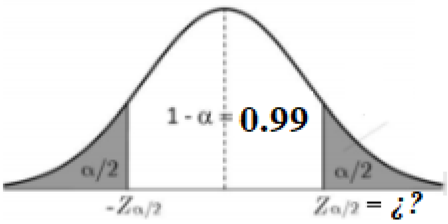
$$\Rightarrow 4P(A)=2P(A)+1\Rightarrow 2P(A)=1\Rightarrow \boxed{P(A)=\frac{1}{2}}$$

A.5. (2 puntos) Para estimar la proporción poblacional de las familias que tienen internet en una determinada ciudad se ha tomado una muestra de familias al azar.
a) Si la proporción poblacional fuese $P = 0{,}8$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de familias para garantizar que, con una confianza del 99%, el margen de error en la estimación no supera el 6%.
b) Tomada al azar una muestra de 200 familias, se encontró que 170 tenían internet. Determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de familias que tienen internet.

a) La proporción muestral es P = 0.8. El error máximo es del 6 %.

Para un nivel de confianza del 99 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57+2.58}{2} = 2.575$$



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2.575\sqrt{\frac{0.8\cdot 0.2}{n}} = 0.06 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.8\cdot 0.2}{n}} = \frac{0.06}{2.575} \Rightarrow$$

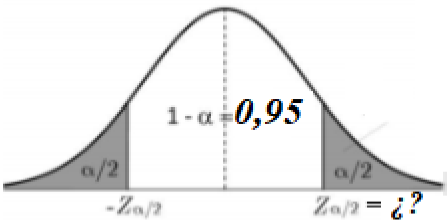
$$\Rightarrow \frac{0.8\cdot 0.2}{n} = \left(\frac{0.06}{2.575}\right)^2 \Rightarrow \boxed{n = \frac{0.8\cdot 0.2}{\left(\frac{0.06}{2.575}\right)^2} \simeq 294.69}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 295 familias.

b) La proporción muestral es de $\frac{170}{200} = 0.85$

Para un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{0.85\cdot 0.15}{200}} \simeq 0.0495$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(p - Error,\, p + Error\right) = \left(0.85 - 0.0495,\ 0.85 + 0.0495\right) = \left(0.8005,\ \ 0.8995\right)$$

B.1. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} 2ax+z=1 \\ ax-y+z=0 \\ ay+z=a+1 \end{array}\right\}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de *a*.
b) Resuelva el sistema para *a = 0*.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 2a & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante y vemos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2a & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}=-2a+a^2-2a^2=-a^2-2a$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2-2a=0 \Rightarrow -a(a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a+2=0 \Rightarrow a=-2 \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
El sistema queda tan sencillo que podemos resolverlo fácilmente.

$$\left.\begin{array}{r} z=1 \\ -y+z=0 \\ z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow -y+1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow \text{Solución}: \begin{cases} x=t \\ y=1, \ t \in \mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

CASO 3. $a=-2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda $\left.\begin{array}{r} -4x \quad + \quad z=1 \\ -2x-y+z=0 \\ -2y+z=-1 \end{array}\right\}$

Transformamos con el método de Gauss el sistema en otro triangular.

$$A/B=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila 1}^{\text{a}} - 2 \cdot \text{Fila 2}^{\text{a}} \\ -4 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ 4 \quad 2 \quad -2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 2 \quad -1 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

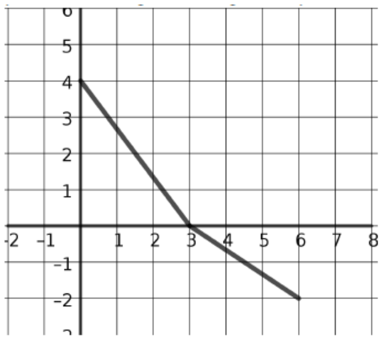
$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{-4 \quad 0 \quad 1}^{A} & & & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)_{A/B}$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz ampliada A/B y menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $a = 0$ o $a = -2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Las soluciones para $a = 0$ las hemos hallado en el apartado a).
Las soluciones son $x = t;\ y = 1;\ z = 1,\ t \in \mathbb{R}$

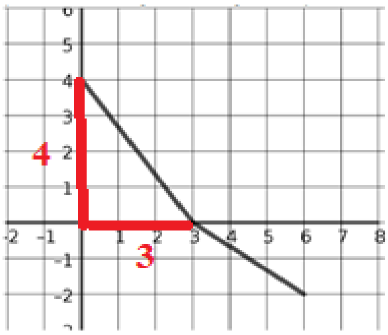
B.2. (2 puntos) La siguiente figura representa la gráfica de una **función lineal** a trozos $f:[0,6]\longrightarrow\mathbb{R}$



a) Determine razonadamente el valor de la integral definida $\int_0^3 f(x)\,dx$.

b) ¿Cuál número es mayor, $\int_0^3 f(x)\,dx$ o $\int_0^6 f(x)\,dx$? Razone la respuesta.

a) La función a trozos cambia en $x = 3$. De 0 a 3 el valor de $\int_0^3 f(x)\,dx$ es el área bajo la recta dibujada, es decir, el área de un triángulo de base 3 y altura 4.



$$\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{3\cdot 4}{2} = \boxed{6}$$

b) La función es positiva entre 0 y 3 el valor de $\int_0^3 f(x)\,dx$ es positivo, pero la función entre 3 y 6 es negativa, por lo que $\int_3^6 f(x)\,dx$ es negativo.

$$\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^6 f(x)\,dx < \int_0^3 f(x)\,dx.$$

Tenemos que $\int_0^3 f(x)\,dx > \int_0^6 f(x)\,dx$.

B.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-K)^2}$$

a) Obtenga el valor de la constante *K* para que la recta tangente a la función en *x = 9* sea paralela al eje de las *x*. Indique la expresión de dicha recta.
b) Para *K = 3*, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* y clasifique los extremos relativos de esta función.

a) Si la recta tangente a la función en *x = 9* es paralela al eje de las *x* la recta tangente es horizontal y su pendiente debe ser 0. Esto significa que *f ´(9) = 0*.

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-K)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2(x-K)^2-2(x-K)x^3}{(x-K)^4}=\frac{3x^2(x-K)-2x^3}{(x-K)^3}$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=\dfrac{3x^2(x-K)-2x^3}{(x-K)^3} \\ f'(9)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=\frac{3\cdot 9^2(9-K)-2\cdot 9^3}{(9-K)^3} \Rightarrow 0=3\cdot 9^2(9-K)-2\cdot 9^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=3(9-K)-2\cdot 9 \Rightarrow 27-3K-18=0 \Rightarrow 3K=9 \Rightarrow \boxed{K=3}$$

El valor buscado es *K = 3*.

Para *K = 3* determinamos la ecuación de la recta tangente a $f(x)=\frac{x^3}{(x-3)^2}$ en *x = 9*.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{x^3}{(x-3)^2} \Rightarrow f(9)=\dfrac{9^3}{(9-3)^2}=\dfrac{81}{4} \\ f'(9)=0 \\ y-f(9)=f'(9)(x-9) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{81}{4}=0(x-9) \Rightarrow \boxed{y=\frac{81}{4}}$$

La recta tangente tiene ecuación $y=\frac{81}{4}$.

b) Para *K = 3* la función es $f(x)=\frac{x^3}{(x-3)^2}$.

Utilizamos la derivada y su signo para determinar el comportamiento de la función.

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-3)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2(x-3)^2-2(x-3)x^3}{(x-3)^4}=\frac{3x^2(x-3)-2x^3}{(x-3)^3}$$

$$f'(x)=\frac{x^2(3(x-3)-2x)}{(x-3)^3}=\frac{x^2(3x-9-2x)}{(x-3)^3}=\frac{x^2(x-9)}{(x-3)^3}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2(x-9)}{(x-3)^3}=0 \Rightarrow x^2(x-9)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=9 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores. Añadimos $x = 3$ que es el valor que anula el denominador.

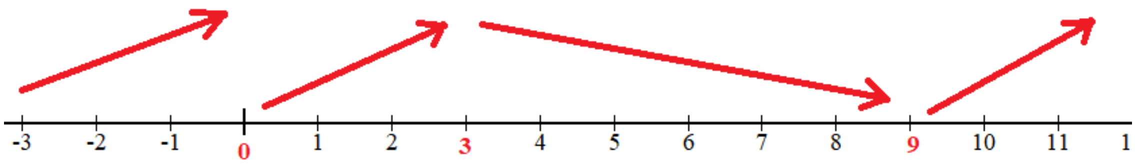
En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{(-1)^2(-1-9)}{(-1-3)^3} = \frac{5}{32} > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.

En el intervalo $(0, 3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1^2(1-9)}{(1-3)^3} = \frac{8}{27} > 0$. La función crece en $(0, 3)$.

En el intervalo $(3, 9)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{4^2(4-9)}{(4-3)^3} = -80 < 0$. La función decrece en $(3, 9)$.

En el intervalo $(9, +\infty)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $f'(10) = \frac{10^2(10-9)}{(10-3)^3} = \frac{100}{343} > 0$. La función crece en $(9, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente



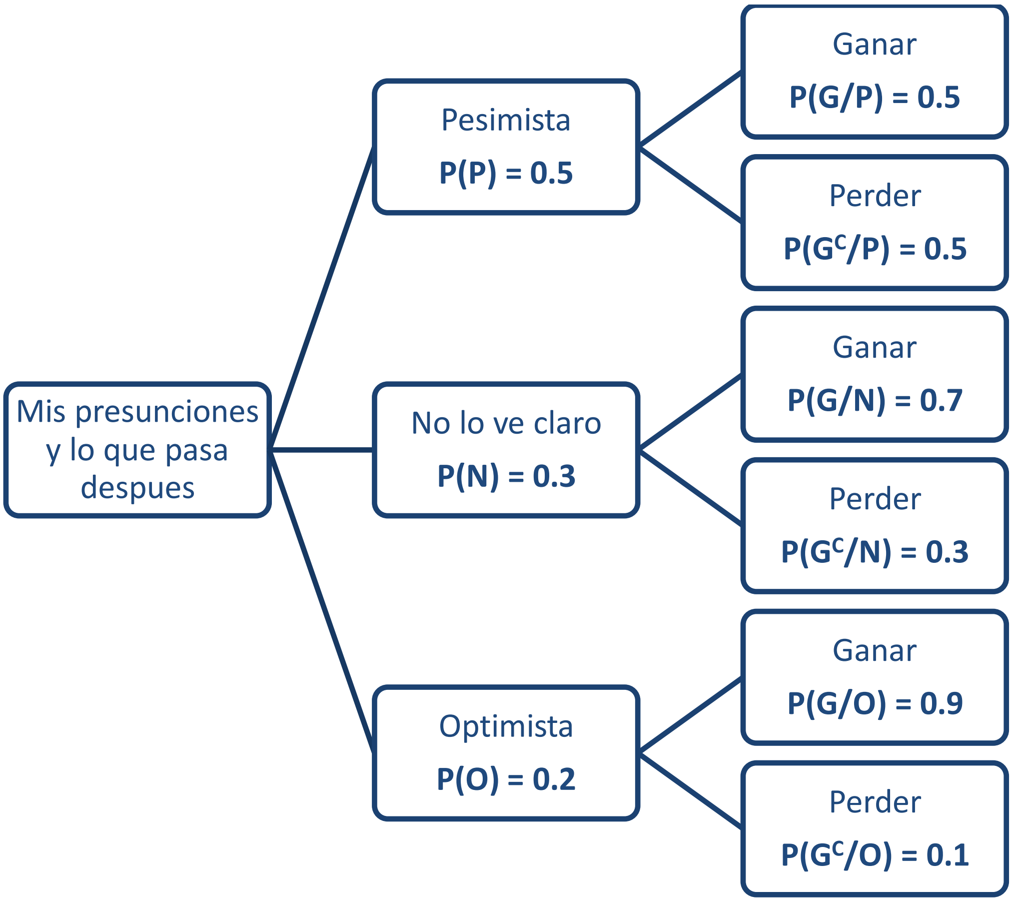
La función crece en $(-\infty, 3) \cup (9, +\infty)$ y decrece en $(3, 9)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 9$. Como $f(9) = \frac{9^3}{(9-3)^2} = \frac{81}{4}$ el mínimo relativo tiene coordenadas $\left(9, \frac{81}{4}\right)$.

En $x = 3$ la función no existe y en $x = 0$ será un punto de inflexión.

B.4. (2 puntos) Ganar en el juego del gambón depende de la actitud de los participantes. El 50% de ellos son pesimistas y se sienten perdedores antes de haber jugado. El 30% no lo ve claro y el resto son optimistas y se sienten ganadores antes de jugar. La probabilidad de que ganen los primeros es 0,5, de que ganen los segundos es 0,7 y de que ganen los últimos es 0,9.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador escogido al azar gane el juego?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador sea alguien que se haya sentido un perdedor antes de haber jugado el juego?

Llamamos P = "Ser pesimista", N = "No lo ve claro" y O = "Ser Optimista". G = "Ganar al gambón"
Realizamos un diagrama de árbol.



Con esta información respondemos a las preguntas.

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(P)P(G/P) + P(N)P(G/N) + P(O)P(G/O) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.9 = \boxed{0.64}$$

b) Nos piden calcular la probabilidad de que un ganador haya sido previamente pesimista → $P(P/G)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(P/G) = \frac{P(P \cap G)}{P(G)} = \frac{P(P)P(G/P)}{P(G)} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.64} = \boxed{0.390625}$$

B.5. (2 puntos) Sea una población donde observamos la variable aleatoria X con distribución normal de media 20 y desviación típica 5. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 25.
a) ¿Cuál es la distribución de $\overline{X}$?
b) Calcule $P\left(19<\overline{X}<22\right)$.

a) La distribución de las medias muestrales mantiene la misma media, pero con una desviación típica menor → $\sigma' = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$X = N(20,\ 5) \rightarrow \overline{X_{25}} = N\left(20, \frac{5}{\sqrt{25}}\right) \Rightarrow \overline{X_{25}} = N\left(20, 1\right)$$

La distribución de medias es una distribución normal de media 20 y desviación típica 1.

b)

$$P\left(19<\overline{X}<22\right) = \left\{Tipificamos\right\} = P\left(\frac{19-20}{1} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} < \frac{22-20}{1}\right) =$$

$$= P\left(-1<Z<2\right) = P\left(Z<2\right) - P\left(Z<-1\right) = P\left(Z<2\right) - P\left(Z>1\right) =$$

$$= P\left(Z<2\right) - \left[1-P\left(Z\le 1\right)\right] = \left\{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\right\} =$$

$$= 0.9772 - \left[1-0.8413\right] = \boxed{0.8185}$$

z	,00	,01
0,0	0,5000	0,50
0,1	0,5398	0,54
0,2	0,5793	0,58
0,3	0,6179	0,62
0,4	0,6554	0,65
0,5	0,6915	0,69
0,6	0,7257	0,72
0,7	0,7580	0,76
0,8	0,7881	0,79
0,9	0,8159	0,81
1,0	0,8413	0,84
1,1	0,8643	0,86
1,2	0,8849	0,88
1,3	0,9032	0,90
1,4	0,9192	0,92
1,5	0,9332	0,93
1,6	0,9452	0,94
1,7	0,9554	0,95
1,8	0,9641	0,96
1,9	0,9713	0,97
2,0	0,9772	0,97
2,1	0,9821	0,98
2,2	0,9861	0,98

z	,00	
0,0	0,5000	0
0,1	0,5398	0
0,2	0,5793	0
0,3	0,6179	0
0,4	0,6554	0
0,5	0,6915	0
0,6	0,7257	0
0,7	0,7580	0
0,8	0,7881	0
0,9	0,8159	0
1,0	0,8413	0
1,1	0,8643	0
1,2	0,8849	0