Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

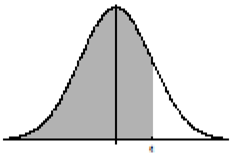
UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2022ko EZOHIKOA	EXTRAORDINARIA 2022
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]

Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x,y)=4x+2y-1$ en el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} y-x\le 4 \\ y+2x\ge 7 \\ -2x-y+13\ge 0 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

a) **[1 punto]** Representa el recinto mencionado.

b) **[1,5 puntos]** Obtén los puntos en los que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de la función en dichos puntos.

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) **[0,75 puntos]** Encuentra el valor o valores de x para que se cumpla la igualdad:

$$B^2=A$$

b) **[1 punto]** Igualmente, para que se cumpla:

$$B+C=A^{-1}$$

c) **[0,75 puntos]** Determina el valor de x para que $A+B+C=3\cdot I_2$, donde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

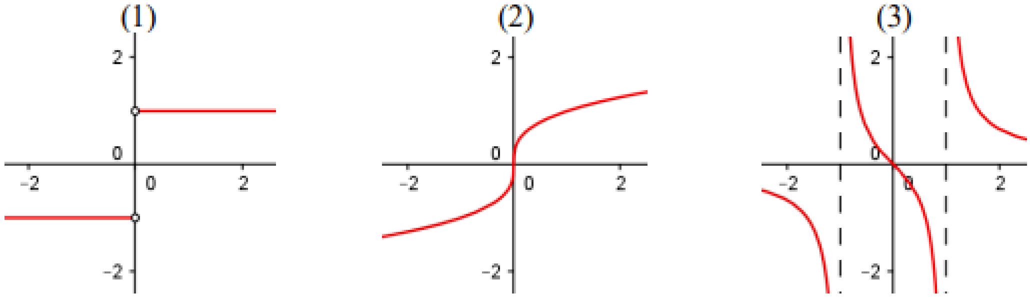
BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. [hasta 2,5 puntos]

a) **[0,9 puntos]** Asocia, razonadamente, las funciones:

$$A)\ f(x)=\frac{x}{x^2-1};\quad B)\ g(x)=\frac{|x|}{x};\quad C)\ h(x)=\sqrt[3]{x}$$

con las siguientes representaciones gráficas:



b) **[1,6 puntos]** En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio y recorrido de la función.

B.2. [hasta 2,5 puntos]

La velocidad que lleva un patinete $v(t)$, en función del tiempo t, viene dada por la siguiente función:

$$v(t)=\begin{cases} 7t^2 & si \quad 0\le t<1 \\ 2t+a & si \quad 1\le t\le 5 \\ -t^2+12t+b & si \quad 5<t\le 10 \end{cases}$$

a) **[0,8 puntos]** Determina los valores de a y b para que la función *v(t)* sea continua en los instantes $t = 1$ y $t = 5$.
b) **[1 punto]** Para $a = 5$ y $b = -20$, ¿en qué momento el patinete alcanza la velocidad máxima? Concreta la velocidad máxima mencionada.
c) **[0,7 puntos]** En el caso $a = 5$ y $b = -20$, realiza la representación gráfica de la función.

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. [hasta 2,5 puntos]
Se van a sortear 4 viajes a Nueva York entre 40 personas utilizando una baraja de 40 cartas. Se reparte una carta por persona y cada una que recibe un rey ganará un viaje.
a) **[0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que gane un viaje la primera persona que recibe la carta.
b) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que gane un viaje la segunda persona que recibe la carta.
c) **[0,75 puntos]** Calcula la probabilidad de que ninguna de las dos primeras personas gane un viaje.

B.3. [hasta 2,5 puntos]
Deiene y Kattalin son jugadoras de baloncesto. Deiene encesta 2 de cada 5 tiros; Kattalin 3 de cada 7.
Si ambas tiran a canasta una sola vez, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
a) **[0,75 puntos]** Ambas han encestado.
b) **[0,75 puntos]** Ninguna ha encestado.
c) **[0,5 puntos]** Sólo Deiene ha encestado.
d) **[0,5 puntos]** Al menos una ha encestado.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. [hasta 2,5 puntos]
La temperatura en un determinado mes sigue una distribución normal de media 10 grados y de varianza 16 grados^2.
a) **[0,9 puntos]** Obtén el intervalo característico para el 80%.
b) **[0,3 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día sea superior a 11º?
c) **[0,6 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día esté entre 8º y 10º?
d) **[0,3 puntos]** ¿Cuál es la proporción de días con más de 9º?
e) **[0,4 puntos]** Si consideramos un mes de 30 días, ¿en cuántos días la temperatura ha sido inferior a 12º?

B.4. [hasta 2,5 puntos]
Para estimar el peso medio de las chicas de 16 años de una ciudad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores:

$$\bar{x}=52,5\ kg \text{ y } s=5,3\ kg$$

Hemos hecho la siguiente afirmación:
"El peso medio de las chicas de 16 años de esta ciudad está entre 51 kg y 54 kg".
¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?

Soluciones

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]
Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x,y)=4x+2y-1$ en el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} y-x\leq 4 \\ y+2x\geq 7 \\ -2x-y+13\geq 0 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

a) **[1 punto]** Representa el recinto mencionado.
b) **[1,5 puntos]** Obtén los puntos en los que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de la función en dichos puntos.

a) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$y-x=4$

x	$y=4+x$
3	7
1	5

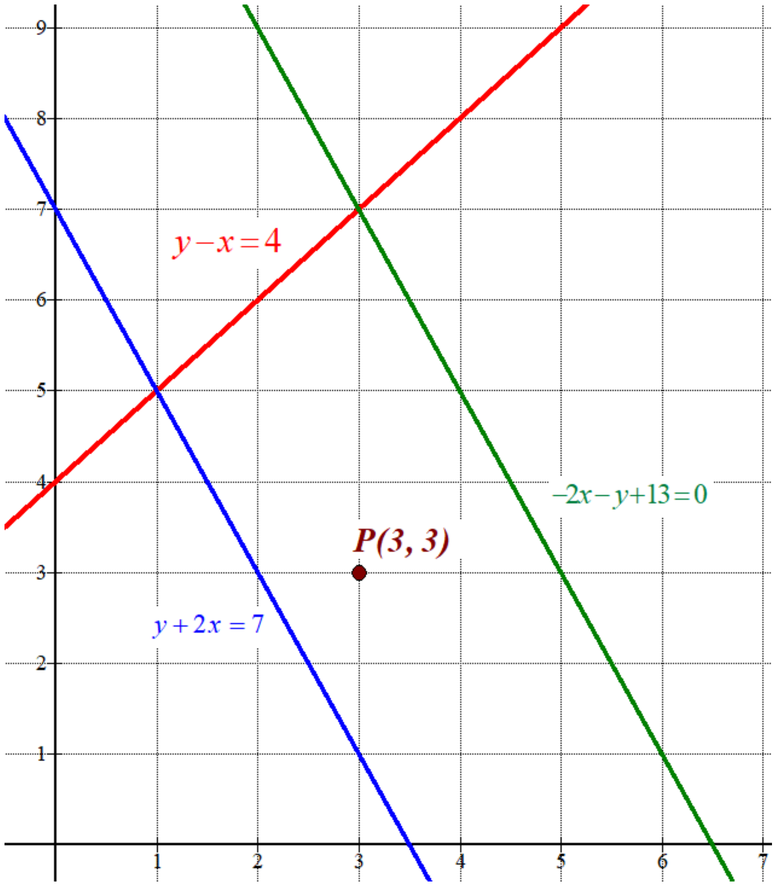
$y+2x=7$

x	$y=7-2x$
1	5
3.5	0

$-2x-y+13=0$

x	$y=13-2x$
3	7
6.5	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$ Primer cuadrante

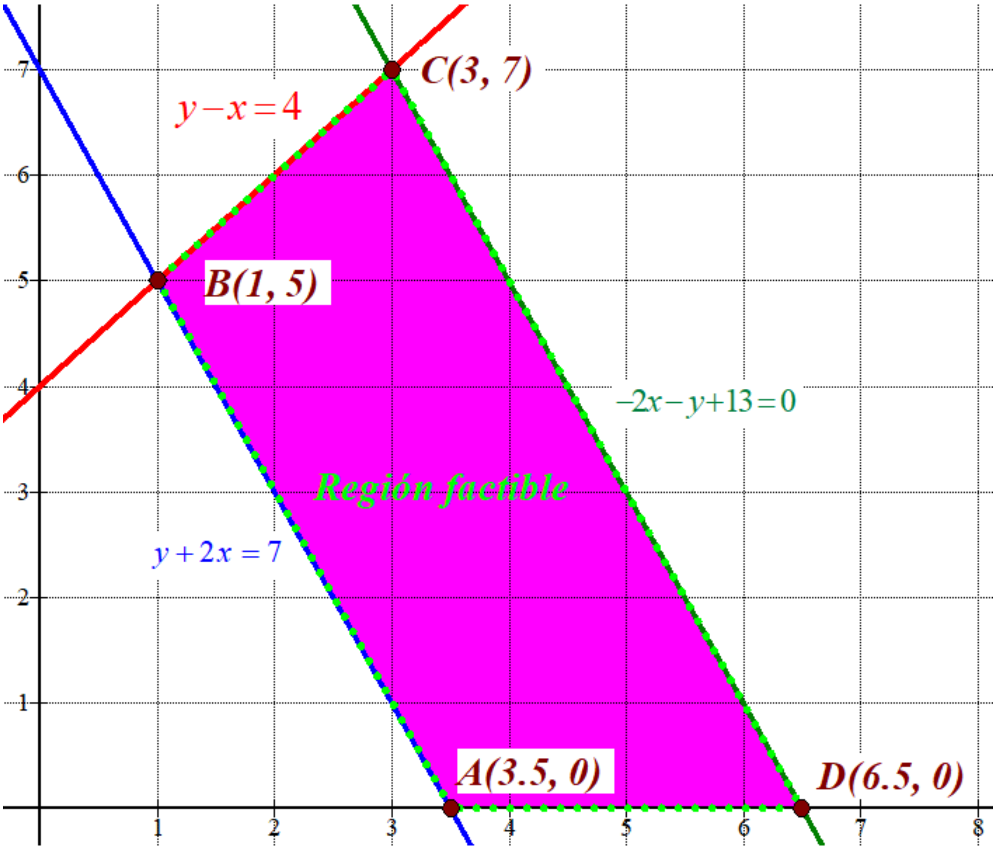


Como las restricciones son $\begin{cases} y-x\le 4 \\ y+2x\ge 7 \\ -2x-y+13\ge 0 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y\le 4 \\ 2x+y\ge 7 \\ y+2x-13\le 0 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y\le 4 \\ 2x+y\ge 7 \\ y\le -2x+13 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{cases}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas verde y roja, y por encima de la recta azul.

Comprobamos que el punto P(3, 3) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\begin{cases} 3-3\le 4 \\ 3+6\ge 7 \\ -6-3+13\ge 0 \\ 3\ge 0;\ 3\ge 0 \end{cases} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



b) Valoramos la función beneficio $f(x,y)=4x+2y-1$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

A(3.5, 0) → $f(3.5,0)=14+0-1=13$ ¡Mínimo!

B(1, 5) → $f(1,5)=4+10-1=13$ ¡Mínimo!

C(3, 7) → $f(3,7)=12+14-1=25$ ¡Máximo!

D(6.5, 0) → $f(6.5,0)=26+0-1=25$ ¡Máximo!

El máximo valor de la función es 25 y se obtiene en dos vértices C y D. El valor máximo se alcanza en cualquier punto del segmento CD.

El mínimo valor de la función es 13 y se obtiene en dos vértices A y B. El valor mínimo se alcanza en cualquier punto del segmento AB.

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & x\\ x & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

a) **[0,75 puntos]** Encuentra el valor o valores de x para que se cumpla la igualdad:

$$B^2 = A$$

b) **[1 punto]** Igualmente, para que se cumpla:

$$B+C=A^{-1}$$

a) **[0,75 puntos]** Determina el valor de x para que $A+B+C=3\cdot I_2$, donde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

a)

$$B^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & x\\ x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ x & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1+x^2 & x\\ x & x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}1+x^2=2 \to x^2=1 \to x=\sqrt{1}=\pm 1\\ x=1\\ x=1\\ x^2=1 \to x=\sqrt{1}=\pm 1\end{cases} \Rightarrow \boxed{x=1}$$

El valor buscado es $x=1$.

b)

$$B+C=A^{-1} \Rightarrow AB+AC=AA^{-1}=I \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ x & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2+x & 2x\\ 1+x & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2+2\\ -1 & -1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1+x & 2x\\ x & x+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}1+x=1 \to x=0\\ 2x=0 \to x=0\\ x=0\\ x+1=1 \to x=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

El valor buscado es $x=0$.

c)

$$A+B+C=3\cdot I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & x\\ x & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}3 & x\\ x & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}3=3\\ x=0\\ x=0\\ 3=3\end{cases} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

El valor buscado es $x=0$.

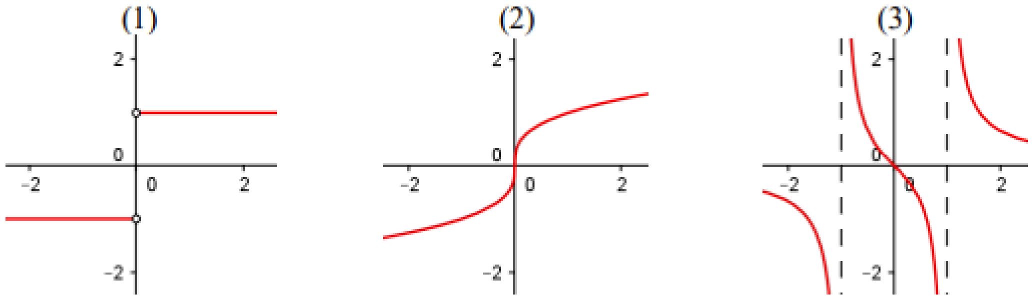
BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. [hasta 2,5 puntos]

a) **[0,9 puntos]** Asocia, razonadamente, las funciones:

$$A)\ \ f(x)=\frac{x}{x^2-1};\quad B)\ \ g(x)=\frac{|x|}{x};\quad C)\ h(x)=\sqrt[3]{x}$$

con las siguientes representaciones gráficas:



b) [1,6 puntos] En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio y recorrido de la función.

a)

La función $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ no está definida en los puntos $x=1$ y $x=-1$, la función $f(x)$ tiene en cada uno de esos puntos una asíntota vertical.

La única función con esas características es la (3).

A) →(3)

La función $g(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\frac{-x}{x}=-1 & si \quad x<0\\ \frac{x}{x}=1 & si \quad x>0\end{cases}$ no está definida en el punto $x = 0$, y es constante e igual a 1, si $x > 0$; y constante e igual a –1, si $x < 0$.

La única función con esas características es la (1).

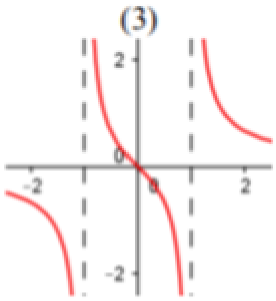
B) →(1)

La función $h(x)=\sqrt[3]{x}$ pasa por el punto $x = 0$, y toma valores positivos si $x > 0$ y valores negativos si $x < 0$.

La única función con esas características es la (2).

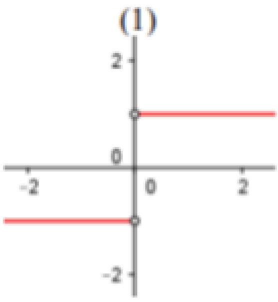
C) →(2)

b) El dominio de la función *f(x)* →



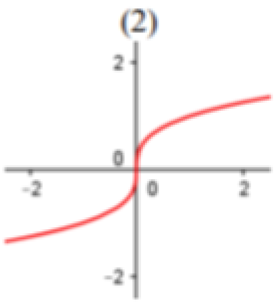
es $Dominio = \mathbb{R} - \{-1,+1\}$ y el recorrido es $\mathbb{R}$.

El dominio de la función *g(x)* →



es $Dominio = \mathbb{R} - \{0\}$ y el recorrido es $\{-1,+1\}$.

El dominio de la función *h(x)* →



es $Dominio = \mathbb{R}$ y el recorrido es $\mathbb{R}$.

B.2. [hasta 2,5 puntos]

La velocidad que lleva un patinete $v(t)$, en función del tiempo t, viene dada por la siguiente función:

$$v(t)=\begin{cases} 7t^2 & si \quad 0\le t<1 \\ 2t+a & si \quad 1\le t\le 5 \\ -t^2+12t+b & si \quad 5<t\le 10 \end{cases}$$

a) **[0,8 puntos]** Determina los valores de a y b para que la función $v(t)$ sea continua en los instantes $t = 1$ y $t = 5$.

b) **[1 punto]** Para $a = 5$ y $b = -20$, ¿en qué momento el patinete alcanza la velocidad máxima? Concreta la velocidad máxima mencionada.

c) **[0,7 puntos]** En el caso $a = 5$ y $b = -20$, realiza la representación gráfica de la función.

a) Para que la función sea continua en $t = 1$ debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 1^-} v(t)=\lim\limits_{t\to 1^-} 7t^2=7 \\ \lim\limits_{t\to 1^+} v(t)=\lim\limits_{t\to 1^+} 2t+a=2+a \\ v(1)=2+a \\ \lim\limits_{t\to 1^-} v(t)=\lim\limits_{t\to 1^+} v(t)=v(1) \end{array}\right\}\Rightarrow 2+a=7\Rightarrow \boxed{a=5}$$

La función queda $v(t)=\begin{cases} 7t^2 & si \quad 0\le t<1 \\ 2t+5 & si \quad 1\le t\le 5 \\ -t^2+12t+b & si \quad 5<t\le 10 \end{cases}$

Para que la función sea continua en $t = 5$ debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 5^-} v(t)=\lim\limits_{t\to 5^-} 2t+5=15 \\ \lim\limits_{t\to 5^+} v(t)=\lim\limits_{t\to 5^+} -t^2+12t+b=-25+60+b=35+b \\ v(5)=15 \\ \lim\limits_{t\to 5^-} v(t)=\lim\limits_{t\to 5^+} v(t)=v(5) \end{array}\right\}\Rightarrow 35+b=15\Rightarrow \boxed{b=-20}$$

Los valores buscados son $a=5$ y $b=-20$.

b) Para $a = 5$ y $b = -20$ la función queda $v(t)=\begin{cases} 7t^2 & si \quad 0\le t<1 \\ 2t+5 & si \quad 1\le t\le 5 \\ -t^2+12t-20 & si \quad 5<t\le 10 \end{cases}$.

Hallamos la derivada y la igualamos a cero.

$$v'(t)=\begin{cases} 14t & si \quad 0\le t<1 \\ 2 & si \quad 1<t<5 \\ -2t+12 & si \quad 5<t\le 10 \end{cases}$$

$$v'(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} 14t=0 \to t=0 \; si & 0 \le t < 1 \\ 2=0 \to \text{¡Imposible!} \; si & 1 < t < 5 \\ -2t+12=0 \to t=6 \; si & 5 < t \le 10 \end{cases}$$

En el intervalo $[0,1)$ la derivada no cambia de signo, vemos si es positiva o negativa valorándola en un punto del intervalo → $v'(0.5)=7>0$. La función es creciente en $[0,1)$.

En el intervalo $(1,5)$ la derivada es constante y siempre es positiva (2). La función es creciente en $(1,5)$.

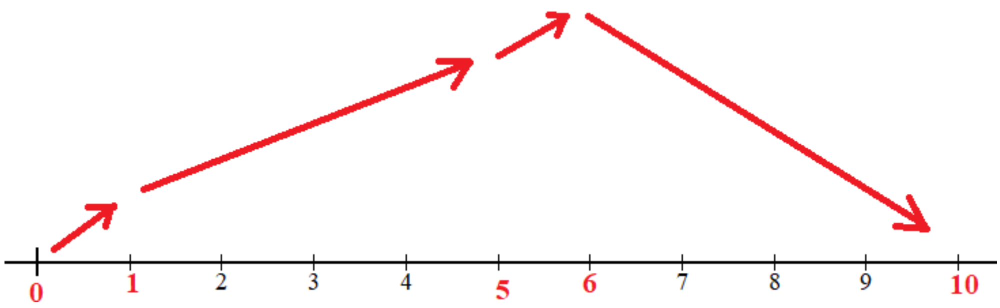
En el intervalo $(5,10)$ la derivada se anula en *t* = *6*. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $(5,6)$ tomamos *t* = *5.5* y la derivada vale $v'(5.5)=-11+12=1>0$. La función es creciente en $(5,6)$.

En el intervalo $(6,10)$ tomamos *t* = *7* y la derivada vale $v'(7)=-14+12=-2<0$. La función es decreciente en $(6,10)$.

La función es continua y creciente en $[0,1)\cup(1,5)\cup(5,6)$ y decreciente en $(6,10]$.

La función sigue el esquema:



La función alcanza un valor máximo relativo y absoluto en *t* = *6*. Siendo el valor de la velocidad máxima $v(6)=-6^2+12\cdot 6-20=16$.

c) Para *a* = 5 y *b* = −20 la función queda $v(t)=\begin{cases} 7t^2 & si & 0 \le t < 1 \\ 2t+5 & si & 1 \le t \le 5 \\ -t^2+12t-20 & si & 5 < t \le 10 \end{cases}$.

Sabemos como crece y decrece y que es continua. Realizamos una tabla de valores y representamos su gráfica.

si $0 \le t < 1$

t	$v(t)=7t^2$
0	0
0.5	1.75
0.75	3.9375

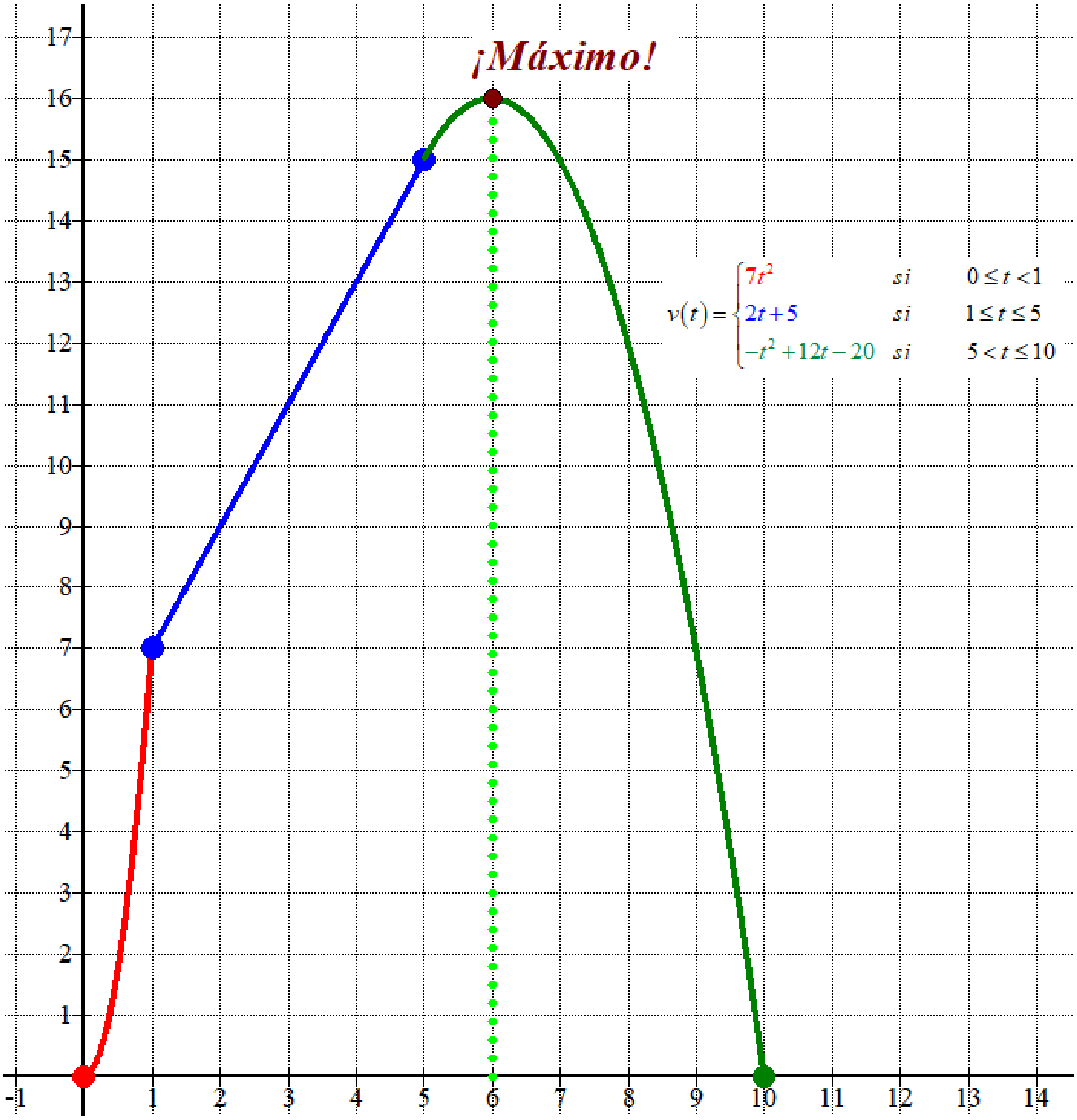
si $1 \le t \le 5$

t	$v(t)=2t+5$
1	7
2	9
5	15

si $5 < t \le 10$

t	$v(t)=-t^2+12t-20$
5.5	15.75
6	16
8	12
10	0

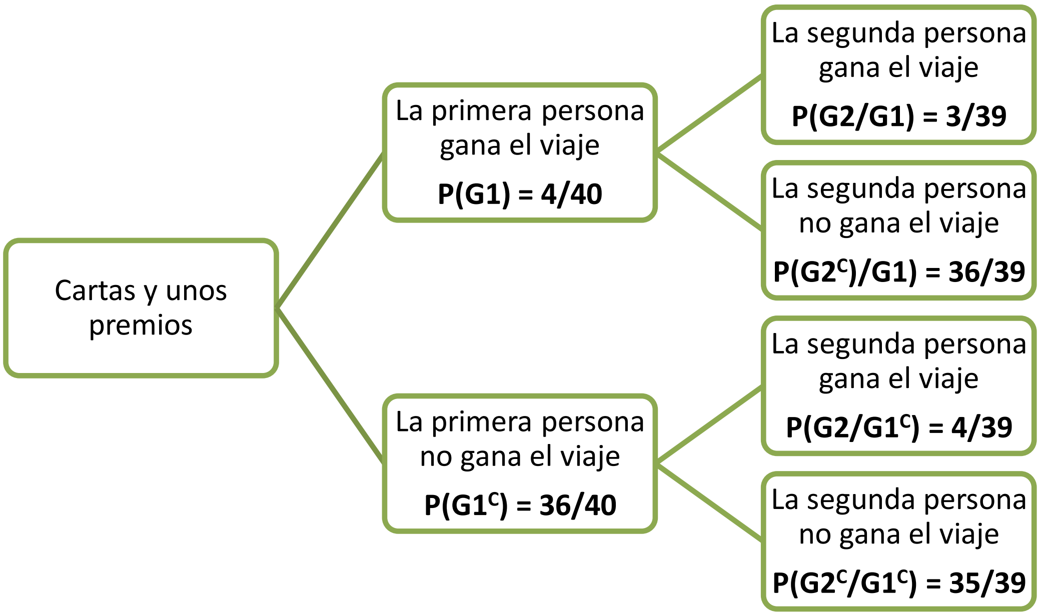
.


¡Máximo!
$v(t)=\begin{cases} 7t^2 & si \quad 0 \le t < 1 \\ 2t+5 & si \quad 1 \le t \le 5 \\ -t^2+12t-20 & si \quad 5 < t \le 10 \end{cases}$

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. [hasta 2,5 puntos]
Se van a sortear 4 viajes a Nueva York entre 40 personas utilizando una baraja de 40 cartas. Se reparte una carta por persona y cada una que recibe un rey ganará un viaje.
a) **[0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que gane un viaje la primera persona que recibe la carta.
b) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que gane un viaje la segunda persona que recibe la carta.
c) **[0,75 puntos]** Calcula la probabilidad de que ninguna de las dos primeras personas gane un viaje.

Llamamos G1 = "Gana la primera persona el viaje" y G2 = "Gana el viaje la segunda persona". Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos la regla de Laplace y $P(G1) = \frac{N^o\, casos\ favorables}{N^o\, casos\ posibles} = \frac{4}{40} = \boxed{0.1}$

b) Hay dos situaciones distintas: Gana el viaje la primera persona y luego la segunda también gana el viaje o No gana el viaje la primera y la segunda gana el viaje.

$$P(G2) = P(G1 \cap G2) + P\left(\overline{G1} \cap G2\right) =$$

$$= P(G1)P(G2/G1) + P\left(\overline{G1}\right)P\left(G2/\overline{G1}\right) =$$

$$= \frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39} + \frac{36}{40}\cdot\frac{4}{39} = \boxed{0.1}$$

c)

$$P\left(\overline{G1} \cap \overline{G2}\right) = P\left(\overline{G1}\right)P\left(\overline{G2}/\overline{G1}\right) = \frac{36}{40}\cdot\frac{35}{39} = \boxed{\frac{21}{26} \simeq 0.8077}$$

B.3. [hasta 2,5 puntos]
Deiene y Kattalin son jugadoras de baloncesto. Deiene encesta 2 de cada 5 tiros; Kattalin 3 de cada 7.
Si ambas tiran a canasta una sola vez, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
a) **[0,75 puntos]** Ambas han encestado.
b) **[0,75 puntos]** Ninguna ha encestado.
c) **[0,5 puntos]** Sólo Deiene ha encestado.
d) **[0,5 puntos]** Al menos una ha encestado.

a) Llamamos A = "Encesta Deiene" y B = "Encesta Kattalin".

Sabemos que $P(A)=\frac{2}{5}$ y $P(B)=\frac{3}{7}$

Nos piden calcular $P(A\cap B)$. Como son dos sucesos independientes:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\boxed{\frac{6}{35}\simeq 0.1714}$$

b) Nos piden calcular $P(\overline{A}\cap\overline{B})$. Como son dos sucesos independientes:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}=\boxed{\frac{12}{35}\simeq 0.3428}$$

c) Nos piden calcular $P(A\cap\overline{B})$. Como son dos sucesos independientes:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}=\boxed{\frac{8}{35}\simeq 0.2286}$$

d) El suceso "Al menos una ha encestado" es el contrario de "Ninguna de las dos ha encestado" cuya probabilidad está calculada en el apartado b).

$$P(\textit{Al menos una ha encestado})=1-P(\text{No encestan ninguna de las dos})=$$

$$=1-\frac{12}{35}=\boxed{\frac{23}{35}\simeq 0.6571}$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. [hasta 2,5 puntos]
La temperatura en un determinado mes sigue una distribución normal de media 10 grados y de varianza 16 grados^2.
a) **[0,9 puntos]** Obtén el intervalo característico para el 80%.
b) **[0,3 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día sea superior a 11º?
c) **[0,6 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día esté entre 8º y 10º?
d) **[0,3 puntos]** ¿Cuál es la proporción de días con más de 9º?
e) **[0,4 puntos]** Si consideramos un mes de 30 días, ¿en cuántos días la temperatura ha sido inferior a 12º?

X = La temperatura en un día de un determinado mes.
Como la varianza es 16 la desviación típica es $\sqrt{16}=4$ grados.
X= N(10, 4)

a) $(10-e, 10+e)$ es el intervalo característico para el 80 %, si se cumple que $P(10-e \le X \le 10+e)=0.80$.
Averiguamos el valor de "*e*".

$$P(10-e \le X \le 10+e)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{10-e-10}{4} \le \frac{X-10}{4} \le \frac{10+e-10}{4}\right)=$$

$$=P\left(-\frac{e}{4} \le Z \le \frac{e}{4}\right)=P\left(Z \le \frac{e}{4}\right)-P\left(Z \le -\frac{e}{4}\right)=$$

$$=P\left(Z \le \frac{e}{4}\right)-P\left(Z \ge \frac{e}{4}\right)=P\left(Z \le \frac{e}{4}\right)-\left[1-P\left(Z \le \frac{e}{4}\right)\right]=$$

$$=P\left(Z \le \frac{e}{4}\right)-1+P\left(Z \le \frac{e}{4}\right)=2P\left(Z \le \frac{e}{4}\right)-1$$

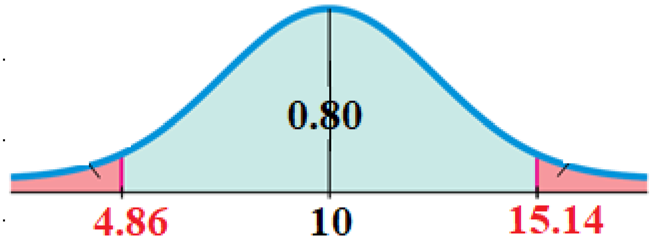
$$\left.\begin{array}{l} P(X \le 10+e)-P(X \le 10-e)=0.8 \\ P(10-e \le X \le 10+e)=2P\left(Z \le \frac{e}{4}\right)-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2P\left(Z \le \frac{e}{4}\right)-1=0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2P\left(Z \le \frac{e}{4}\right)=1.8 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{e}{4}\right)=\frac{1.8}{2}=0.9 \Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla de la N(0, 1)}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e}{4}=\frac{1.28+1.29}{2}=1.285 \Rightarrow \boxed{e=5.14}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	[illegible]	[illegible]
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	[illegible]	[illegible]
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	[illegible]	[illegible]
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	[illegible]	[illegible]
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	[illegible]	[illegible]
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	[illegible]	[illegible]
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	[illegible]	[illegible]
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	[illegible]	[illegible]
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	[illegible]	[illegible]
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	[illegible]	[illegible]
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	[illegible]	[illegible]
1'2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177

El intervalo característico para el 80 % es $(10-5.14, 10+5.14) = (4.86, 15.14)$



b) Nos piden $P(X \geq 11)$

$$P(X \geq 11) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-10}{4} \geq \frac{11-10}{4}\right) = P(Z \geq 0.25) = 1 - P(Z \leq 0.25) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = 1 - 0.5987 = \boxed{0.4013}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'0
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	[illegible]	0'52
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	[illegible]	0'56
0'2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'5987	0'60
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'64

c) Nos piden $P(8 \leq X \leq 10)$.

$$P(8 \leq X \leq 10) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{8-10}{4} \leq \frac{X-10}{4} \leq \frac{10-10}{4}\right) =$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -0.5) = P(Z \leq 0) - P(Z \geq 0.5) =$$

$$= P(Z \leq 0) - [1 - P(Z \leq 0.5)] = \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} =$$

$$= 0.5 - [1 - 0.6915] = \boxed{0.1915}$$

	0	0'
0	0'5000	0'5
0'1	0'5398	0'5
0'2	0'5793	0'5
0'3	0'6179	0'6
0'4	0'6554	0'6
0'5	0'6915	0'6
0'6	0'7257	0'7

d) Calculamos $P(X \geq 9)$.

$$P(X \geq 9) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-10}{4} \geq \frac{9-10}{4}\right) = P(Z \geq -0.25) =$$

$$= P(Z \leq 0.25) = \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = \boxed{0.5987}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'0
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'52
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	[illegible]	0'56
0'2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'5987	0'60
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'64

La proporción de días con más de 9º es del 59.87 %.

e) Calculamos $P(X \leq 12)$.

$$P(X \leq 12) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-10}{4} \leq \frac{12-10}{4}\right) = P(Z \leq 0.5) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = \boxed{0.6915}$$

	0	0'
0	0'5000	0'5
0'1	0'5398	0'5
0'2	0'5793	0'5
0'3	0'6179	0'6
0'4	0'6554	0'6
0'5	0'6915	0'6
0'6	0'7257	0'7

El 69. 15 % de los días del mes tendrán una temperatura inferior a 12º. Como el mes tiene 30 días tendremos $\frac{69.15 \cdot 30}{100} = 20.745$ días con temperatura inferior a 12º. Aproximadamente 21 días.

B.4. [hasta 2,5 puntos]
Para estimar el peso medio de las chicas de 16 años de una ciudad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores:

$$\bar{x} = 52{,}5\ kg \text{ y } s = 5{,}3\ kg$$

Hemos hecho la siguiente afirmación:
"El peso medio de las chicas de 16 años de esta ciudad está entre 51 kg y 54 kg".
¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?

Si tomamos como intervalo de confianza el intervalo (51, 54), se cumple que la media está en el centro del intervalo $\frac{51+54}{2} = 52.5$ y el error es la mitad de la amplitud del intervalo $Error = \frac{54-51}{2} = 1.5$

Utilizamos la fórmula del error $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\left.\begin{array}{l} Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ Error = 1.5 \end{array}\right\} \Rightarrow 1.5 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{5.3}{\sqrt{100}} \Rightarrow 1.5 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{5.3}{10} \Rightarrow 1.5 = z_{\alpha/2} \cdot 0.53 \Rightarrow$$

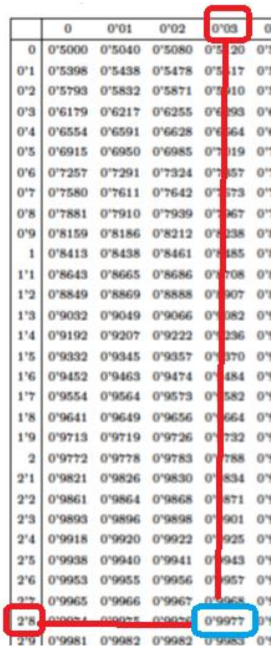
$$\Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.5}{0.53} = 0.283$$

Obtenemos el nivel de confianza (1 – α) a partir del valor de $z_{\alpha/2}$

$$z_{\alpha/2} = 0.283 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9977 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.9977 = 0.0023 \Rightarrow \alpha = 0.0046 \Rightarrow \boxed{1-\alpha = 0.9954}$$

El nivel de confianza es del 99.54 %.

Podemos decir con un nivel de confianza del 99,54 %, que el peso medio de las chicas de 16 años de esa ciudad está entre 51 y 54 kg.



	0	0'01	0'02	0'03
0	0'5000	0'5040	0'5080	[illegible]
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	[illegible]
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	[illegible]
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	[illegible]
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	[illegible]
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	[illegible]
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	[illegible]
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	[illegible]
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	[illegible]
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	[illegible]
1	0'8413	0'8438	0'8461	[illegible]
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	[illegible]
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	[illegible]
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	[illegible]
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	[illegible]
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	[illegible]
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	[illegible]
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	[illegible]
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	[illegible]
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	[illegible]
2	0'9772	0'9778	0'9783	[illegible]
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	[illegible]
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	[illegible]
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	[illegible]
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	[illegible]
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	[illegible]
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	[illegible]
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	[illegible]
2'8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'9977
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983