Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2022

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 3

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. El mástil que sostiene la lona de la carpa de un circo se sitúa perpendicularmente sobre el plano de un suelo cuya ecuación es π: $x - z = 6$. Se sabe que la cúpula de la carpa (el punto más elevado por el que pasa el mástil) está en el punto de coordenadas $P = (30, 1, 0)$.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que contiene el mástil. [1 punto]

b) Calcule las coordenadas del punto de contacto del mástil con el suelo, y la longitud del mástil. [1,5 puntos]

2. Considere la función $f(x) = \dfrac{9}{x^2 + x - 2}$.

a) Determine el dominio, las posibles asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. [1,25 puntos]

b) Calcula la ecuación general de la recta tangente a la función *f(x)* en el punto de abscisa $x = 4$. Represente en un mismo gráfico la función *f(x)* y la recta tangente [1,25 puntos]

3. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}$, que depende el parámetro a.

a) Calcule el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro a. [1,25 puntos]

b) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, resuelva la siguiente ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. [1,25 puntos]

4. ***a)*** Considere la función $f(x)=\begin{cases} \ln(x), \ si \ \ x\in(0,e) \\ ax+b, \ si \ \ x\in[e,4) \end{cases}$, donde *a* y *b* son números reales. Encuentre el valor de *a* y de *b* para que la función sea continua y derivable en el intervalo (0, 4). [1,25 puntos]

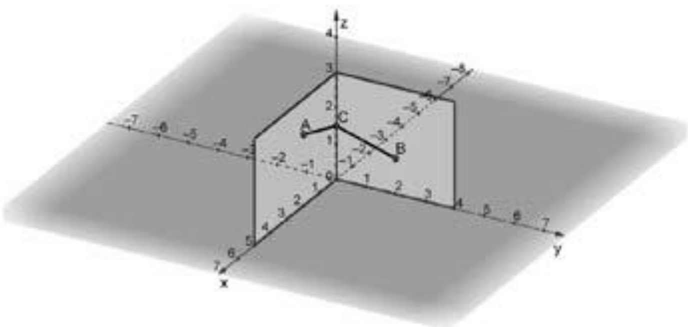
b) Calcule la función *g(x)* que satisface $g'(x)=\dfrac{x^3}{9x^4+1}$ y que pasa por el punto (0,–1). [1,25 puntos]

5. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en la que *a* es un parámetro real.

a) Calcule los valores del parámetro *a* para los cuales la matriz A es invertible. [1,25 puntos]

b) Para el caso *a = 3*, resuelva la ecuación $A\cdot X=B-3I$ en la que $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. [1,25 puntos]

6. La siguiente imagen muestra dos paredes perpendiculares de una sala representadas en unos ejes de coordenadas, de modo que una pared está en el plano *y = 0* y la otra está en el plano *x = 0*.



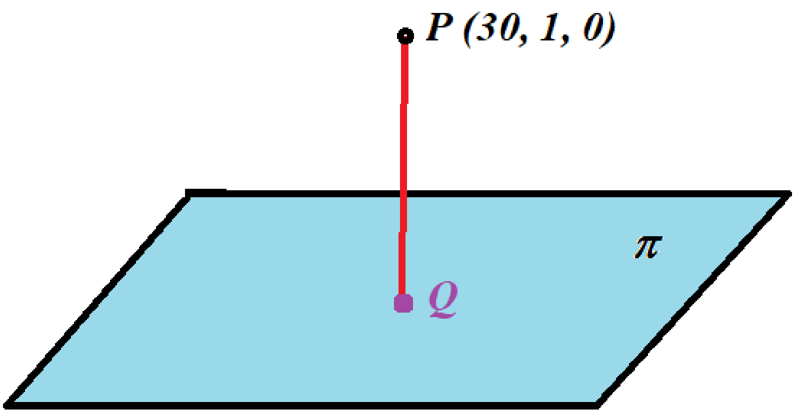
En el punto A = (2, 0, 2) queremos colgar un altavoz que debe estar conectado a un equipo de sonido, el cual está situado en la otra pared, en el punto B = (0, 2, 1). La conexión entre A y B se hará mediante un cable que pase por el punto C = (0, 0, h), situado en la recta vertical de intersección de las dos paredes. Dado que la calidad del sonido depende, entre otros factores, de la longitud del cable que une los dos aparatos, se quiere realizar una instalación con el mínimo de cable posible.

a) Compruebe que la longitud total del cable necesario, en función de la altura *h* por donde debe pasar el cable en el eje vertical OZ, viene dada por la expresión $L(h)=\sqrt{h^2-4h+8}+\sqrt{h^2-2h+5}$ [0,75 puntos]

b) Calcule las coordenadas del punto C por donde debe pasar el cable para que la longitud del cable sea mínima. Calcule esta longitud mínima del cable. [1,75 puntos]

SOLUCIONES

1. El mástil que sostiene la lona de la carpa de un circo se sitúa perpendicularmente sobre el plano de un suelo cuya ecuación es π: $x - z = 6$. Se sabe que la cúpula de la carpa (el punto más elevado por el que pasa el mástil) está en el punto de coordenadas $P = (30, 1, 0)$.
a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que contiene el mástil. [1 punto]
b) Calcule las coordenadas del punto de contacto del mástil con el suelo, y la longitud del mástil**.** [1,5 puntos]



a) La recta *r* que contiene el mástil (de color rojo en el dibujo) tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x - z = 6 \Rightarrow \vec{n} = (1,0,-1)$$

$$r \equiv \begin{cases} \vec{v_r} = \vec{n} = (1,0,-1) \\ P(30,1,0) \in r \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 30+\lambda \\ y = 1+0\lambda \\ z = 0-\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x = 30+\lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

b) Debemos averiguar las coordenadas del punto Q del dibujo intersección de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 30+\lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases} \\ \pi : x - z = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 30+\lambda+\lambda = 6 \Rightarrow 2\lambda = -24 \Rightarrow \lambda = -12 \Rightarrow \begin{cases} x = 30-12 = 18 \\ y = 1 \\ z = -(-12) = 12 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(18,1,12)}$$

La longitud del mástil es la distancia entre los puntos P y Q, es decir, el modulo del vector que los une.

$$\overrightarrow{PQ} = (18,1,12) - (30,1,0) = (-12,0,12)$$

$$dis\tan cia(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-12)^2 + 0^2 + 12^2} = \sqrt{288} = \boxed{12\sqrt{2} \simeq 16.97\, unidades}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

La longitud del mástil es la distancia del punto P al plano π.

$$\left. \begin{array}{r} P(30,1,0) \\ \pi : x - z - 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P,\pi) = \frac{|30-0-6|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{24}{\sqrt{2}} = \boxed{12\sqrt{2} \simeq 16.97\, unidades}$$

2. Considere la función $f\left(x\right)=\dfrac{9}{x^2+x-2}$.

a) Determine el dominio, las posibles asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. [1,25 puntos]

b) Calcula la ecuación general de la recta tangente a la función *f(x)* en el punto de abscisa *x = 4*. Represente en un mismo gráfico la función *f(x)* y la recta tangente [1,25 puntos]

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$f\left(x\right)=\frac{9}{x^2+x-2}\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\left(-2\right)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+3}{2}=\boxed{1=x}\\ \dfrac{-1-3}{2}=\boxed{-2=x}\end{cases}$$

$$\boxed{\text{Dominio } f\left(x\right)=\mathbb{R}-\left\{-2,1\right\}}$$

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f\left(x\right)=\lim_{x\to -2}\frac{9}{x^2+x-2}=\frac{9}{\left(-2\right)^2-2-2}=\frac{9}{0}=\infty$$

$x=-2$ es asíntota vertical

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1}\frac{9}{x^2+x-2}=\frac{9}{1^2+1-2}=\frac{9}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{x^2+x-2}=\frac{9}{\infty}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No existe pues la función tiene asíntota horizontal.

Para estudiar la evolución de la función usamos la función derivada.

$$f\,'\left(x\right)=\frac{0-9\left(2x+1\right)}{\left(x^2+x-2\right)^2}=\frac{-9\left(2x+1\right)}{\left(x^2+x-2\right)^2}$$

$$f\,'\left(x\right)=0\Rightarrow\frac{-9\left(2x+1\right)}{\left(x^2+x-2\right)^2}=0\Rightarrow -9\left(2x+1\right)=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow\boxed{x=\frac{-1}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores: –2, –1/2 y 1.

En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$f\,'(-3)=\frac{-9(2(-3)+1)}{\left((-3)^2-3-2\right)^2}=\frac{45}{16}>0$. La función crece en $(-\infty,-2)$.

En el intervalo $(-2,-1/2)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$f\,'(-1)=\frac{-9(2(-1)+1)}{\left((-1)^2-1-2\right)^2}=\frac{9}{4}>0$. La función crece en $(-2,-1/2)$.

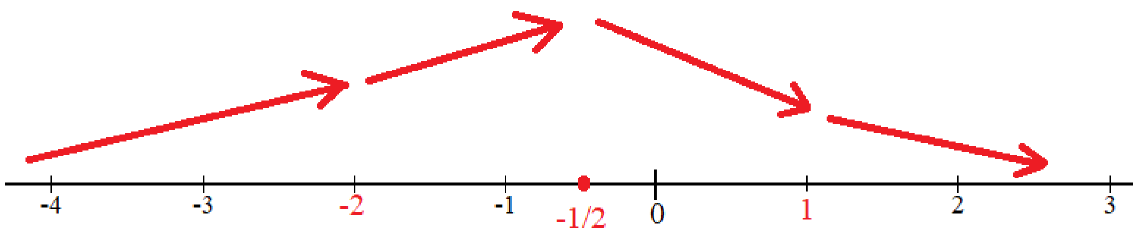
En el intervalo $(-1/2,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f\,'(0)=\frac{-9(0+1)}{\left(0^2+0-2\right)^2}=\frac{-9}{4}<0$.

La función decrece en $(-1/2,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f\,'(2)=\frac{-9(4+1)}{\left(2^2+2-2\right)^2}=\frac{-45}{16}<0$.

La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(-2,-1/2)$ y decrece en $(-1/2,1)\cup(1,+\infty)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = -1/2$. Como $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-2}=-4$ las coordenadas del máximo relativo son $\left(\frac{-1}{2},-4\right)$

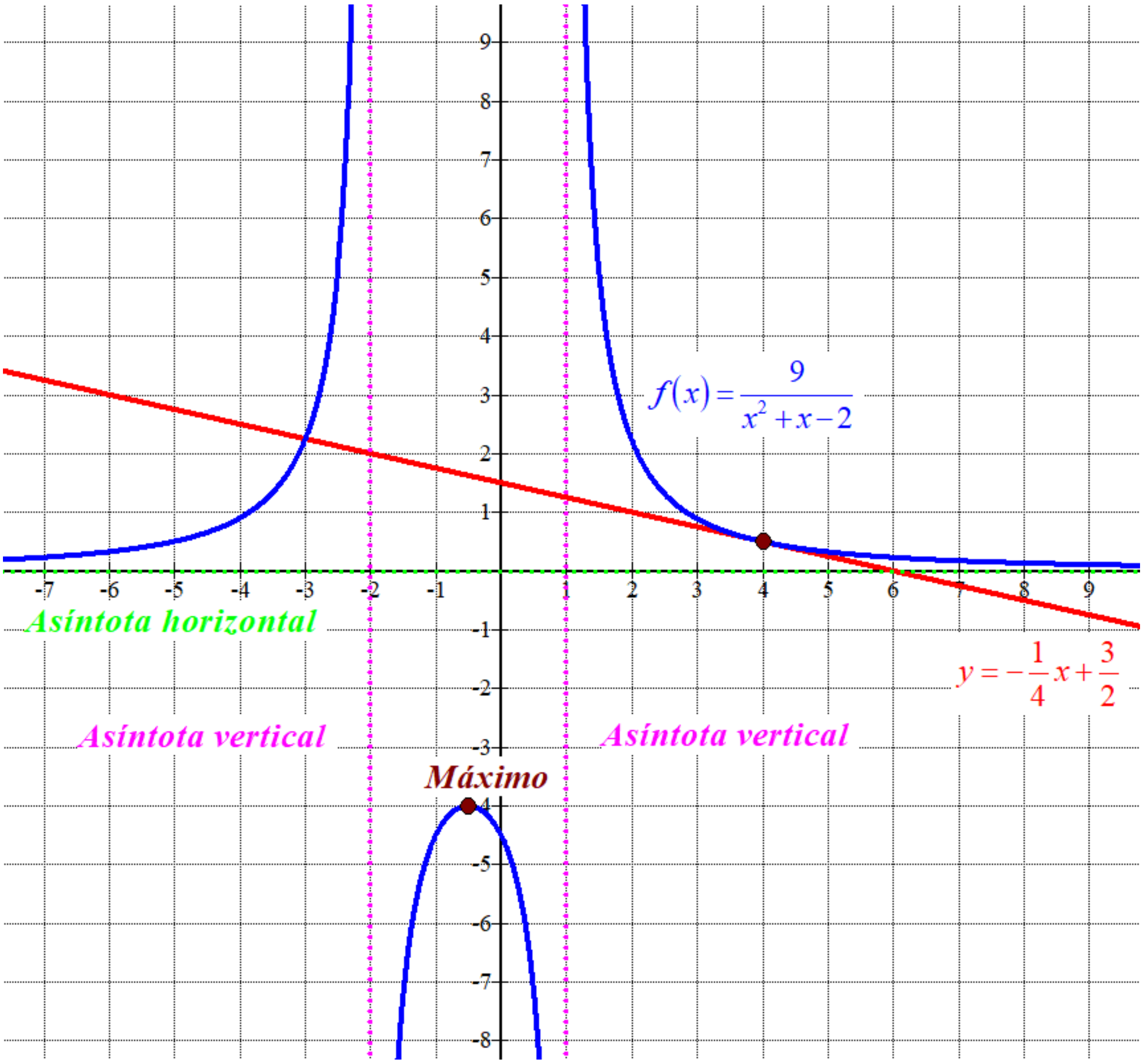
b) La recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$ tiene ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} f(4)=\frac{9}{4^2+4-2}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2} \\ f\,'(4)=\frac{-9(8+1)}{\left(4^2+4-2\right)^2}=\frac{-1}{4} \\ y-f(4)=f\,'(4)(x-4) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}(x-4) \Rightarrow y=-\frac{1}{4}x+1+\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}}$$

Obtenemos una tabla de valores de la función y de la tangente y las representamos.

x	$f(x)=\dfrac{9}{x^2+x-2}$
-4	0.9
-3	2.25
-1	-4.5
-0.5	-4
0	-4.5
2	2.25
4	0.5

x	$y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$
0	$3/2$
4	$1/2$



3. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}$, que depende el parámetro *a*.

a) Calcule el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro *a*. [1,25 puntos]

b) Si $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, resuelva la siguiente ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. [1,25 puntos]

a) El rango de la matriz A puede ser 3, 2 o 1.
Para que sea 3 su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{vmatrix}=45+21a^2+24a^2-105-18a^2-12a^2=15a^2-60$$

$$|A|=0 \Rightarrow 15a^2-60=0 \Rightarrow 15a^2=60 \Rightarrow a^2=\frac{60}{15}=4 \Rightarrow \boxed{a=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el determinante es no nulo y el rango de A es 3.
Si $a=2$ o $a=-2$ el determinante es nulo y el rango de A es menor que 3. Estudiamos estos dos casos por separado.

Si $a=-2$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$. ¿El rango es 2?

Si quitamos la fila y columna 3ª el menor que nos queda tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}=5-8=-3 \neq 0$. El rango de A es 2.

Si $a=2$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. ¿El rango es 2?

Si quitamos la fila y columna 3ª el menor que nos queda tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=5-8=-3 \neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el rango de A es 3 y si $a=-2$ o $a=2$ el rango de A es 2.

b) Pasamos la ecuación matricial a sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=0 \\ 7x+8y+9z=0 \end{array}\right\}$$

Utilizando el método de Gauss convertimos el sistema en otro triangular equivalente más fácil de resolver.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=0 \\ 7x+8y+9z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - 4\cdot\text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} 4x & +5y & +6z & =0 \\ -4x & -8y & -12z & =0 \\ \hline & -3y & -6z & =0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - 7\cdot\text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} 7x & +8y & +9z & =0 \\ -7x & -14y & -21z & =0 \\ \hline & -6y & -12z & =0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ -3y-6z=0 \\ -6y-12z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - 2\cdot\text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrcl} -6y & -12z & = & 0 \\ 6y & +12z & = & 0 \\ \hline & 0 & = & 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ -3y-6z=0 \\ 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=0 \\ y=-2z \end{array}\right\} \Rightarrow x-4z+3z=0 \Rightarrow x=z \Rightarrow$$

$$\textit{Solución}: \begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

La solución es $X=\begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix};\ \lambda\in\mathbb{R}$

4. ***a)*** Considere la función $f(x)=\begin{cases}\ln(x), & si \ \ x\in(0,e)\\ ax+b, & si \ \ x\in[e,4)\end{cases}$, donde *a* y *b* son números reales. Encuentre el valor de *a* y de *b* para que la función sea continua y derivable en el intervalo (0, 4). [1,25 puntos]

b) Calcule la función *g(x)* que satisface $g'(x)=\dfrac{x^3}{9x^4+1}$ y que pasa por el punto (0, –1). [1,25 puntos]

a) Para que la función sea continua debe serlo en *x* = *e* y para ello se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=\lim\limits_{x\to e^-}\ln(x)=\ln e=1\\ \lim\limits_{x\to e^+} f(x)=\lim\limits_{x\to e^+} ax+b=ae+b\\ f(e)=ae+b\\ \lim\limits_{x\to e^-} f(x)=\lim\limits_{x\to e^+} f(x)=f(e)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{1=ae+b}$$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{e\}$ y su función derivada es $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & si \ \ x\in(0,e)\\ a, & si \ \ x\in(e,4)\end{cases}$.

Para que sea derivable debe serlo también en *x* = *e* y para ello deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l}f'(e^-)=\lim\limits_{x\to e^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{e}\\ f'(e^+)=\lim\limits_{x\to e^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to e^-} a=a\\ f'(e^-)=f'(e^+)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{e}=a}$$

Sustituimos este valor de “a” en la ecuación obtenida inicialmente.

$$\left.\begin{array}{l}1=ae+b\\ a=\dfrac{1}{e}\end{array}\right\}\Rightarrow 1=\frac{1}{e}\cdot e+b\Rightarrow 1=1+b\Rightarrow \boxed{b=0}$$

Los valores buscados son $a=\dfrac{1}{e}$ y $b=0$.

b) Calculamos la integral de la derivada y obtenemos la función salvo un parámetro.

$$g(x)=\int g'(x)dx=\int\frac{x^3}{9x^4+1}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ 9x^4+1=t\to 36x^3dx=dt\to dx=\dfrac{dt}{36x^3}\end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{\cancel{x^3}}{t}\frac{dt}{36\cancel{x^3}}=\frac{1}{36}\int\frac{1}{t}dt=\frac{1}{36}\ln|t|=\left\{\begin{array}{l}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ t=9x^4+1\end{array}\right\}=\boxed{\frac{1}{36}\ln\left(9x^4+1\right)+K}$$

Como la función *g(x)* pasa por el punto (0, –1) se debe cumplir que *g(0) = –1*.

$$\left.\begin{array}{r} g(x)=\dfrac{1}{36}\ln\left(9x^4+1\right)+K \\ g(0)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1=\frac{1}{36}\ln\left(9\cdot 0^4+1\right)+K \Rightarrow -1=\frac{1}{36}\ln 1+K \Rightarrow \boxed{-1=K}$$

La función *g(x)* tiene la expresión $g(x)=\dfrac{1}{36}\ln\left(9x^4+1\right)-1$

5. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en la que a es un parámetro real.

a) Calcule los valores del parámetro a para los cuales la matriz A es invertible. [1,25 puntos]

b) Para el caso a = 3, resuelva la ecuación $A\cdot X = B-3I$ donde $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. [1,25 puntos]

a) La matriz A es invertible si su determinante es no nulo.
Calculamos el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{Saco factor común "a"} \\ \text{en la primera fila}\end{matrix}\right\}=a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\text{Columna 2}^{\text{a}} - \text{Columna 1}^{\text{a}}\right\}=a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a-1 & a-1 \\ 2a+1 & -2a-1 & -a-3 \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\text{Columna 3}^{\text{a}} - \text{Columna 2}^{\text{a}}\right\}=a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a-1 & 0 \\ 2a+1 & 2a+1 & a-2 \end{vmatrix}=a\cdot 1\cdot(a-1)(a-2)=a(a-1)(a-2)$$

Comprobamos cuando se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow a(a-1)(a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ o \\ a=1 \\ o \\ a=2 \end{cases}$$

La matriz A es invertible si a es distinto de 0, 1 y 2.

b) Por lo visto en el apartado a) para el caso a = 3 la matriz A es invertible.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. Calculamos su inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix}=-72+42+36=6\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3&2&7\\3&4&0\\0&2&-6\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}4&0\\2&-6\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&0\\0&-6\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&4\\0&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&7\\2&-6\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&7\\0&-6\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&2\\0&2\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}2&7\\4&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&7\\3&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&2\\3&4\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-24&18&6\\26&-18&-6\\-28&21&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3&1\\13/3&-3&-1\\-14/3&7/2&1\end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial $A\cdot X=B-3I$.

$$A\cdot X=B-3I\Rightarrow X=A^{-1}\cdot\left(B-3I\right)$$

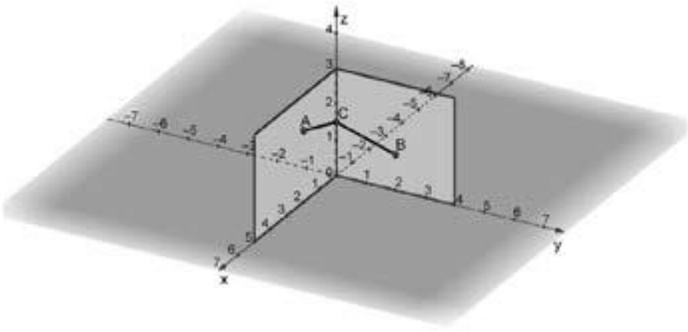
Sustituimos el valor de las matrices y obtenemos la expresión de X.

$$B-3I=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=Id_3$$

$$X=A^{-1}\cdot\left(B-3I\right)=\begin{pmatrix}-4&3&1\\13/3&-3&-1\\-14/3&7/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-4&3&1\\13/3&-3&-1\\-14/3&7/2&1\end{pmatrix}}$$

6. La siguiente imagen muestra dos paredes perpendiculares de una sala representadas en unos ejes de coordenadas, de modo que una pared está en el plano *y = 0* y la otra está en el plano *x = 0*.



En el punto A = (2, 0, 2) se quiere fijar un altavoz que debe estar conectado a un equipo de sonido, el cual está situado en la otra pared, en el punto B = (0, 2, 1). La conexión entre A y B la realizaremos mediante un cable que pase por el punto C = (0, 0, h), situado en la recta vertical de intersección de las dos paredes. Dado que la calidad del sonido depende, entre otros factores, de la longitud del cable que une a los dos aparatos, se quiere realizar una instalación con el mínimo de cable posible.

a) Compruebe que la longitud total del cable necesario, en función de la altura *h* por donde debe pasar el cable en el eje vertical OZ, viene dada por la expresión $L(h)=\sqrt{h^2-4h+8}+\sqrt{h^2-2h+5}$ [0,75 puntos]

b) Calcula las coordenadas del punto C por donde debe pasar el cable para que la longitud del cable sea mínima. Calcule esta longitud mínima del cable. [1,75 puntos]

a) La longitud del cable que va del punto A al punto B, pasando por el punto C es la suma de las longitudes de A a C y de C a B. Las distancias entre dos puntos es el módulo del vector que los une.

$$\overrightarrow{AC}=(0,0,h)-(2,0,2)=(-2,0,h-2)\Rightarrow d(A,C)=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+0^2+(h-2)^2}\Rightarrow$$

$$d(A,C)=\sqrt{4+h^2+4-4h}=\sqrt{h^2-4h+8}$$

$$\overrightarrow{CB}=(0,2,1)-(0,0,h)=(0,2,1-h)\Rightarrow d(C,B)=\left|\overrightarrow{CB}\right|=\sqrt{0^2+2^2+(1-h)^2}\Rightarrow$$

$$d(C,B)=\sqrt{4+h^2+1-2h}=\sqrt{h^2-2h+5}$$

La longitud del cable es la suma de las dos distancias:

$$L(h)=d(A,C)+D(C,B)=\sqrt{h^2-4h+8}+\sqrt{h^2-2h+5}$$

b) Para hallar el mínimo de la longitud hallamos la derivada y la igualamos a cero.

$$L'(h)=\frac{2h-4}{2\sqrt{h^2-4h+8}}+\frac{2h-2}{2\sqrt{h^2-2h+5}}=\frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}}+\frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}}$$

$$L'(h)=0 \Rightarrow \frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}}+\frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}}=-\frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}}=\frac{1-h}{\sqrt{h^2-2h+5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (h-2)\sqrt{h^2-2h+5}=(1-h)\sqrt{h^2-4h+8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (h-2)^2\left(\sqrt{h^2-2h+5}\right)^2=(1-h)^2\left(\sqrt{h^2-4h+8}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (h-2)^2\left(h^2-2h+5\right)=(1-h)^2\left(h^2-4h+8\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(h^2+4-4h\right)\left(h^2-2h+5\right)=\left(1+h^2-2h\right)\left(h^2-4h+8\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^4-2h^3+5h^2+4h^2-8h+20-4h^3+8h^2-20h=h^2-4h+8+h^4-4h^3+8h^2-2h^3+8h^2-16h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{h^4}-\cancel{6h^3}+\cancel{17h^2}-28h+20=\cancel{h^4}-\cancel{6h^3}+\cancel{17h^2}-20h+8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8h=-12 \Rightarrow \boxed{h=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de h = 1.5.

Antes de $h = 1.5$ tomo $h = 1$ y la derivada vale $L'(1)=\frac{1-2}{\sqrt{1^2-4+8}}+\frac{1-1}{\sqrt{1^2-2+5}}=\frac{-1}{\sqrt{5}}<0$.

La función decrece antes de $h = 1.5$.
Después de $h = 1.5$ tomo $h = 2$ y la derivada vale
$L'(2)=\frac{2-2}{\sqrt{2^2-8+8}}+\frac{2-1}{\sqrt{2^2-4+5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}>0$. La función crece después de $h = 1.5$.

Por lo que la longitud del cable es mínima con $h = 1.5$, es decir, en el punto C(0,0,1.5).

Esa longitud mínima tiene un valor L(1.5) que calculamos:

$$L(1.5)=\sqrt{1.5^2-4\cdot 1.5+8}+\sqrt{1.5^2-2\cdot 1.5+5}=\sqrt{4.25}+\sqrt{4.25}=\boxed{2\sqrt{4.25}\simeq 4.123}$$

La longitud mínima del cable se consigue pasando por C(0, 0, 1.5), siendo esta longitud mínima de 4.123 unidades de longitud.