PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan.** En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Calcula a, b, c y d sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tiene un punto de inflexión en (0, 4) y su recta normal en el punto (1, 8) es paralela al eje de ordenadas.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2-10}{x^2+2x-3}$ $(\text{para } x\neq -3,\ x\neq 1)$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. **(1.25 puntos)**
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x$.

a) Calcula a para que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas. **(1.25 puntos)**
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente a la misma en el punto $(1, f(1))$ y el eje de ordenadas. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\displaystyle\int_1^3 \left|x^2-3x+2\right| dx$

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 5.

a) Calcula razonadamente el determinante de $2A^3$. **(0.5 puntos)**
b) Calcula razonadamente los determinantes

$$\begin{vmatrix} 2a & -1 & 3 \\ 2b & 1/2 & 3 \\ 2c & -1/2 & 3 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+4 & b-2 & c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$$. **(2 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+ my+ mz=1 \\ x+2my+(m+1)z=1 \\ 2x+my+ mz=2 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m. **(1.75 puntos)**
b) Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 1$. **(0.75 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el punto $P(1, 2, 6)$ y el plano $\pi \equiv 2x-y+z=0$

a) Halla las ecuaciones de los planos paralelos a π cuya distancia a éste sea $\sqrt{6}$ unidades. **(1.25 puntos)**
b) Halla el simétrico del punto P respecto al plano π. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $B(-1,0,-1)$, $C(0,1,-3)$ y la recta $r\equiv\begin{cases} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$

a) Calcula un punto que esté en r y equidiste de B y C. **(1.25 puntos)**
b) Siendo $D(1,-1,-2)$, calcula el área del triángulo con vértices en los puntos B, C y D. **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Calcula a, b, c y d sabiendo que la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tiene un punto de inflexión en (0, 4) y su recta normal en el punto (1, 8) es paralela al eje de ordenadas.

Si la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tiene un punto de inflexión en (0, 4) quiere decir que *f(0) = 4* y que *f ´´(0) = 0.*

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \\ f(0)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d \Rightarrow \boxed{d=4}$$

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f''(x)=6ax+2b$$

$$\left.\begin{array}{r} f''(x)=6ax+2b \\ f''(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=6a\cdot 0+2b \Rightarrow 0=2b \Rightarrow \boxed{b=0}$$

La función queda $f(x)=ax^3+cx+4$.

Si la función tiene una recta normal en el punto (1, 8) paralela al eje de ordenadas significa que $f(1)=8$ y que la recta tangente en dicho punto es paralela al eje de abscisas, es decir, que $f'(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax^3+cx+4 \\ f(1)=8 \end{array}\right\} \Rightarrow 8=a\cdot 1^3+c\cdot 1+4 \Rightarrow 8=a+c+4 \Rightarrow \boxed{a+c=4}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax^3+cx+4 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+c \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3a\cdot 1^2+c \Rightarrow \boxed{0=3a+c}$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas.

$$\left.\begin{array}{l} a+c=4 \\ 3a+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+c=4 \\ c=-3a \end{array}\right\} \Rightarrow a-3a=4 \Rightarrow -2a=4 \Rightarrow \boxed{a=-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c=-3\cdot(-2)=6}$$

Los valores buscados son $a=-2,\ b=0,\ c=6$ y $d=4$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^2-10}{x^2+2x-3}$ (para $x\neq -3,\ x\neq 1$).

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1.25 puntos)**

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1.25 puntos)**

a) Por la expresión de la función deducimos que el denominador se anula en *x = –3* y en *x = 1*.

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-3,1\}$

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=-3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-10}{x^2+2x-3}=\frac{(-3)^2-10}{(-3)^2+2(-3)-3}=\frac{-1}{0}=\infty$$

$x=-3$ es asíntota vertical

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-10}{x^2+2x-3}=\frac{1^2-10}{1^2+2(1)-3}=\frac{-9}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-10}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{10}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{10}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=\frac{1}{1}=1$$

$y=1$ es la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No existen pues tiene asíntota horizontal.

Resumiendo: La función tiene dos asíntotas verticales: $x=-3$ y $x=1$ y una asíntota horizontal: $y=1$.

b) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{x^2-10}{x^2+2x-3}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x\left(x^2+2x-3\right)-(2x+2)\left(x^2-10\right)}{\left(x^2+2x-3\right)^2}$$

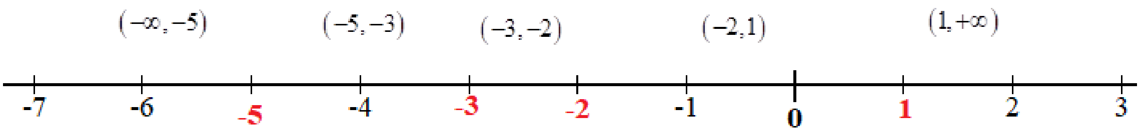
$$f'(x)=\frac{2x^3+4x^2-6x-\left(2x^3-20x+2x^2-20\right)}{\left(x^2+2x-3\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{2x^3}+4x^2-6x-\cancel{2x^3}+20x-2x^2+20}{\left(x^2+2x-3\right)^2}=\frac{2x^2+14x+20}{\left(x^2+2x-3\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2x^2+14x+20}{\left(x^2+2x-3\right)^2}=0 \Rightarrow 2x^2+14x+20=0 \Rightarrow x^2+7x+10=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-40}}{2}=\frac{-7\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{-7+3}{2}=\boxed{-2=x}\\ \dfrac{-7-3}{2}=\boxed{-5=x}\end{cases}$$

Estudiamos la variación del signo de la derivada antes, entre y después de estos valores. Añadimos los valores excluidos del dominio (*x* = *–3* y *x* = *1*).



En el intervalo $(-\infty,-5)$ tomamos *x* = *–6* y la derivada vale

$f'(-6)=\dfrac{2(-6)^2+14(-6)+20}{\left((-6)^2+2(-6)-3\right)^2}=\dfrac{8}{441}>0$. La función crece en $(-\infty,-5)$.

En el intervalo $(-5,-3)$ tomamos *x* = *–4* y la derivada vale

$f'(-4)=\dfrac{2(-4)^2+14(-4)+20}{\left((-4)^2+2(-4)-3\right)^2}=-\dfrac{4}{25}<0$. La función decrece en $(-5,-3)$.

En el intervalo $(-3,-2)$ tomamos *x* = *–2.5* y la derivada vale

$f'(-2.5)=\dfrac{2(-2.5)^2+14(-2.5)+20}{\left((-2.5)^2+2(-2.5)-3\right)^2}=-\dfrac{40}{49}<0$. La función decrece en $(-3,-2)$.

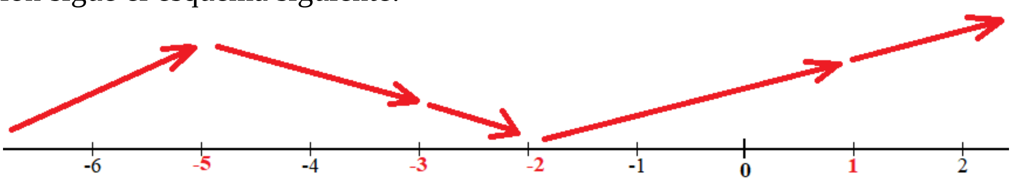
En el intervalo $(-2,1)$ tomamos *x* = *0* y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{2\cdot 0^2+0+20}{\left(0^2+0-3\right)^2}=\dfrac{20}{9}>0$.

La función crece en $(-2,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x* = *2* y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{2\cdot 2^2+28+20}{\left(2^2+4-3\right)^2}=\dfrac{56}{25}>0$.

La función crece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-5)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(-5,-3)\cup(-3,-2)$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x$.

a) Calcula *a* para que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto *(a, f(a))* pase por el origen de coordenadas. **(1.25 puntos)**

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta tangente a la misma en el punto $(1, f(1))$ y el eje de ordenadas. **(1.25 puntos)**

a) Hallamos la ecuación de la recta tangente en *x* = *a*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=e^x \Rightarrow f(a)=e^a \\ f'(x)=e^x \Rightarrow f'(a)=e^a \\ y-f(a)=f'(a)(x-a) \end{array}\right\} \Rightarrow y-e^a=e^a(x-a) \Rightarrow y-e^a=e^a x-ae^a \Rightarrow y=e^a x-ae^a+e^a$$

Averiguamos el valor de “a” para que la recta tangente pase por (0, 0).

$$\left.\begin{array}{l} y=e^a x-ae^a+e^a \\ Pasa\ por\,(0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 0=e^a\cdot 0-ae^a+e^a \Rightarrow -ae^a+e^a=0 \Rightarrow e^a(-a+1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^a=0 \to \text{¡Imposible!} \\ -a+1=0 \to \boxed{a=1} \end{cases}$$

El valor buscado es *a = 1*.

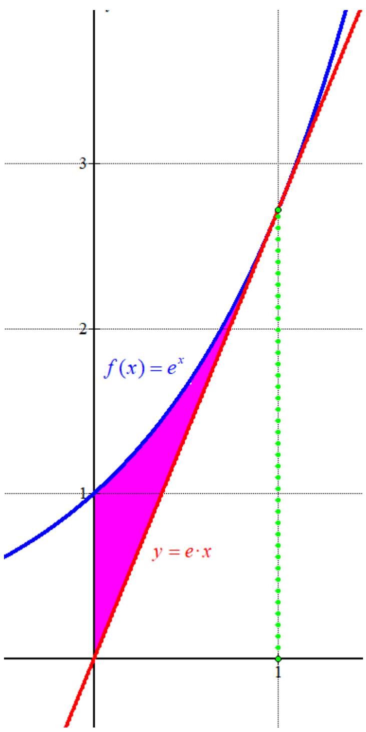
b) Obtenemos la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $(1, f(1))$.

$$\left.\begin{array}{r} y=e^a x-ae^a+e^a \\ a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y=e^1x-e^1+e^1 \Rightarrow \boxed{y=e\cdot x}$$

Dibujamos las gráficas de la función y la recta tangente para visualizar la región de la cual queremos hallar el área.

x	$f(x)=e^x$
-1	$1/e \simeq 0.37$
0	1
1	$e \simeq 2.72$
2	$e^2 \simeq 7.39$

x	$y=e\cdot x$
-1	$-e \simeq -2.72$
0	0
1	$e \simeq 2.72$
2	$2e \simeq 5.44$



El área de la región coloreada de rosa es el valor de la integral definida entre 0 y 1 de la diferencia de la función y la tangente.

$$Área=\int_0^1 e^x-e\cdot x dx=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1=$$

$$=\left[e^1-\frac{e}{2}\cdot 1^2\right]-\left[e^0-\frac{e}{2}\cdot 0^2\right]=e-\frac{e}{2}-1=\boxed{\frac{e}{2}-1\simeq 0.36u^2}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\int_1^3 \left|x^2-3x+2\right| dx$

Obtenemos la expresión de la función que aparece en el integrando como una función a trozos. Vemos cuando vale 0 y la función cambia de signo.

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=\boxed{2=x}\\ \frac{3-1}{2}=\boxed{1=x}\end{cases}$$

La función es positiva antes de 1 y también después de 2. Lo comprobamos.

En $(-\infty,1)$ tomamos $x = 0$ y la función vale $0^2-3\cdot 0+2=2>0$.

En $(1,2)$ tomamos $x = 1.5$ y la función vale $1.5^2-3\cdot 1.5+2=-0.25<0$

En $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la función vale $3^2-3\cdot 3+2=2>0$

Por lo que la expresión de la función es $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|=\begin{cases}x^2-3x+2 & si & x<1\\ -x^2+3x-2 & si & 1\le x\le 2\\ x^2-3x+2 & si & x>2\end{cases}$

La integral pedida se obtiene sumando dos:

$$\int_1^3\left|x^2-3x+2\right|dx=\int_1^2 -x^2+3x-2dx+\int_2^3 x^2-3x+2dx=$$

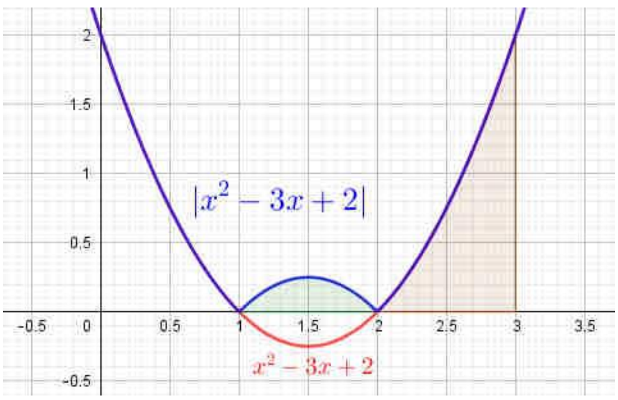
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_2^3=$$

$$=\left(\left[-\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{3}{2}\cdot 2^2-2\cdot 2\right]-\left[-\frac{1}{3}\cdot 1^3+\frac{3}{2}\cdot 1^2-2\cdot 1\right]\right)+\left(\left[\frac{1}{3}\cdot 3^3-\frac{3}{2}\cdot 3^2+2\cdot 3\right]-\left[\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{3}{2}\cdot 2^2+2\cdot 2\right]\right)=$$

$$=\left(-\frac{8}{3}+6-4+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)+\left(9-\frac{27}{2}+6-\frac{8}{3}+6-4\right)=$$

$$=\left(-\frac{7}{3}+4-\frac{3}{2}\right)+\left(17-\frac{27}{2}-\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\boxed{1}$$

Hemos obtenido que $\int_1^3\left|x^2-3x+2\right|dx=1$



BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 5.

a) Calcula razonadamente el determinante de $2A^3$. **(0.5 puntos)**

b) Calcula razonadamente los determinantes

$$\begin{vmatrix} 2a & -1 & 3 \\ 2b & 1/2 & 3 \\ 2c & -1/2 & 3 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+4 & b-2 & c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}.$$ **(2 puntos)**

a) Sabemos que $|A|=5$.

$$|2A^3| = 2^3|A^3| = 8|A\cdot A\cdot A| = 8|A|\cdot|A|\cdot|A| = 8\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 1000$$

b) Calculamos el valor del primer determinante.

$$\begin{vmatrix} 2a & -1 & 3 \\ 2b & 1/2 & 3 \\ 2c & -1/2 & 3 \end{vmatrix} = \{\text{Sacamos factor común 2 en 1ª columna}\} = 2\begin{vmatrix} a & -1 & 3 \\ b & 1/2 & 3 \\ c & -1/2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{Sacamos factor común 3 en 3ª columna}\} = 2\cdot 3\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ b & 1/2 & 1 \\ c & -1/2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \text{Multiplicamos por } -2 \text{ la 2ª columna} \\ \text{y por } -1/2 \text{ fuera del determinante} \end{array}\right\} = 6\cdot\frac{-1}{2}\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ b & -1 & 3 \\ c & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3|A| = -3\cdot 5 = \boxed{-15}$$

El segundo determinante.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+4 & b-2 & c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l} \text{A la 2ª fila le resto la 1ª fila} \\ \text{y el determinante no cambia de valor} \end{array}\right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & -2 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l} \text{A la 3ª fila le resto la 1ª fila} \\ \text{y el determinante no cambia de valor} \end{array}\right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l} \text{Transponemos la matriz} \\ \text{y el determinante no cambia de valor} \end{array}\right\} = \begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ b & -2 & 1 \\ c & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{Saco factor común 2 en 2ª columna}\} = 2\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot|A| = \boxed{10}$$

EJERCICIO 6 **(2.5 puntos)**

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + my + mz = 1 \\ x + 2my + (m+1)z = 1 \\ 2x + my + mz = 2 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de *m*. **(1.75 puntos)**

b) Resuelve el sistema, si es posible, para *m = 1*. **(0.75 puntos)**

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 2m & m+1 \\ 2 & m & m \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & m & m & 1 \\ 1 & 2m & m+1 & 1 \\ 2 & m & m & 2 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 2m & m+1 \\ 2 & m & m \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 2 & m+1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = m\left(\cancel{2m} + \cancel{2m} + 2 + \cancel{m} - \cancel{4m} - \cancel{m} - m - 1\right)$$

$$|A| = m(1-m)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m(1-m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{m=0} \\ \boxed{m=1} \end{cases}$$

Estudiamos por separado 3 casos diferentes.

CASO 1. $m \neq 0$ y $m \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (única solución)

CASO 2. $m = 0$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\quad\quad}^{A}} & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\quad\quad\quad}_{A/B}} \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero el número de incógnitas es 3. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

CASO 3. $m=1$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ \hline 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\quad\quad}^{A}} & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\quad\quad\quad}_{A/B}} \end{array} \right)$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero el número de incógnitas es 3. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) El sistema tiene infinitas soluciones cuando *m = 1*. Determinamos las soluciones partiendo de la matriz triangular equivalente obtenida.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y+z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y=-z \end{array} \right\} \Rightarrow x-z+z=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Soluciones:} \left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ y=-\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array} \right.$$

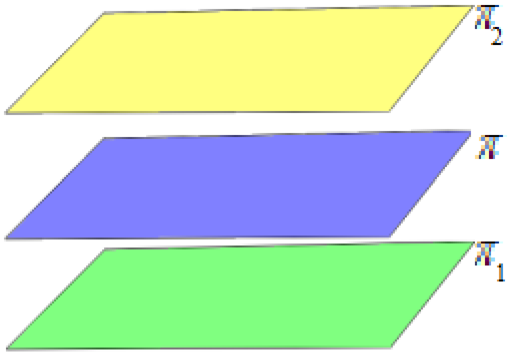
Las soluciones son: $x=1;\ y=-\lambda;\ z=\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R}$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)
Considera el punto *P(1, 2, 6)* y el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$

a) Halla las ecuaciones de los planos paralelos a π cuya distancia a éste sea $\sqrt{6}$ unidades. **(1.25 puntos)**

b) Halla el simétrico del punto *P* respecto al plano π. **(1.25 puntos)**

a) Un plano paralelo a $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ tiene ecuación $\pi' \equiv 2x - y + z + D = 0$.



Como son paralelos la distancia entre ellos es la distancia entre un punto de π y el plano π´.

$$\pi \equiv 2x - y + z = 0 \Rightarrow P(0,0,0) \in \pi$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + z = 0 \\ P(0,0,0) \in \pi \\ \pi' \equiv 2x - y + z + D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(\pi,\pi') = d(P,\pi') = \frac{|2\cdot 0 - 0 + 0 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{6}}$$

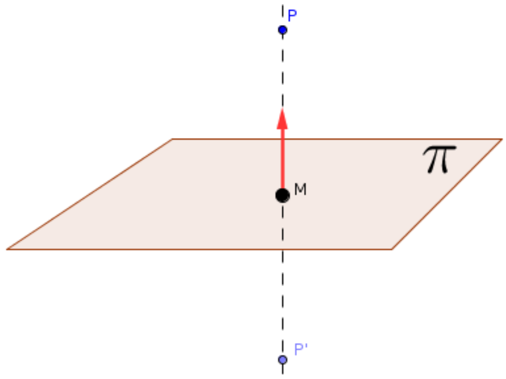
Nos piden hallar los planos paralelos a distancia $\sqrt{6}$.

$$\left.\begin{array}{l} d(\pi,\pi') = \dfrac{|D|}{\sqrt{6}} \\ d(\pi,\pi') = \sqrt{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Rightarrow |D| = \left(\sqrt{6}\right)^2 \Rightarrow |D| = 6 \Rightarrow \begin{cases} D = 6 \\ D = -6 \end{cases}$$

Existen dos planos paralelos a π cuya distancia a éste sea $\sqrt{6}$ unidades:

$$\pi_1 \equiv 2x - y + z + 6 = 0 \text{ y } \pi_2 \equiv 2x - y + z - 6 = 0$$

b) Queremos hallar un punto *P´* simétrico del punto *P* respecto al plano π.



Hallamos la recta *r* perpendicular al plano que pasa por el punto *P*.

$$\pi \equiv 2x - y + z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2,-1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(1,\ 2,\ 6) \in r \\ \vec{v_r} = \vec{n} = (2,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto *M* de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + z = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1+2\lambda) - 2 + \lambda + 6 + \lambda = 0 \Rightarrow 6\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 2 + 1 = 3 \\ z = 6 - 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow M(-1,3,5)$$

El punto *P´* se obtiene sumando al punto *M* el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM} = (-1,3,5) - (1,2,6) = (-2,1,-1)$$

$$P´ = (-1,3,5) + (-2,1,-1) = (-3,4,4)$$

El punto *P´* simétrico del punto *P* respecto al plano π es $P´ = (-3,4,4)$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $B(-1,0,-1)$, $C(0,1,-3)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$

a) Calcula un punto que esté en *r* y equidiste de B y C. **(1.25 puntos)**

b) Siendo $D(1,-1,-2)$, calcula el área del triángulo con vértices en los puntos B, C y D. **(1.25 puntos)**

a) Un punto A de la recta *r* tiene coordenadas $A(-\lambda,1+2\lambda,-1+\lambda)$.

Si equidista de B y C debe ser *d(A, B) = d(A, C)*. Lo cual implica que los módulos de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son iguales.

$$\overrightarrow{AB}=(-1,0,-1)-(-\lambda,1+2\lambda,-1+\lambda)=(-1+\lambda,-1-2\lambda,-\lambda)$$
$$\overrightarrow{AC}=(0,1,-3)-(-\lambda,1+2\lambda,-1+\lambda)=(\lambda,-2\lambda,-2-\lambda)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow \sqrt{(-1+\lambda)^2+(-1-2\lambda)^2+(-\lambda)^2}=\sqrt{\lambda^2+(-2\lambda)^2+(-2-\lambda)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+\lambda^2-2\lambda+1+4\lambda^2+4\lambda+\lambda^2}=\sqrt{\lambda^2+4\lambda^2+4+\lambda^2+4\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{6\lambda^2+2\lambda+2}=\sqrt{6\lambda^2+4\lambda+4} \Rightarrow 6\lambda^2+2\lambda+2=6\lambda^2+4\lambda+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\lambda-2=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=-1} \Rightarrow A(-(-1),1-2,-1-1) \Rightarrow \boxed{A(1,-1,-2)}$$

El punto A que buscamos es $A(1,-1,-2)$.

b) El área del triángulo BCD es la mitad del módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BD}$.

$$\overrightarrow{BC}=(0,1,-3)-(-1,0,-1)=(1,1,-2)$$
$$\overrightarrow{BD}=(1,-1,-2)-(-1,0,-1)=(2,-1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=(1,1,-2)\\ \overrightarrow{BD}=(2,-1,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=-i-4j-k-2k+j-2i=-3i-3j-3k=(-3,-3,-3)$$

$$Área\ ABC=\frac{\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|}{2}=\frac{\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+(-3)^2}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{27}}{2}\simeq 2.598u^2}$$