PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS

CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función continua $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln\left(e^x+x^3\right)}{x} & si\ \ x<0 \\ 4x^2+a & si\ \ 0\le x<1 \\ b+sen(\pi x) & si\ \ 1\le x \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1.25 puntos)**

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula $\int_0^{\pi/2}\left(2sen^2(x)-\cos^2(x)\right)dx$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=|x|-2$ y por $g(x)=4-x^2$.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que delimitan. **(1 punto)**

b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

<u>EJERCICIO 5</u> (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Estudia, según los valores de λ, el rango de la matriz $A-\lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden tres. **(1.75 puntos)**

b) Resuelve el sistema $(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y halla, si existe, una solución en la que $x = 2$.

(0.75 puntos)

<u>EJERCICIO 6</u> (2.5 puntos)

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ m & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula m para que AB no tenga inversa. **(1 punto)**
b) Estudia el rango de la matriz BA según los valores de m. **(1.5 puntos)**

<u>EJERCICIO 7</u> (2.5 puntos)

Considera las rectas

$$r\equiv\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases} \qquad y \qquad s\equiv\begin{cases} 2x-y-2=0 \\ y+2z-4=0 \end{cases}$$

a) Halla el plano que contiene a r y es paralelo a s. **(1.5 puntos)**
b) Deduce razonadamente que ningún plano perpendicular a s contiene a r. **(1 punto)**.

<u>EJERCICIO 8</u> (2.5 puntos)

Considera los puntos A(1,2,3), B(–2,4,–3) y C(–10,1,0).

a) Halla el área del triángulo de vértices A, B y C. **(1.25 puntos)**
b) Halla el plano que equidista de A y B. **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función continua $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(e^x+x^3\right)}{x} & si \quad x<0\\ 4x^2+a & si \quad 0\le x<1\\ b+sen\left(\pi x\right) & si \quad 1\le x\end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano). Determina *a* y *b*.

La función debe ser continua en *x = 0*.
Calculamos los límites laterales.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln\left(e^x+x^3\right)}{x}=\frac{\ln\left(e^0+0^3\right)}{0}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{e^x+3x^2}{e^x+x^3}}{1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+3x^2}{e^x+x^3}=\frac{e^0+3\cdot 0^2}{e^0+0^3}=\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}4x^2+a=4\cdot 0^2+a=a$$

Obligamos a que sea continua en *x = 0*.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=a\\ f(0)=a\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=1}$$

La función debe ser continua en *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}4x^2+a=4\cdot 1^2+a=4+a\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}b+sen\left(\pi x\right)=b+sen\left(\pi\right)=b\\ f(1)=4+a\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{4+a=b}$$

Como *a = 1* entonces *4 + 1 = b* → *b = 5*.

Los valores buscados son *a = 1* y *b = 5*.

<u>EJERCICIO 2</u> (2.5 puntos)

Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1.25 puntos)**

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1.25 puntos)**

a) El dominio de la función son todos los números reales, pues el denominador no se anula nunca.

$$e^{2x}+1=0\Rightarrow e^{2x}=-1\Rightarrow \text{¡Imposible!, la función exponencial siempre es positiva.}$$

Asíntota vertical. $x=a$.

No existen, pues el dominio es $\mathbb{R}$.

Asíntota horizontal. $y=b$

Estudiamos la situación cuando $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^{+\infty}-1}{e^{+\infty}+1}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación\,(L\acute{}Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{2e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}1=\boxed{1}$$

Estudiamos la situación cuando $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^{-\infty}-1}{e^{-\infty}+1}=\frac{0-1}{0+1}=\boxed{-1}$$

La asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$ es la recta $y=1$.

La asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$ es la recta $y=-1$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntotas horizontales no tiene asíntota oblicua.

b) Hallamos la derivada de la función y estudiamos su variación de signo.

$$f\acute{}(x)=\frac{2e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)-2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}=\frac{2e^{4x}+2e^{2x}-2e^{4x}+2e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}=\frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

La derivada es siempre positiva, pues el numerador es una función exponencial ($4e^{2x}$) y el denominador esta elevado al cuadrado y además la expresión $\left(e^{2x}+1\right)$ es siempre positiva.

La función es creciente en todo $\mathbb{R}$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula $\int_0^{\pi/2}\left(2sen^2(x)-\cos^2(x)\right)dx$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int\left(2sen^2(x)-\cos^2(x)\right)dx=\int\left(2sen^2(x)-\left(1-sen^2(x)\right)\right)dx=$$

$$=\int 2sen^2(x)-1+sen^2(x)dx=\int 3sen^2(x)-1dx=\int 3sen^2(x)dx-\int 1dx=$$

$$=3\int sen^2(x)dx-x=\ldots$$

$$\int sen^2(x)dx=\int sen(x)sen(x)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=sen(x)\to du=\cos(x)dx\\ dv=sen(x)dx\to v=\int sen(x)dx=-cos(x)\end{array}\right\}=$$

$$=sen(x)\left(-\cos(x)\right)-\int\left(-cos(x)\right)\cos(x)dx=-sen(x)\cos(x)+\int\cos^2(x)dx=$$

$$=-sen(x)\cos(x)+\int 1-sen^2(x)dx=-sen(x)\cos(x)+\int 1dx-\int sen^2(x)dx=$$

$$=-sen(x)\cos(x)+x-\int sen^2(x)dx$$

$$\int sen^2(x)dx=-sen(x)\cos(x)+x-\int sen^2(x)dx\Rightarrow 2\int sen^2(x)dx=-sen(x)\cos(x)+x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int sen^2(x)dx=\frac{x-sen(x)\cos(x)}{2}$$

$$\ldots=3\frac{x-sen(x)\cos(x)}{2}-x=\frac{3x-3sen(x)\cos(x)-2x}{2}=\boxed{\frac{x-3sen(x)\cos(x)}{2}+K}$$

Usamos este resultado para determinar el valor de la integral definida pedida.

$$\int_0^{\pi/2}\left(2sen^2(x)-\cos^2(x)\right)dx=\left[\frac{x-3sen(x)\cos(x)}{2}\right]_0^{\pi/2}=$$

$$=\left[\frac{\pi/2-3sen(\pi/2)\cos(\pi/2)}{2}\right]-\left[\frac{0-3sen(0)\cos(0)}{2}\right]=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

EJERCICIO 4 **(2.5 puntos)**

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x| - 2$ y por $g(x) = 4 - x^2$.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que delimitan. **(1 punto)**

b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

a) La función $f(x) = |x| - 2$ es una función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} -x-2 & si\ x<0 \\ x-2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$.

Buscamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \begin{cases} -x-2 & si\ x<0 \\ x-2 & si\ x \geq 0 \end{cases} \\ g(x) = 4-x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -x-2 = 4-x^2 \rightarrow x^2-x-6=0 \rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2+24}}{2} = \\ \quad = \dfrac{1\pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+5}{2} = 3 \notin (-\infty, 0) \\ \dfrac{1-5}{2} = -2 \in (-\infty, 0) \end{cases} \\ o \\ x-2 = 4-x^2 \rightarrow x^2+x-6=0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2+24}}{2} = \\ \quad = \dfrac{-1\pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+5}{2} = 2 \in [0, +\infty) \\ \dfrac{-1-5}{2} = -3 \notin [0, +\infty) \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte de ambas gráficas se producen en $x = -2$ y en $x = 2$.

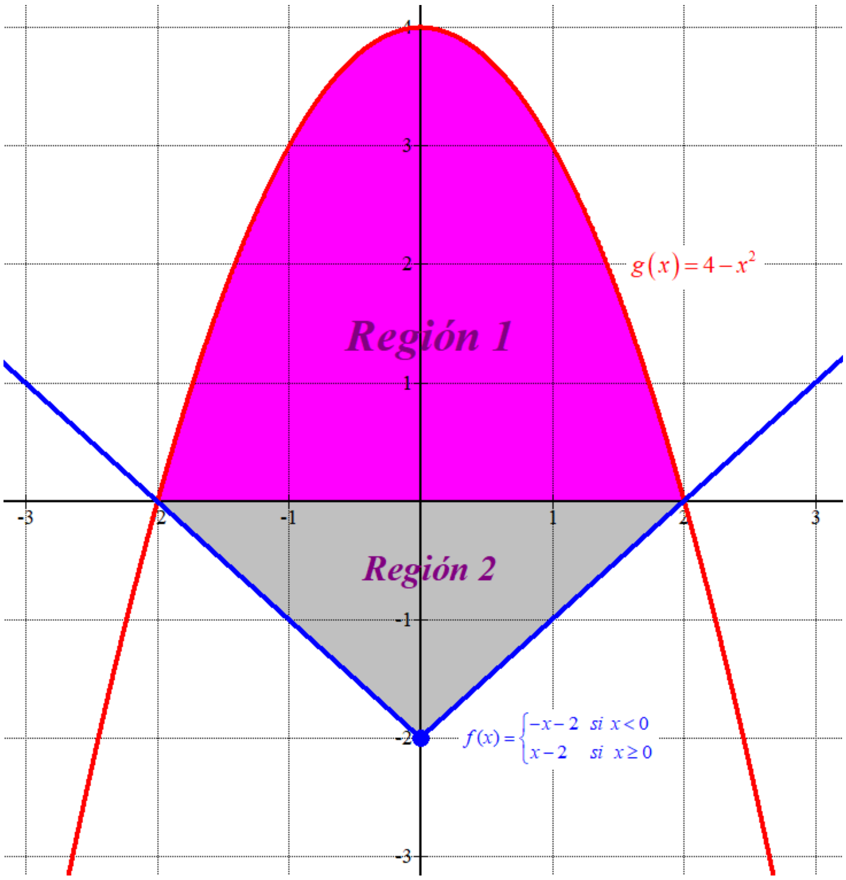
Para dibujar sus gráficas hacemos una tabla de valores de cada una. Sabemos que una es una función a trozos (dos trozos de recta que cambia en $x = 0$) y la otra es una parábola.

$f(x) = \begin{cases} -x-2 & si\ x<0 \\ x-2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$

x	$f(x)$
–2	0
–1	–1
0	–2
1	–1
2	0

$g(x) = 4 - x^2$

x	$g(x)$
–2	0
–1	3
0	4
1	3
2	0



b) El recinto que limitan las dos gráficas tiene dos partes diferenciadas.
La región 2 situada por debajo del eje de abscisas (de color gris) es un triángulo de base 4 y altura 2, por lo que:

$$\text{Área de la región 2} = \frac{4\cdot 2}{2} = 4 \text{ u}^2.$$

La región 1 es la limitada entre la gráfica de la función $g(x)=4-x^2$ y el eje de abscisas.
Calculamos su área con una integral definida de la función entre –2 y 2.

$$\text{Área de la región}\,1 = \int_{-2}^{2} 4-x^2dx = \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left[4\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right]-\left[4(-2)-\frac{(-2)^3}{3}\right]=$$

$$=8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}=\boxed{\frac{32}{3}u^2}$$

El área de la región limitada por las dos gráficas es la suma de las dos áreas obtenidas.

$$\text{Área total} = 4+\frac{32}{3}=\frac{44}{3}\simeq 14.67\ u^2$$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}2&0&2\\-1&2&1\\0&1&4\end{pmatrix}$

a) Estudia, según los valores de λ, el rango de la matriz $A-\lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden tres. **(1.75 puntos)**

b) Resuelve el sistema $(A-I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ y halla, si existe, una solución en la que $x = 2$.

(0.75 puntos)

a) Determinamos la expresión de $A-\lambda I$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}2&0&2\\-1&2&1\\0&1&4\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\lambda&0&2\\-1&2-\lambda&1\\0&1&4-\lambda\end{pmatrix}$$

Hallamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&2\\-1&2-\lambda&1\\0&1&4-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(4-\lambda)-2-2+\lambda=$$

$$=(4+\lambda^2-4\lambda)(4-\lambda)-4+\lambda=16+4\lambda^2-16\lambda-4\lambda-\lambda^3+4\lambda^2-4+\lambda$$

$$|A-\lambda I|=-\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12$$

$$|A-\lambda I|=0\Rightarrow-\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12=0\Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & -1 & 8 & -19 & 12\\
1 & & -1 & 7 & -12\\
\hline
 & -1 & 7 & -12 & \lfloor 0
\end{array}\Rightarrow\boxed{\lambda=1}\text{ es raíz}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12=(\lambda-1)(-\lambda^2+7\lambda-12)\Rightarrow$$

$$-\lambda^2+7\lambda-12=0\Rightarrow\lambda=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4(-1)(-12)}}{-2}=\frac{-7\pm1}{-2}=\begin{cases}\frac{-7+1}{-2}=\boxed{3=\lambda}\\[2mm]\frac{-7-1}{-2}=\boxed{4=\lambda}\end{cases}$$

Estudiamos cuatro casos diferentes.

CASO 1. $\lambda\neq1;\ \lambda\neq3\ y\ \ \lambda\neq4$

En este caso el determinante de $A-\lambda I$ es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $\lambda = 1$

En este caso el determinante de $A - \lambda I = A - I$ es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

La matriz tiene un menor de orden 2 con determinante no nulo, que resulta de quitar la fila y columna 1ª → $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$. El rango de $A - I$ es 2.

CASO 3. $\lambda = 3$

En este caso el determinante de $A - \lambda I = A - 3I$ es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz tiene un menor de orden 2 con determinante no nulo, que resulta de quitar la fila y columna 1ª → $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$. El rango de $A - 3I$ es 2.

CASO 4. $\lambda = 4$

En este caso el determinante de $A - \lambda I$ es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matriz tiene un menor de orden 2 con determinante no nulo, que resulta de quitar la fila y columna 1ª → $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$. El rango de $A - 4I$ es 2.

Resumiendo: Si $\lambda \neq 1$; $\lambda \neq 3$ *y* $\lambda \neq 4$ el rango de $A - \lambda I$ es 3. Si $\lambda = 1$, $\lambda = 3$ o $\lambda = 4$ el rango de $A - \lambda I$ es 2.

b) Hallamos la expresión del sistema y lo resolvemos.

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \boxed{x = -2z} \\ -x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2z + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y + 3z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y + 3z = 0 \Rightarrow \boxed{y = -3z}$$

La solución es $x = -2t,\ y = -3t,\ z = t;\ t \in \mathbb{R}$.

¿Existe una solución en la que $x = 2$?

$$\left.\begin{array}{r} x = -2t \\ x = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = -3(-1) = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

Si existe. La solución es $x = 2$; $y = 3$; $z = -1$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & m & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ m & -1\end{pmatrix}$.

a) Calcula m para que AB no tenga inversa. **(1 punto)**
b) Estudia el rango de la matriz BA según los valores de m. **(1.5 puntos)**

a) Para que AB no tenga inversa el determinante debe ser nulo.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ m & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1-2\\ 1+m & 1+2m-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1+m & 2m\end{pmatrix}$$

$$|AB|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1+m & 2m\end{vmatrix}=2m+1+m=3m+1$$

$$|AB|=0\Rightarrow 3m+1=0\Rightarrow \boxed{m=\frac{-1}{3}}$$

La matriz AB no tiene inversa cuando $m=\frac{-1}{3}$.

b) Calculamos la expresión de BA.

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\\ m & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & m & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1 & -1+m & 1\\ 2 & 2m & 2\\ m-1 & -m-m & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & m-1 & 1\\ 2 & 2m & 2\\ m-1 & -2m & -1\end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante.

$$|BA|=\begin{vmatrix}2 & m-1 & 1\\ 2 & 2m & 2\\ m-1 & -2m & -1\end{vmatrix}=-\cancel{4m}+2(m-1)^2-\cancel{4m}-2m^2+2m+2m-2+\cancel{8m}=$$

$$=2\left(m^2+1-2m\right)-2m^2+4m-2=\cancel{2m^2}+\cancel{2}-\cancel{4m}-\cancel{2m^2}+\cancel{4m}-\cancel{2}=0$$

El determinante de AB es nulo, independientemente del valor de m.

Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 2ª nos queda un menor con determinante no nulo → $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4-2=2\neq 0$.

El rango de BA es 2, independientemente del valor de m.

EJERCICIO 7 **(2.5 puntos)**

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ y+2z-4=0 \end{cases}$$

a) Halla el plano que contiene a *r* y es paralelo a *s*. **(1.5 puntos)**

b) Deduce razonadamente que ningún plano perpendicular a *s* contiene a *r*. **(1 punto)**.

a) El plano π que contiene a *r* y es paralelo a *s* tiene como vectores directores los vectores directores de la recta *r* y *s*. Y pasa por un punto cualquiera de la recta *r*.

Hallamos primero un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3,2,1) \\ P_r(2,-1,3) \end{cases}}$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ y+2z-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ y=-2z+4 \end{cases} \Rightarrow 2x+2z-4-2=0 \Rightarrow 2x+2z-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+z-3=0 \Rightarrow x=3-z \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=3-t \\ y=4-2t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (-1,-2,1) \\ Q_s(3,4,0) \end{cases}}$$

Hallamos la ecuación del plano π pedido.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{u_r} = (3,2,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{v_s} = (-1,-2,1) \\ P_r(2,-1,3) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-4-y-1-6z+18+2z-6-3y-3+2x-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-4y-4z=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x-y-z=0}$$

La ecuación del plano que contiene a *r* y es paralelo a *s* es $\pi \equiv x-y-z=0$.

b) Un plano π´ perpendicular a la recta *s* tiene como vector normal el vector director de la recta *s*.

$$s \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (-1,-2,1) \\ Q_s(3,4,0) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{v_s} = (-1,-2,1) \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv -x-2y+z+D=0}$$

Hallamos los puntos de corte de este plano y la recta *r*. Buscamos el número de soluciones, que indicarán si la recta está contenida o no en el plano.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases} \\ \pi' \equiv -x-2y+z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2-3\lambda+2-4\lambda+3+\lambda+D=0 \Rightarrow -6\lambda=-D-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{D+3}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2+\frac{D+3}{2} = \frac{D+7}{2} \\ y = -1+\frac{D+3}{3} = \frac{D}{3} \\ z = 3+\frac{D+3}{6} = \frac{D+21}{6} \end{cases} \Rightarrow \boxed{P\left(\frac{D+7}{2}, \frac{D}{3}, \frac{D+21}{6}\right)}$$

El plano π´ y la recta *r* solo coinciden en un punto P, por lo que dicho plano nunca contiene a la recta.

OTRA FORMA DE HACERLO

b) Usando el vector director de la recta *r* y el vector normal del plano perpendicular a la recta *s* que es el vector director de la recta *s*.
Si los vectores de estas dos rectas son perpendiculares habrá un plano perpendicular a *s* que puede contener a la recta *r*. De no ser así no existe dicho plano.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3,2,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1,-2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = (3,2,1)(-1,-2,1) = -3-4+1 = -6 \neq 0$$

Al ser el producto escalar no nulo las rectas no son perpendiculares y la situación planteada no es posible.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)
Considera los puntos A(1,2,3), B(–2,4,–3) y C(–10,1,0).
a) Halla el área del triángulo de vértices A, B y C. **(1.25 puntos)**
b) Halla el plano que equidista de A y B. **(1.25 puntos)**

a) El área del triángulo de vértices A, B y C es la mitad del producto vectorial de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

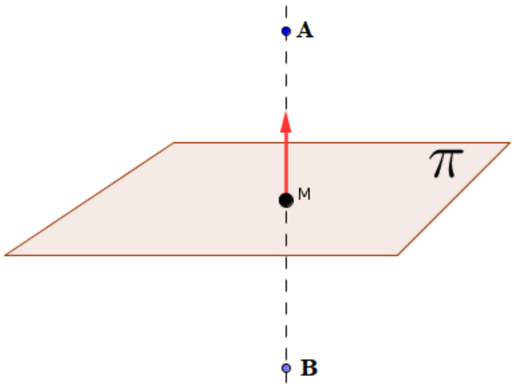
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(-10,1,0)-(1,2,3)=(-11,-1-3)\\ \overrightarrow{AB}=(-2,4,-3)-(1,2,3)=(-3,2,-6)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -11 & -1 & -3 \\ -3 & 2 & -6\end{vmatrix}=$$

$$=6i+9j-22k-3k-66j+6i=12i-57j-25k=(12,-57,-25)$$

$$Área\ ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|}{2}=\frac{\sqrt{12^2+(-57)^2+(-25)^2}}{2}=\boxed{\frac{7\sqrt{82}}{2}\simeq 31.69\ u^2}$$

El área del triángulo de vértices A, B y C vale $\frac{7\sqrt{82}}{2}\simeq 31.69\ u^2$

c) Buscamos la ecuación del plano π del dibujo.



Hallamos el punto M que pertenecerá al plano π y que es el punto medio del segmento AB.

$$M=\frac{(-2,4,-3)+(1,2,3)}{2}=\left(-\frac{1}{2},3,0\right)$$

El vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{AB}$. Hallamos la ecuación del plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(-3,2,-6)\\ M=\left(-\frac{1}{2},3,0\right)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\pi\equiv -3x+2y-6z+D=0\\ M=\left(-\frac{1}{2},3,0\right)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow -3\left(\frac{-1}{2}\right)+2\cdot 3-6\cdot 0+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}+6+D=0\Rightarrow D=-6-\frac{3}{2}=-\frac{15}{2}\Rightarrow \pi\equiv -3x+2y-6z-\frac{15}{2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi\equiv -6x+4y-12z-15=0}$$

La ecuación del plano buscado es $\pi\equiv -6x+4y-12z-15=0$.