Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 5

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Razone que la matriz B es invertible y después calcule B^{-1}. [1,25 puntos]

b) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A+B\cdot X=C\cdot A$. [1,25 puntos]

2. Sean las funciones $f(x)=x^3-9x$ y $g(x)=7x$.

a) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*. [1,25 puntos]

b) Calcule el área de la región del semiplano $x\geq 0$ comprendida entre las gráficas de *f(x)* y *g(x)*. [1,25 puntos]

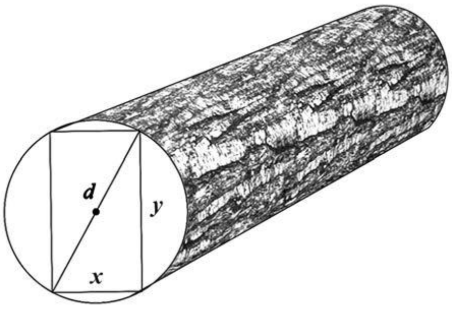
3. Considere los puntos del espacio tridimensional $A = (1, a, 1)$, $B = (a, 1, 2)$, $C = (1, 1, 1)$ y $D = (0, 0, 0)$, donde a es un parámetro real.

a) Determine el valor del parámetro a para el que los puntos son diferentes y coplanarios (es decir, que existe un plano que los contiene). [1,25 puntos]

b) Para el valor $a = 2$, calcule el área del triángulo de vértices A, B y C. [1,25 puntos]

NOTA: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores v y w, se puede utilizar la expresión $S=\frac{1}{2}\left\|v\times w\right\|$, donde $v\times w$ es el producto vectorial de los vectores v y w.

4. La resistencia a la rotura R de una viga de sección rectangular de base x y altura y es directamente proporcional al producto xy^2; por tanto, $R=kxy^2$, donde k es una constante positiva. Disponemos de un tronco de madera en forma de cilindro de diámetro d como el de la figura.



a) Compruebe que la resistencia R de la viga rectangular de base x que podemos construir con este tronco viene dada por la expresión $R=kx\left(d^2-x^2\right)$. [1.25 puntos]

b) Calcule las dimensiones de la viga rectangular de resistencia máxima que podemos construir a partir de este tronco y calcula esta resistencia máxima. [1.25 puntos]

5. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+2y+az=8 \\ 2x+y-az=1 \\ 3x-3az=1 \end{cases}$$

a) Compruebe que, para cualquier valor del parámetro a, el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución. [1,25 puntos]

b) Interprete geométricamente el sistema de ecuaciones lineales. Haga un dibujo esquemático que represente la posición relativa de los tres planos. [1,25 puntos]

6. Resuelve las dos cuestiones siguientes:

a) Sea $f(x)=2x^3+mx^2+nx+p$ una función que tiene dos extremos relativos en $x=-3$ y en $x=1$ y que pasa por el punto (3, 4). Calcule los valores de m, n y p. [1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ en $x=-3$. [1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Razone que la matriz B es invertible y después calcule B^{-1}. [1,25 puntos]

b) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A+B\cdot X=C\cdot A$. [1,25 puntos]

a) La matriz B es invertible si su determinante es no nulo.

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0-1=-1\neq 0$$

La matriz B es invertible. Calculamos su inversa.

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A+B\cdot X=C\cdot A\Rightarrow B\cdot X=C\cdot A-A\Rightarrow X=B^{-1}\left(C\cdot A-A\right)$$

Sustituimos el valor de las matrices y calculamos X.

$$C\cdot A-A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10-3 & 5+4 \\ -21 & 28 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -18 & 24 \end{pmatrix}$$

$$X=B^{-1}\left(C\cdot A-A\right)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -18 & 24 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -18 & 24 \\ 5+18 & 8-24 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} -18 & 24 \\ 23 & -16 \end{pmatrix}}$$

2. Sean las funciones $f(x)=x^3-9x$ y $g(x)=7x$.

a) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*. [1,25 puntos]

b) Calcule el área de la región del semiplano $x\geq 0$ comprendida entre las gráficas de *f(x)* y *g(x)*. [1,25 puntos]

a) Calculamos la derivada, la igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función.

$$f'(x)=3x^2-9$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-9=0\Rightarrow x^2-3=0\Rightarrow x^2=3\Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{3}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

En el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale $f'(-2)=3(-2)^2-9=3>0$. La función crece en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$.

En el intervalo $\left(-\sqrt{3},+\sqrt{3}\right)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=3\cdot 0^2-9=-9<0$. La función decrece en $\left(-\sqrt{3},+\sqrt{3}\right)$.

En el intervalo $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=3\cdot 2^2-9=3>0$. La función crece en $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$.

La función crece en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ y decrece en $\left(-\sqrt{3},+\sqrt{3}\right)$.

b) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-9x \\ g(x)=7x \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\}\Rightarrow x^3-9x=7x\Rightarrow x^3-16x=0\Rightarrow x\left(x^2-16\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ o \\ x^2-16=0\rightarrow x^2=16\rightarrow x=\sqrt{16}=\pm 4 \end{array}\right.$$

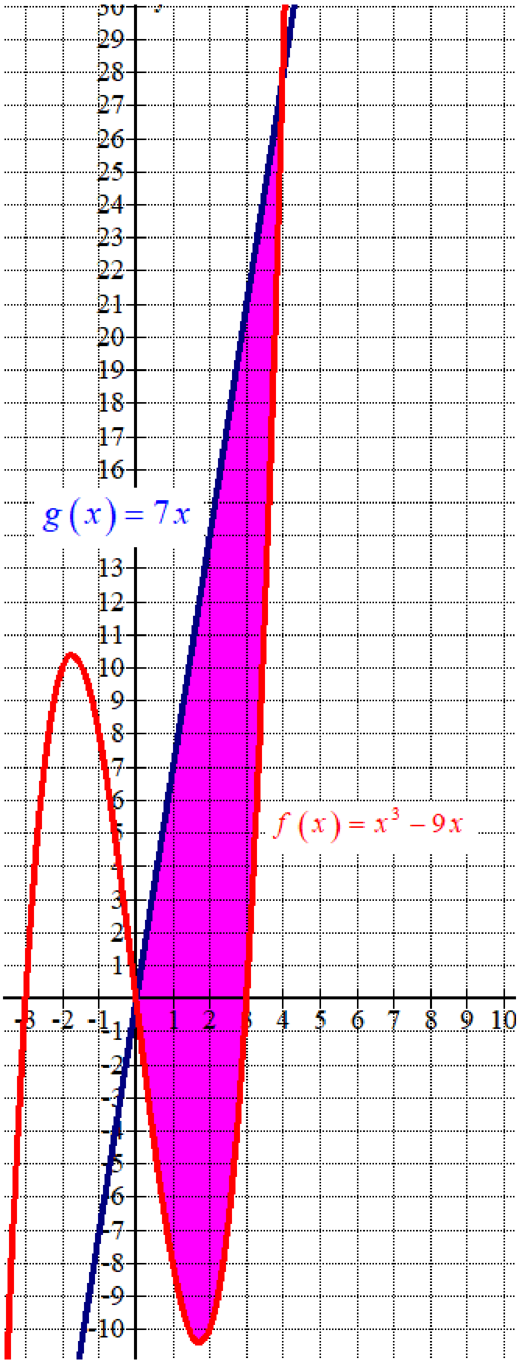
Como estamos situando la región en el semiplano $x\geq 0$, los puntos de corte son dos: *x = 0* y *x = 4.*

El área de la región pedida es el valor de la integral definida entre 0 y 4 de la diferencia entre las dos funciones. Como $\left.\begin{array}{l} f(1)=1^3-9=-8 \\ g(1)=7 \end{array}\right\}\Rightarrow f(1)<g(1)$ tomaremos *g(x) – f(x).*

$$\acute{A}rea = \int_0^4 g(x) - f(x)\,dx = \int_0^4 7x - \left(x^3 - 9x\right)dx = \int_0^4 16x - x^3 dx =$$

$$= \left[8x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^4 = \left[8\cdot 4^2 - \frac{1}{4}\cdot 4^4\right] - \left[8\cdot 0^2 - \frac{1}{4}\cdot 0^4\right] = \boxed{64\ u^2}$$

No lo pide, pero dibujamos las gráficas de las dos funciones y la región que delimitan cuando $x \geq 0$ y comprobamos que la región que delimitan es tan grande como hemos obtenido.



3. Considere los puntos del espacio tridimensional $A = (1, a, 1)$, $B = (a, 1, 2)$, $C = (1, 1, 1)$ y $D = (0, 0, 0)$, donde a es un parámetro real.

a) Determine el valor del parámetro a para el que los puntos son diferentes y coplanarios (es decir, que existe un plano que los contiene). [1,25 puntos]

b) Para el valor $a = 2$, calcule el área del triángulo de vértices A, B y C. [1,25 puntos]

NOTA: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores v y w, se puede utilizar la expresión $S = \frac{1}{2}\|v \times w\|$, donde $v \times w$ es el producto vectorial de los vectores v y w.

a) Como los puntos tienen que ser distintos el punto $A = (1, a, 1)$ no puede ser igual al $C = (1,1,1)$, por lo que a ≠ 1.

Hallamos el plano que contiene a los puntos B, C y D. Para ser coplanarios el punto A debe pertenecer a dicho plano.

Hallamos la ecuación del plano que contiene a los puntos B, C y D.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{DC} = (1,1,1) - (0,0,0) = (1,1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{DB} = (a,1,2) - (0,0,0) = (a,1,2) \\ D(0,0,0) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + ay + z - az - 2y - x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x + (a-2)y + (1-a)z = 0}$$

Hacemos que el punto A pertenezca al plano π.

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x + (a-2)y + (1-a)z = 0 \\ A(1,a,1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + (a-2)\cdot a + (1-a)\cdot 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + a^2 - 2a + 1 - a = 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2 = a} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1 = a} \end{cases}$$

Como a no puede valer 1 pues los puntos A y D serían el mismo, el valor de “a” que buscamos es $a = 2$.

OTRA FORMA DE HACERLO

Para que sean coplanarios debe ser linealmente dependientes los vectores $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, y\ \overrightarrow{DC}$.

El determinante de la matriz que forman las coordenadas de dichos vectores debe ser 0.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{DA} = (1,a,1) - (0,0,0) = (1,a,1) \\ \overrightarrow{DB} = (a,1,2) - (0,0,0) = (a,1,2) \\ \overrightarrow{DC} = (1,1,1) - (0,0,0) = (1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 + 2a + a - 1 - a^2 - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a^2+3a-2=0 \Rightarrow a^2-3a+2=0 \Rightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=\boxed{2=a}\\ \frac{3-1}{2}=\boxed{1=a}\end{cases}$$

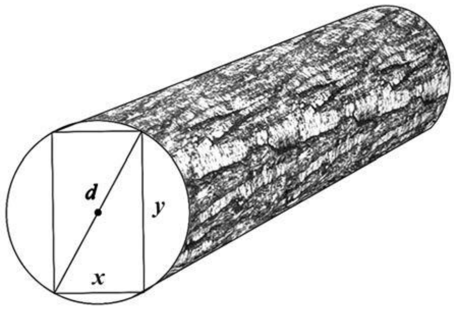
De estos dos valores obtenidos solo es válido *a = 2*, pues si *a = 1* los puntos A y D son el mismo.

b) El área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C* es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(2,1,2)-(1,2,1)=(1,-1,1)\\ \overrightarrow{AC}=(1,1,1)-(1,2,1)=(0,-1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=-k+i=i-k=(1,0,-1)$$

$$\acute{A}rea\ \ ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\ u^2}$$

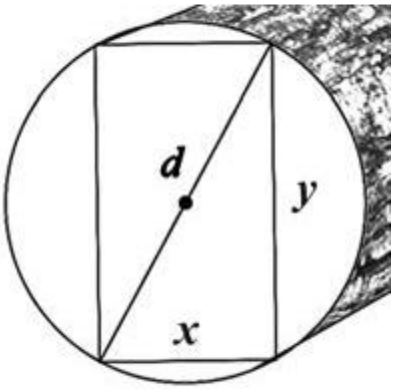
4. La resistencia a la rotura R de una viga de sección rectangular de base x y altura y es directamente proporcional al producto xy^2; por tanto, $R = kxy^2$, donde k es una constante positiva. Disponemos de un tronco de madera en forma de cilindro de diámetro d como el de la figura.



a) Compruebe que la resistencia R de la viga rectangular de base x que podemos construir con este tronco viene dada por la expresión $R = kx\left(d^2 - x^2\right)$. [1.25 puntos]

b) Calcule las dimensiones de la viga rectangular de resistencia máxima que podemos construir a partir de este tronco y calcula esta resistencia máxima. [1.25 puntos]

a) Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo del dibujo:



$$\left.\begin{array}{l} d^2 = x^2 + y^2 \to y^2 = d^2 - x^2 \\ R = kxy^2 \end{array}\right\} \Rightarrow R = kx\left(d^2 - x^2\right)$$

b) Derivamos la función e igualamos a cero su derivada en busca de los puntos críticos.

$$R = kx\left(d^2 - x^2\right) = kd^2x - kx^3 \Rightarrow R´ = kd^2 - 3kx^2$$

$$R´ = 0 \Rightarrow kd^2 - 3kx^2 = 0 \Rightarrow 3kx^2 = kd^2 \Rightarrow x^2 = \frac{kd^2}{3k} = \frac{d^2}{3} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{d^2}{3}} = \frac{d}{\sqrt{3}}}$$

Calculamos la segunda derivada y sustituimos el valor obtenido.

$$R´ = kd^2 - 3kx^2 \Rightarrow R´´ = -6kx \Rightarrow R´´\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) = -6k\frac{d}{\sqrt{3}} < 0$$

El valor de la derivada segunda es negativo pues los valores de d y k son positivos. Por ello la resistencia es máxima en $x = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{3}$.

El valor de y es $y^2 = d^2 - \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2d^2}{3} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{2d^2}{3}} = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{6}}{3}$

Las dimensiones de la viga son $x = \frac{d\sqrt{3}}{3}$ e $y = \frac{d\sqrt{6}}{3}$.

La resistencia máxima es de:

$$\left.\begin{array}{r} R = kx\left(d^2 - x^2\right) \\ x = \dfrac{d\sqrt{3}}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow R = k\frac{d\sqrt{3}}{3}\left(d^2 - \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2\right) = k\frac{d\sqrt{3}}{3}\left(d^2 - \frac{d^2}{3}\right) = k\frac{d\sqrt{3}}{3}\frac{2d^2}{3}$$

$$\boxed{R = kd^3\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

5. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+2y+az=8 \\ 2x+y-az=1 \\ 3x-3az=1 \end{cases}$$

a) Compruebe que, para cualquier valor del parámetro a, el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución. [1,25 puntos]

b) Interprete geométricamente el sistema de ecuaciones lineales. Haga un dibujo esquemático que represente la posición relativa de los tres planos. [1,25 puntos]

a) La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & 0 & -3a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3a & 1 \end{pmatrix}$

Comprobamos el rango de A:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & 0 & -3a \end{vmatrix}=-3a-6a-3a+12a=0$$

El rango de A es menor de 3.

Comprobamos si el rango de A/B es 3.
Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna tercera.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+6-24-4=-21\neq 0$$

El rango de la matriz ampliada A/B es 3 independientemente del valor de “a”.

Conclusión: El rango de A es menor de 3 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible, sea cual sea el valor de “a”.

b) El sistema planteado son tres planos que no coinciden en ningún punto.
Además, no hay ningún par de planos paralelos, dado que de los tres vectores normales (un vector normal en cada plano) no hay ningún par con coordenadas proporcionales.

$$\begin{cases} x+2y+az=8 \to \vec{n}=(1,2,a) \\ 2x+y-az=1 \to \vec{n'}=(2,1,-a) \\ 3x-3az=1 \to \vec{n''}=(3,0,-3a) \end{cases}$$

6. Resuelve las dos cuestiones siguientes:

a) Sea $f(x)=2x^3+mx^2+nx+p$ una función que tiene dos extremos relativos en $x=-3$ y en $x=1$ y que pasa por el punto (3, 4). Calcule los valores de *m*, *n* y *p*. [1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ en $x=-3$. [1,25 puntos]

a) Si tiene dos extremos relativos en $x=-3$ y en $x=1$ debe cumplirse que *f ´(–3) = 0* y *f ´(1) = 0.*

$$f(x)=2x^3+mx^2+nx+p \Rightarrow f'(x)=6x^2+2mx+n$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=6x^2+2mx+n \\ f'(-3)=0 \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6(-3)^2+2m(-3)+n=0 \\ 6\cdot 1^2+2m\cdot 1+n=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 54-6m+n=0 \\ 6+2m+n=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} n=6m-54 \\ 6+2m+n=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6+2m+6m-54=0 \Rightarrow 8m=48 \Rightarrow \boxed{m=6} \Rightarrow \boxed{n=36-54=-18}$$

La función queda $f(x)=2x^3+6x^2-18x+p$

Como la función pasa por el punto (3, 4) tenemos que:

$$f(3)=4=2\cdot 3^3+6\cdot 3^2-18\cdot 3+p \to 4=54+54-54+p \to \boxed{p=-50}$$

Los valores buscados son *m = 6*, *n = –18* y *p = –50*.

b) La ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x=-3$ tiene la expresión:

$$y-f(-3)=f'(-3)(x+3)$$

Calculamos *f(–3)* y *f ´ (–3)*.

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow f(-3)=\frac{1+3}{1-3}=-2$$

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-1\cdot(1+x)-1\cdot(1-x)}{(1+x)^2}=\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=\frac{-2}{(1+x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(-3)=\frac{-2}{(1-3)^2}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

La recta tangente queda:

$$\left.\begin{array}{r} f(-3)=-2 \\ f'(-3)=\dfrac{-1}{2} \\ y-f(-3)=f'(-3)(x+3) \end{array}\right\} \Rightarrow y+2=\frac{-1}{2}(x+3) \Rightarrow y+2=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{2}x-\frac{7}{2}}$$