PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan.** En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{\ln(x+1)}-\frac{a}{x}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x)=\frac{ax^2+b}{a-x}$ (para $x\neq a$).

a) Halla a y b sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2, 3) y tiene una asíntota oblicua cuya pendiente vale –4. **(1.25 puntos)**

b) Para $a = 2$ y $b = 3$, calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2+|x-1|$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. **(1.25 puntos)**

b) Calcula $\int_0^2 f(x)\,dx$. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=xe^x$.

a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y las rectas $x = 2$, $y = x$. **(1 punto)**

b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021
MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} m & m & m \\ m & m+1 & m \\ m & m & m+2 \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de m existe la inversa de la matriz A? Razona la respuesta. **(1.5 puntos)**

b) Para $m = 1$, halla $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}$. **(1 punto)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

En una cafetería, tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja cuestan 7.50 €. Cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja cuestan 7.20 €.

a) Calcula, de forma razonada, el precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja. **(1.5 puntos)**

b) ¿El precio de un zumo de naranja podría ser de 2 €? Razona la respuesta. **(1 punto)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el punto $P(1, 0, 1)$ y el plano $\pi \equiv x-y+z+1=0$

a) Halla el simétrico del punto P respecto al plano π. **(1.25 puntos)**

b) Halla la distancia del punto P al plano π. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-2} = y-1 = \frac{z}{-2} \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x+2y=3 \\ 2y+z=2 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de r y s. **(1.25 puntos)**

b) Calcula, si es posible, el plano que contiene a r y a s. **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{\ln(x+1)}-\frac{a}{x}\right)$ es finito, calcula *a* y el valor del límite (ln denota la función logaritmo neperiano).

Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{\ln(x+1)}-\frac{a}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x(x+1)-a\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}\right)=\frac{0(0+1)-a\ln(0+1)}{0\ln(0+1)}=\frac{0-0}{0}=$$

$$=Indeterminación\,(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(x+1)+x-a\frac{1}{x+1}}{\ln(x+1)+x\frac{1}{x+1}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x+1-\frac{a}{x+1}}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}\right)=\frac{0+1-\frac{a}{0+1}}{\ln(0+1)+\frac{0}{0+1}}=\frac{1-a}{0}=¿?$$

Como el límite debe ser finito debe cumplirse que *1 – a = 0* y poder seguir teniendo una indeterminación y poder aplicar la regla de L´Hôpital.
El valor buscado es *a = 1*.
Termino de calcular el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x+1-\frac{1}{x+1}}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}\right)=\frac{0+1-\frac{1}{0+1}}{\ln(0+1)+\frac{0}{0+1}}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=$$

$$=Indeterminación\,(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{-1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1(x+1)-1\cdot x}{(x+1)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}}=\frac{2+\frac{1}{(0+1)^2}}{\frac{1}{0+1}+\frac{1}{(0+1)^2}}=\frac{2+1}{1+1}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea f la función definida por $f\left(x\right)=\dfrac{ax^2+b}{a-x}$ $\left(\text{para } x\neq a\right)$.

a) Halla a y b sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2, 3) y tiene una asíntota oblicua cuya pendiente vale –4. **(1.25 puntos)**

b) Para $a = 2$ y $b = 3$, calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$. **(1.25 puntos)**

a) Si la gráfica de f pasa por el punto (2, 3) se cumple que $f(2) = 3$.

$$\left.\begin{array}{r} f\left(x\right)=\dfrac{ax^2+b}{a-x} \\ f\left(2\right)=3 \end{array}\right\}\Rightarrow 3=\frac{4a+b}{a-2}\Rightarrow 3a-6=4a+b\Rightarrow \boxed{-6=a+b}$$

Si tiene una asíntota oblicua cuya pendiente vale –4 quiere decir que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=-4$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=-4 \\ f\left(x\right)=\dfrac{ax^2+b}{a-x} \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+b}{a-x}}{x}=-4\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{ax-x^2}=-4\Rightarrow \frac{a}{-1}=-4\Rightarrow \boxed{a=4}$$

Sustituimos el valor obtenido en la primera ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} a=4 \\ a+b=-6 \end{array}\right\}\Rightarrow 4+b=-6\Rightarrow \boxed{b=-10}$$

Los valores buscados son $a = 4$ y $b = -10$.

b) Para $a = 2$ y $b = 3$ la función queda $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2+3}{2-x}$ $\left(\text{para } x\neq 2\right)$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ tiene ecuación $y-f\left(1\right)=f'\left(1\right)\left(x-1\right)$.

$$f\left(x\right)=\frac{2x^2+3}{2-x}\Rightarrow f\left(1\right)=\frac{2\cdot 1^2+3}{2-1}=5$$

$$f\left(x\right)=\frac{2x^2+3}{2-x}\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{4x\left(2-x\right)-\left(-1\right)\left(2x^2+3\right)}{\left(2-x\right)^2}=\frac{8x-4x^2+2x^2+3}{\left(2-x\right)^2}$$

$$f'\left(x\right)=\frac{-2x^2+8x+3}{\left(2-x\right)^2}\Rightarrow f'\left(1\right)=\frac{-2\cdot 1^2+8\cdot 1+3}{\left(2-1\right)^2}=9$$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(1\right)=5 \\ f'\left(1\right)=9 \\ y-f\left(1\right)=f'\left(1\right)\left(x-1\right) \end{array}\right\}\Rightarrow y-5=9\left(x-1\right)\Rightarrow y-5=9x-9\Rightarrow \boxed{y=9x-4}$$

La recta tangente tiene ecuación $y=9x-4$.

La ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 1$ tiene ecuación $y - f(1) = \frac{-1}{f'(1)}(x-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=5 \\ f'(1)=9 \\ y-f(1)=\dfrac{-1}{f'(1)}(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-5=\frac{-1}{9}(x-1) \Rightarrow y-5=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{9}x+\frac{46}{9}}$$

La ecuación de la recta normal es $y=-\frac{1}{9}x+\frac{46}{9}$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2+|x-1|$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1.25 puntos)**

b) Calcula $\int_0^2 f(x)\,dx$. **(1.25 puntos)**

a) Expresamos la función como una función definida a trozos.

$$f(x)=x^2+|x-1|=\begin{cases} x^2-x+1 & si \quad x<1 \\ x^2+x-1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & si \quad x<1 \\ 2x+1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases} 2x-1=0\to x=\dfrac{1}{2} & si \quad x<1 \\ 2x+1=0\to x=-\dfrac{1}{2} & si \quad x>1 \text{ ¡No es posible!} \end{cases}$$

La derivada se anula en $x = 1/2$.
Estudiamos el signo de la derivada antes de 1/2, entre 1/2 y 1, y después de 1.

En el intervalo $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=0-1=-1<0$. La función decrece en $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{1}{2},1\right)$ tomamos $x = 0.75$ y la derivada vale $f'(0.75)=1.5-1=0.5>0$. La función crece en $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=4+1=5>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ y crece en $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

b) La función en el intervalo (0, 2) está definida de dos formas distintas, por lo que la integral definida pedida se calcula con la suma de dos integrales definidas.

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2-x+1dx+\int_1^2 x^2+x-1dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2=$$

$$=\left[\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+1\right]-\left[\frac{0^3}{3}-\frac{0^2}{2}+0\right]+\left[\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}-2\right]-\left[\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}-1\right]=$$

$$=\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}+1+\frac{8}{3}+\cancel{2-2}-\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}+1=\boxed{\frac{11}{3}}$$

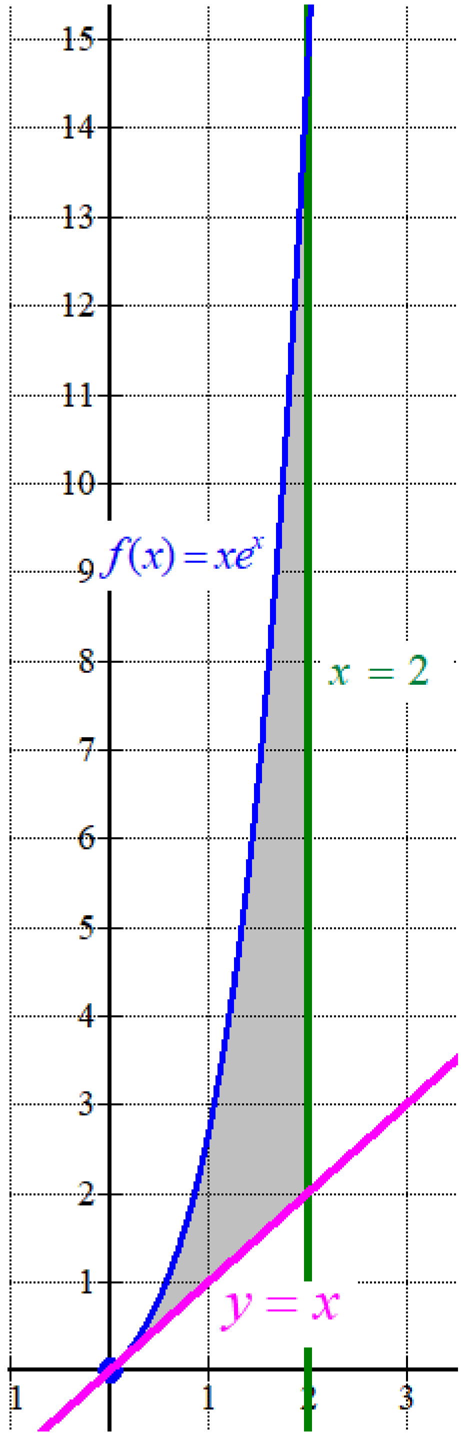
EJERCICIO 4 **(2.5 puntos)**
Considera la función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=xe^x$.
a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y las rectas $x = 2$, $y = x$. **(1 punto)**
b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

a) Hacemos una tabla de valores para cada función.

x	$f(x)=xe^x$
0	0
1	$e\simeq 2.7$
2	$2e^2\simeq 14.8$
3	$3e^3\simeq 60.3$

x	$y=x$
0	0
1	1
2	2
3	3

$x=2$	y
2	0
2	1
2	2
2	3



b) El valor del área se obtiene calculando la integral definida entre 0 y 2 de la diferencia de las funciones $f(x) = xe^x$ e $y = x$.

$$Área = \int_0^2 xe^x - xdx$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int xe^x - xdx = \int xe^x dx - \int xdx = \int xe^x dx - \frac{x^2}{2} = \ldots$$

$$\boxed{\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x}$$

$$\ldots = xe^x - e^x - \frac{x^2}{2} + K$$

Seguimos calculando la integral definida.

$$Área = \int_0^2 xe^x - xdx = \left[xe^x - e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 =$$

$$= \left[2e^2 - e^2 - \frac{2^2}{2} \right] - \left[0e^0 - e^0 - \frac{0^2}{2} \right] = e^2 - 2 + 1 = \boxed{e^2 - 1 \simeq 6.39 u^2}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} m & m & m \\ m & m+1 & m \\ m & m & m+2 \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de *m* existe la inversa de la matriz *A*? Razona la respuesta. **(1.5 puntos)**

b) Para *m* = *1*, halla $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}$. **(1 punto)**

a) Para que exista la inversa de A su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & m & m \\ m & m+1 & m \\ m & m & m+2 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{Fila } 2^{a} - \text{Fila } 1^{a} \\ \text{El determinante no cambia de valor}\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 1^{a} \\ \text{El determinante no cambia de valor}\end{matrix}\right\}=\begin{vmatrix} m & m & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2m$$

$$|A|=0\Rightarrow 2m=0\Rightarrow \boxed{m=0}$$

La matriz inversa de A existe cuando *m* es distinto de 0.

b) Para *m* = *1* la matriz queda $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2}A=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}\Rightarrow\left|\frac{1}{2}A\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^3|A|=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2=\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(\frac{1}{2}A\right)^T\right)}{\left|\left(\frac{1}{2}A\right)\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}}{1/4}=$$

$$=4\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} 5/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)
En una cafetería, tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja cuestan 7.50 €. Cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja cuestan 7.20 €.
a) Calcula, de forma razonada, el precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja. **(1.5 puntos)**
b) ¿El precio de un zumo de naranja podría ser de 2 €? Razona la respuesta. **(1 punto)**

a) Sea x = precio de un café, y = precio de una tostada, z = precio de un zumo de naranja.

"Tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja cuestan 7.50 €" → $3x+y+2z=7.5$
"Cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja cuestan 7.20 €" → $4x+y+z=7.2$

Tenemos el sistema $\left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=7.5 \\ 4x+y+z=7.2 \end{array}\right\}$. Lo convertimos en otro sistema equivalente triangular.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=7.5 \\ 4x+y+z=7.2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -3\cdot\text{Ecuación }2^{a}+4\cdot\text{Ecuación }1^{a} \\ \begin{array}{rrrl} -12x & -3y & -3z & =-21.6 \\ 12x & +4y & +8z & =30 \\ \hline & y & +5z & =8.4 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=7.5 \\ y+5z=8.4 \end{array}\right\}$$

Le añadimos la ecuación que nos plantean en la pregunta, asignando un valor "m" a lo que se indica → dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja valen "m" → $2x+y+3z=m$

El nuevo sistema queda $\left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=7.5 \\ y+5z=8.4 \\ 2x+y+3z=m \end{array}\right\}$. Triangulamos el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=7.5 \\ y+5z=8.4 \\ 2x+y+3z=m \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\cdot\text{Ecuación }3^{a}-2\cdot\text{Ecuación }1^{a} \\ \begin{array}{rrrl} 6x & +3y & +9z & =3m \\ -6x & -2y & -4z & =-15 \\ \hline & y & +5z & =3m-15 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=7.5 \\ y+5z=8.4 \\ y+5z=3m-15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación }3^{a}-\text{Ecuación }2^{a} \\ \begin{array}{rrcl} y & +5z & = & 3m-15 \\ -y & -5z & = & -8.4 \\ \hline & 0 & = & 3m-23.4 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=7.5 \\ y+5z=8.4 \\ {\color{red}0=3m-23.4} \end{array}\right\}$$

Como el sistema debe tener solución debe ser $3m-23.4=0 \Rightarrow 3m=23.4 \Rightarrow m=\frac{23.4}{3}=7.8\,€$

El precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja es de 7.8 €.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO (Cortesía de **Germán-Jesús Rubio Luna**)

"Tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja cuestan 7.50 €" → $3x+y+2z=7.5$
"Cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja cuestan 7.20 €" → $4x+y+z=7.2$
"Dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja valen "m" → $2x+y+3z=m$

Realizando operaciones con las dos primeras ecuaciones intento conseguir la tercera ecuación.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=7.5 \\ 4x+y+z=7.2 \\ 2x+y+3z=m \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} 4x & +y & +z & =7.2 \\ -3x & -y & -2z & =-7.5 \\ \hline x & & -z & =-0.3 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=7.5 \\ x \quad\quad -z=-0.3 \\ 2x+y+3z=m \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª} - \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrrl} 3x & +y & +2z & =7.5 \\ -x & & +z & =0.3 \\ \hline 2x & +y & +3z & =7.8 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 1ª} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y+3z=7.8 \\ x \quad\quad -z=-0.3 \\ 2x+y+3z=m \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{m=7.8}$$

El precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja es de 7.8 €.

b) ¿Puede ser $z = 2$?
Colocamos este valor en el sistema y vemos si es posible encontrar el resto de precios.

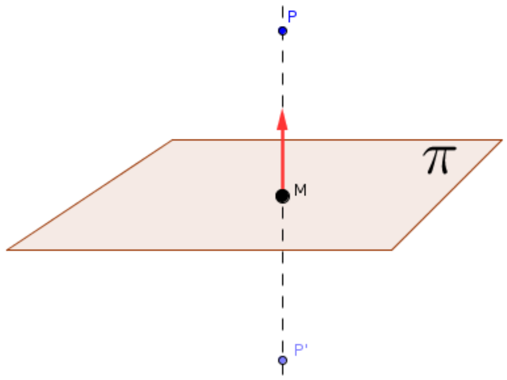
$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=7.5 \\ 4x+y+z=7.2 \end{array}\right\} \\ z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y+4=7.5 \\ 4x+y+2=7.2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y=3.5 \\ 4x+y=5.2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=3.5-3x \\ 4x+y=5.2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+3.5-3x=5.2 \Rightarrow x=1.7 \Rightarrow y=3.5-3\cdot 1.7=-1.6 \text{ ¡Imposible!}$$

No es posible que una tostada tenga un precio negativo.
El zumo de naranja no puede costar 2 €.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)
Considera el punto *P(1, 0, 1)* y el plano $\pi \equiv x - y + z + 1 = 0$
a) Halla el simétrico del punto *P* respecto al plano π. **(1.25 puntos)**
b) Halla la distancia del punto *P* al plano π. **(1.25 puntos)**

a) Queremos hallar un punto *P´* simétrico del punto *P* respecto al plano π.



Hallamos la recta *r* perpendicular al plano que pasa por el punto *P*.

$$\pi \equiv x - y + z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1,-1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(1,\ 0,\ 1) \in r \\ \vec{v_r} = \vec{n} = (1,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto *M* de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - y + z + 1 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda+\lambda+1+\lambda+1 = 0 \Rightarrow 3\lambda+3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1-1 = 0 \\ y = 1 \\ z = 1-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0,1,0)$$

El punto *P´* se obtiene sumando al punto *M* el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM} = (0,1,0) - (1,0,1) = (-1,1,-1)$$

$$P´ = (0,1,0) + (-1,1,-1) = (-1,2,-1)$$

El punto *P´* simétrico del punto *P* respecto al plano π es $P´ = (-1,2,-1)$.

b)

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x - y + z + 1 = 0 \\ P(1,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi) = \frac{|1-0+1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3} \simeq 1.73\ u}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO (Cortesía de **Germán-Jesús Rubio Luna**)

$$\overrightarrow{PM} = (-1,1,-1)$$

$$d(P,\pi) = d(P,M) = \left|\overrightarrow{PM}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{3} \simeq 1.73\ u}$$

EJERCICIO 8 **(2.5 puntos)**
Considera las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-2} = y-1 = \frac{z}{-2} \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x+2y=3 \\ 2y+z=2 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de r y s. **(1.25 puntos)**
b) Calcula, si es posible, el plano que contiene a r y a s. **(1.25 puntos)**

a) Obtenemos un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$r \equiv \frac{x-2}{-2} = y-1 = \frac{z}{-2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(2,1,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (-2,1,-2) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+2y=3 \\ 2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ z=2-2y \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=2-2\lambda \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} Q_s(3,0,2) \\ \overrightarrow{u_s} = (-2,1,-2) \end{cases}$$

Los vectores tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas son coincidentes o paralelas.

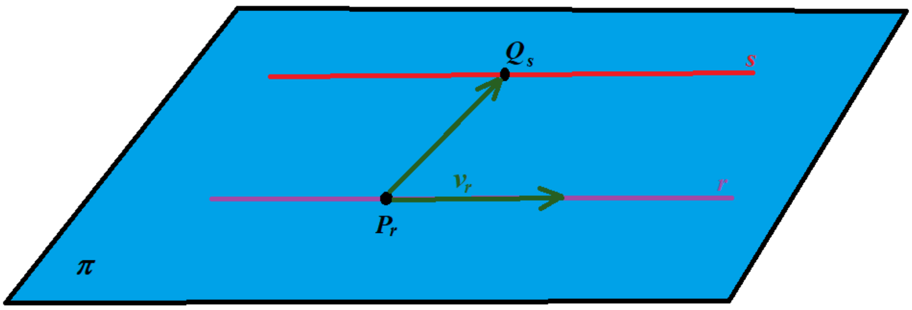
$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r} = (-2,1,-2) \\ \overrightarrow{u_s} = (-2,1,-2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow ¡¡\ \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{u_s}\ !!$$

Comprobamos si el punto P_r está en la recta s. De ser afirmativo las rectas son coincidentes, de ser negativo las rectas son paralelas.

$$\left.\begin{matrix} ¿P_r(2,1,0) \in s? \\ s \equiv \begin{cases} x+2y=3 \\ 2y+z=2 \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} ¿2+2=3?\ ¡No! \\ ¿2+0=2?\ ¡Si! \end{cases}$$

El punto P_r no está en la recta s y las rectas son paralelas.

b) Es posible calcular el plano que contiene las dos rectas, pues son paralelas.
El plano que las contiene tiene como vectores directores el vector director de una de ellas y el vector que une un punto de r con un punto de s.



$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (3,0,2)-(2,1,0)=(1,-1,2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{v_r}=(-2,1,-2)\\ \vec{v}=\overrightarrow{P_rQ_s}=(1,-1,2)\\ P_r(2,1,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2x}-4-2y+2+2z-z+4y-\cancel{4}-\cancel{2x}+\cancel{4}=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv 2y+z-2=0}$$

El plano que contiene a las rectas r y s tiene ecuación $\pi\equiv 2y+z-2=0$.