UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2021-2022**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

a) (0.5 puntos) Para $b = a^2$, determinar los valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) (1 punto) Para $b = 4$ y $a = -2$, calcular $A^{-1}\cdot(B+2A)-(A^{-1}+B^t)\cdot B$.

c) (1 punto) Para $b = 1$, discutir el rango de la matriz $A + B$ en función del parámetro a.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x)=x^3+\cos(\pi x)$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x=1$ y probar, utilizando el Teorema de Bolzano, que dicha recta tangente corta a la gráfica de $f(x)$ en algún punto entre $x=-3$ y $x=-2$.

b) (1.25 puntos) Calcular $\int x\, f(x)\, dx$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un tetraedro tiene por vértices los puntos O (0, 0, 0), A (1, 0, 0), B (0, 2, 0) y C (0, 0, 3).

a) (0.75 puntos) Calcule el área de la cara dada por el triángulo de vértices A, B y C.

b) (0.75 puntos) Calcule el volumen del tetraedro.

c) (1 punto) Calcule una ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C. Determine el punto simétrico respecto de π del punto O.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El 60% de los habitantes de una ciudad utiliza para trabajar un móvil, el 30% utiliza un ordenador portátil y el 25% no usa ninguno de los dos dispositivos.

a) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice ambos dispositivos para trabajar.

b) (0.5 puntos) En esa ciudad, ¿es independiente el uso del móvil y del ordenador portátil para trabajar?
Justifique la respuesta.

c) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice exclusivamente el ordenador portátil para trabajar.

d) (1 punto) Si elegimos al azar 10 individuos, calcule la probabilidad de que exactamente 8 de ellos utilicen para trabajar un móvil.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Los precios de las entradas para un musical son 8 euros para los asistentes menores de 18 años, 25 euros para los adultos de menos de 60 años, y 10 euros para aquellos de al menos 60 años. Tras el concierto, se sabe que se han vendido tantas entradas de 25 euros como de las otras dos categorías juntas; y también que ha habido 9 asistentes menores de edad por cada uno de aquellos de al menos 60 años. Si la recaudación final fue de 8300 euros, calcule el número de asistentes de cada rango de edad.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea $f(x) = xe^x - e^x$.

a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad en R.
b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f(x)* y clasifique sus extremos relativos.
c) (1 punto) Sea $g(x) = -e^x$. Calcule el área del recinto acotado que está limitado por las gráficas de las funciones *f(x)* y *g(x)* en el intervalo [0, 1].

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se consideran la recta *r* y los planos π_1, π_2 de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \pi_1 \equiv y + z = -1, \qquad \pi_2 \equiv 2x - y + z = -3$$

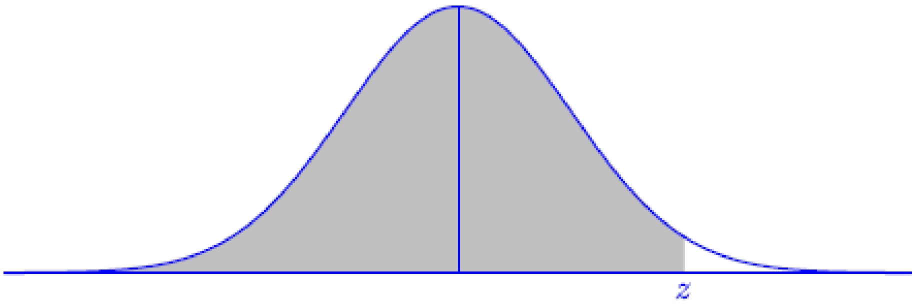
Sea *s* la recta determinada por la intersección de los planos π_1 y π_2.

a) (0.5 puntos) Halle el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.
b) (1.5 puntos) Determine la posición relativa de las rectas *r* y s.
c) (0.5 puntos) Encuentre una ecuación del plano perpendicular a *s* que corta a la recta *r* en el punto con segunda coordenada nula.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sabiendo que $P(A/B) = \frac{1}{3}$, $P(B/A) = \frac{1}{14}$ *y* $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{7}{15}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Probar razonadamente que $P(A \cap B) = \frac{1}{30}$.

b) (1 punto) Calcular $P(A)$ y $P(B)$.



Ejemplo: si Z tiene distribución N(0, 1), $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

a) (0.5 puntos) Para $b = a^2$, determinar los valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) (1 punto) Para $b = 4$ y $a = -2$, calcular $A^{-1}\cdot(B+2A)-(A^{-1}+B^t)\cdot B$.

c) (1 punto) Para $b = 1$, discutir el rango de la matriz $A + B$ en función del parámetro a.

a) La matriz A tiene inversa si su determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a^2 & 0 \\ a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^3-a^5$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^3-a^5=0 \Rightarrow a^3\left(1-a^2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} a^3=0 \to \boxed{a=0} \\ 1-a^2=0 \to a^2=1 \to \boxed{a=\sqrt{1}=\pm 1} \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa cuando “a” es distinto de 0, de –1 y de 1.

b) Para $b = 4$ y $a = -2$ la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-8+32=24\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}{24}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Seguimos con el cálculo de la matriz pedida.

$$B+2A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2&4&0\\4&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&8&0\\8&-5&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot(B+2A)=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}4&8&0\\8&4&0\\0&0&-12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&8&0\\8&-5&0\\0&0&-6\end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}-20+64&32-40&0\\-40+32&64-20&0\\0&0&72\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot(B+2A)=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}44&-8&0\\-8&44&0\\0&0&72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11/6&-1/3&0\\-1/3&11/6&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}+B^t=\begin{pmatrix}1/6&1/3&0\\1/3&1/6&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5/6&1/3&0\\1/3&-5/6&0\\0&0&-5/2\end{pmatrix}$$

$$(A^{-1}+B^t)\cdot B=\begin{pmatrix}-5/6&1/3&0\\1/3&-5/6&0\\0&0&-5/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/6&-1/3&0\\-1/3&5/6&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot(B+2A)-(A^{-1}+B^t)\cdot B=\begin{pmatrix}11/6&-1/3&0\\-1/3&11/6&0\\0&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5/6&-1/3&0\\-1/3&5/6&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}\cdot(B+2A)-(A^{-1}+B^t)\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}}$$

c) Para $b=1$ la matriz A + B es $A+B=\begin{pmatrix}a&1&0\\1&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1&1&0\\1&a-1&0\\0&0&a-2\end{pmatrix}$.

¿El rango es 3?

$$|A+B|=\begin{vmatrix}a-1&1&0\\1&a-1&0\\0&0&a-2\end{vmatrix}=(a-1)^2(a-2)-(a-2)=(a-2)\left[(a-1)^2-1\right]=$$

$$=(a-2)\left[a^2-2a+1-1\right]=(a-2)\left[a^2-2a\right]=a(a-2)(a-2)=a(a-2)^2$$

$$|A+B|=0 \Rightarrow a(a-2)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ \boxed{a=2} \end{cases}$$

Se nos plantean tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si "a" es distinto de 0 y de 2.

En este caso el determinante de A+B es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. Si $a = 0$.

En este caso el determinante de A+B es nulo y su rango no es 3.

La matriz A+B queda $A+B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. La matriz tiene rango 2, pues si quitamos la fila y columna 1ª nos queda un menor de orden 2 con determinante no nulo → $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

CASO 3. Si $a = 2$.

En este caso el determinante de A+B es nulo y su rango no es 3.

La matriz A+B queda $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz tiene rango 1, pues tiene una fila con todos los elementos nulos y la fila 1ª y 2ª son iguales.

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$ el rango de A+B es 3. Si $a = 0$ el rango es 2 y si $a = 2$ el rango es 1.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función $f(x)=x^3+\cos(\pi x)$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en $x=1$ y probar, utilizando el Teorema de Bolzano, que dicha recta tangente corta a la gráfica de *f(x)* en algún punto entre $x=-3$ y $x=-2$.
b) (1.25 puntos) Calcular $\int x\, f(x)\, dx$.

a) Calculamos la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en $x=1$.

$$f(x)=x^3+\cos(\pi x) \Rightarrow f(1)=1^3+\cos(\pi)=0$$

$$f'(x)=3x^2-\pi sen(\pi x) \Rightarrow f'(1)=3\cdot 1^2-\pi sen(\pi)=3$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f'(1)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=3(x-1) \Rightarrow \boxed{y=3x-3}$$

La recta tangente tiene ecuación $y=3x-3$.
Consideramos la función $h(x)=f(x)-(3x-3)$ y aplicamos a *h(x)* el Teorema de Bolzano en $[-3,-2]$: *h(x)* es continua en $[-3,-2]$ (propiedades de las funciones continuas); además,
$h(-3)=f(-3)-(-9-3)=(-3)^3+\cos(-3\pi)+12=-27-1+12=-16<0$ y
$h(-2)=f(-2)-(-6-3)=(-2)^3+\cos(-2\pi)+9=-8+1+9=2>0$, luego existe un punto c ∈ $(-3,-2)$ en el que $h(c)=0$. Esto implica que la función y la recta tangente coinciden en $x=c$.

b)

$$\int x\, f(x)\, dx=\int x\left(x^3+\cos(\pi x)\right)dx=\int x^4+x\cos(\pi x)\,dx=\frac{x^5}{5}+\int x\cos(\pi x)\,dx=\ldots$$

$$\int x\cos(\pi x)\,dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes} \\ u=x\rightarrow du=dx \\ dv=\cos(\pi x)dx\Rightarrow v=\int\cos(\pi x)\,dx=\frac{1}{\pi}sen(\pi x)\end{array}\right\}=$$

$$=x\frac{1}{\pi}sen(\pi x)-\int\frac{1}{\pi}sen(\pi x)\,dx=\frac{x}{\pi}sen(\pi x)-\frac{1}{\pi}\int sen(\pi x)\,dx=$$

$$=\frac{x}{\pi}sen(\pi x)-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right)=\frac{x}{\pi}sen(\pi x)+\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)$$

$$\ldots=\boxed{\frac{x^5}{5}+\frac{x}{\pi}sen(\pi x)+\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)+K}$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Un tetraedro tiene por vértices los puntos O (0, 0, 0), A (1, 0, 0), B (0, 2, 0) y C (0, 0, 3).
a) (0.75 puntos) Calcule el área de la cara dada por el triángulo de vértices A, B y C.
b) (0.75 puntos) Calcule el volumen del tetraedro.
c) (1 punto) Calcule una ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C. Determine el punto simétrico respecto de π del punto O.

a) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del vector que se obtiene en el producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,2,0)-(1,0,0)=(-1,2,0)\\ \overrightarrow{AC}=(0,0,3)-(1,0,0)=(-1,0,3)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}=6i+2k+3j=(6,3,2)$$

$$Área\ ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}{2}=\frac{7}{2}=\boxed{3.5u^2}$$

b) El volumen del tetraedro OABC es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}=(1,0,0)\\ \overrightarrow{OB}=(0,2,0)\\ \overrightarrow{OC}=(0,0,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=6$$

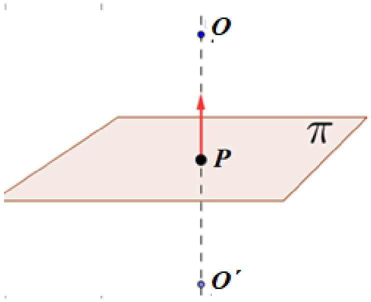
$$Volumen\ tetraedro\ OABC=\frac{\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|}{6}=\frac{6}{6}=\boxed{1\ u^3}$$

c) El plano π que pasa por los puntos A, B y C tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(0,2,0)-(1,0,0)=(-1,2,0)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(0,0,3)-(1,0,0)=(-1,0,3)\\ A(1,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x-6+2z+3y=0\Rightarrow\boxed{\pi\equiv 6x+3y+2z-6=0}$$

Nos piden hallar el punto O´ simétrico de O respecto del plano **π**



Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto O. Esta recta tendrá como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv 6x+3y+2z-6=0 \Rightarrow \vec{n}=(6,3,2)$$

$$r \equiv \begin{cases} \vec{v_r}=\vec{n}=(6,3,2) \\ O(0,0,0) \in r \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=6\lambda \\ y=3\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=2\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto *P* de corte entre la recta *r* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x=6\lambda \\ y=3\lambda \\ z=2\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 6x+3y+2z-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 36\lambda+9\lambda+4\lambda-6=0 \Rightarrow 49\lambda=6 \Rightarrow \lambda=\frac{6}{49} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{36}{49} \\ y=\dfrac{18}{49} \\ z=\dfrac{12}{49} \end{cases} \Rightarrow \boxed{P\left(\frac{36}{49},\frac{18}{49},\frac{12}{49}\right)}$$

Las coordenadas del punto O´ será el resultado de sumar al punto P el vector $\overrightarrow{OP}$.

$$\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{36}{49},\frac{18}{49},\frac{12}{49}\right) \\ O(0,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{OP}=\left(\frac{36}{49},\frac{18}{49},\frac{12}{49}\right)-(0,0,0)=\left(\frac{36}{49},\frac{18}{49},\frac{12}{49}\right)$$

$$O´=P+\overrightarrow{OP}=\left(\frac{36}{49},\frac{18}{49},\frac{12}{49}\right)+\left(\frac{36}{49},\frac{18}{49},\frac{12}{49}\right)=\left(\frac{72}{49},\frac{36}{49},\frac{24}{49}\right)$$

Las coordenadas del punto O´ simétrico de O respecto del plano π son $O´=\left(\frac{72}{49},\frac{36}{49},\frac{24}{49}\right)$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
El 60% de los habitantes de una ciudad utiliza para trabajar un móvil, el 30% utiliza un ordenador portátil y el 25% no usa ninguno de los dos dispositivos.
a) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice ambos dispositivos para trabajar.
b) (0.5 puntos) En esa ciudad, ¿es independiente el uso del móvil y del ordenador portátil para trabajar? Justifique la respuesta.
c) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar utilice exclusivamente el ordenador portátil para trabajar.
d) (1 punto) Si elegimos al azar 10 individuos, calcule la probabilidad de que exactamente 8 de ellos utilicen para trabajar un móvil.

Realizamos una tabla de contingencia con los datos del problema.

	Usan ordenador (O)	No usan ordenador ($\overline{O}$)	
Usan móvil (M)			**60**
No usan móvil ($\overline{M}$)		**25**	
	30		**100**

Completamos la tabla.

	Usan ordenador (O)	No usan ordenador ($\overline{O}$)	
Usan móvil (M)	**15**	**45**	**60**
No usan móvil ($\overline{M}$)	**15**	**25**	**40**
	30	**70**	**100**

Con estos datos y la regla de Laplace respondemos a las preguntas.

a) Nos piden calcular $P(M \cap O)$. Observando los datos de la tabla $P(M \cap O) = \frac{15}{100} = \boxed{0.15}$

b) Comprobamos si $P(M \cap O) = P(M)P(O)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(M) = \frac{60}{100} \\ P(O) = \frac{30}{100} \end{array}\right\} \Rightarrow P(M)P(O) = \frac{60}{100} \cdot \frac{30}{100} = \frac{1800}{10000} = \frac{18}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(M \cap O) = \frac{15}{100} \neq \frac{18}{100} = P(M)P(O)$$

El uso del móvil y del ordenador portátil para trabajar no son independientes.

c) Si alguien utiliza exclusivamente el ordenador portátil para trabajar significa que utiliza el ordenador y no utiliza el móvil ($O \cap \overline{M}$).

$$P(O \cap \overline{M}) = \frac{15}{100} = \boxed{0.15}$$

d) Utilizamos la variable binomial X = Número de individuos que usan el móvil para trabajar de un grupo de 10.

El número de repeticiones es $n = 10$ y la probabilidad de éxito es $p = P(M) = \frac{60}{100} = 0.6$.

X = B(10, 0.6)

Nos piden calcular $P(X = 8)$.

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} 0.6^8 \cdot 0.4^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} 0.6^8 \cdot 0.4^2 \simeq \boxed{0.121}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Los precios de las entradas para un musical son 8 euros para los asistentes menores de 18 años, 25 euros para los adultos de menos de 60 años, y 10 euros para aquellos de al menos 60 años. Tras el concierto, se sabe que se han vendido tantas entradas de 25 euros como de las otras dos categorías juntas; y también que ha habido 9 asistentes menores de edad por cada uno de aquellos de al menos 60 años. Si la recaudación final fue de 8300 euros, calcule el número de asistentes de cada rango de edad.

Llamamos x, y, z al número de entradas vendidas a menores de 18 años, adultos de menos de 60 años y adultos de al menos 60 años, respectivamente.

"La recaudación final fue de 8300 euros" → $8x+25y+10z=8300$
"Se han vendido tantas entradas de 25 euros (y) como de las otras dos categorías juntas" → $y=x+z$
"Ha habido 9 asistentes menores de edad por cada uno de aquellos de al menos 60 años" → $x=9z$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 8x+25y+10z=8300 \\ y=x+z \\ x=9z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8(9z)+25y+10z=8300 \\ y=9z+z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 25y+82z=8300 \\ y=10z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25(10z)+82z=8300 \Rightarrow 332z=8300 \Rightarrow \boxed{z=\frac{8300}{332}=25} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{y=10\cdot 25=250} \\ \boxed{x=9\cdot 25=225} \end{array}\right.$$

Se han vendido 225 entradas a menores de 18 años, 250 a adultos de menos de 60 años y 25 a personas con al menos 60 años.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea $f(x) = xe^x - e^x$.
a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad en R.
b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f(x)* y clasifique sus extremos relativos.
c) (1 punto) Sea $g(x) = -e^x$. Calcule el área del recinto acotado que está limitado por las gráficas de las funciones *f(x)* y *g(x)* en el intervalo [0, 1].

a) *f(x)* es continua y derivable en R (por ser suma y producto de funciones continuas y derivables)

b) Utilizamos la derivada.

$$f'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow xe^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ e^x = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

La función tiene un punto crítico en *x = 0.*
Estudiamos el signo de la derivada antes y después de *x = 0.*

En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f'(-1) = -e^{-1} \simeq -0.36 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.

En el intervalo $(0, +\infty)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1) = e^1 \simeq 2.71 > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en *x = 0.* Como $f(x) = 0 \cdot e^0 - e^0 = -1$ el mínimo relativo tiene coordenadas (0, –1).

c) Averiguamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones, por si existiera en el intervalo [0, 1] un punto de corte.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow xe^x - e^x = -e^x \Rightarrow xe^x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

El punto de corte está en el extremo del intervalo [0, 1] por lo que el área pedida es la integral definida de la diferencia de las funciones entre 0 y 1. Falta saber que función es mayor en dicho intervalo ($f(0.5) = 0.5e^{0.5} - e^{0.5} = -0.82 < -0.61 = -e^{0.5} = g(0.5)$).

$$Área = \int_0^1 g(x) - f(x)\,dx = \int_0^1 xe^x - e^x - \left(-e^x\right) dx = \int_0^1 xe^x dx = \ldots$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \to du = dx \\ dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + K$$

Seguimos con el cálculo de la integral definida y el área.

$$\ldots = \int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x - e^x \right]_0^1 = \left[1 \cdot e^1 - e^1 \right] - \left[0 \cdot e^0 - e^0 \right] = \boxed{1\ u^2}$$

El área del recinto acotado que está limitado por las gráficas de las funciones *f(x)* y *g(x)* en el intervalo [0, 1] tiene un valor de $1\ u^2$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se consideran la recta *r* y los planos π_1, π_2, de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \pi_1 \equiv y+z=-1, \quad \pi_2 \equiv 2x-y+z=-3$$

Sea *s* la recta determinada por la intersección de los planos π_1 y π_2.

a) (0.5 puntos) Halle el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

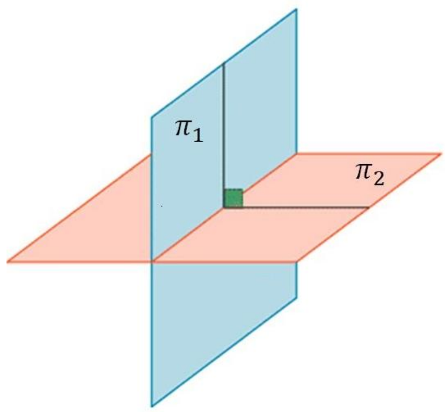
b) (1.5 puntos) Determine la posición relativa de las rectas *r* y s.

c) (0.5 puntos) Encuentre una ecuación del plano perpendicular a *s* que corta a la recta *r* en el punto con segunda coordenada nula.

a) El ángulo que forman dos planos es el mismo que el que forman sus respectivos vectores normales.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv y+z=-1 \rightarrow \overrightarrow{n_1}=(0,1,1) \\ \pi_2 \equiv 2x-y+z=-3 \rightarrow \overrightarrow{n_2}=(2,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=(0,1,1)(2,-1,1)=-1+1=0$$

Al ser su producto escalar 0 los vectores normales son perpendiculares (90º) y por tanto los planos son perpendiculares. El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es de 90º.



b) Hallamos un vector director y un punto de la recta *r*.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(-1,2,1) \\ P_r(2,0,2) \end{cases}$$

Hallamos un vector director y un punto de la recta *s*.

$$s \equiv \begin{cases} y+z=-1 \\ 2x-y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1-z \\ 2x-y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow 2x+1+z+z=-3 \Rightarrow 2x=-4-2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-2-z \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=-2-t \\ y=-1-t \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(-1,-1,1) \\ Q_s(-2,-1,0) \end{cases}}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas ni son coincidentes ni paralelas.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,2,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(-1,-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{-1}{-1}\neq\frac{2}{-1}\neq\frac{1}{1}$$

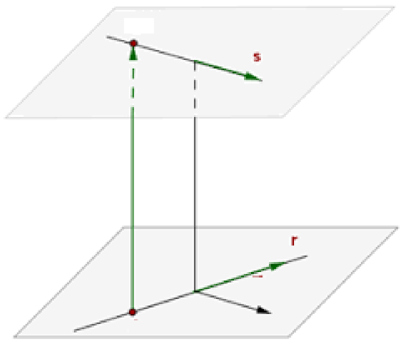
Las rectas se cortan o cruzan.

Averiguamos si el producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ es nulo o no.

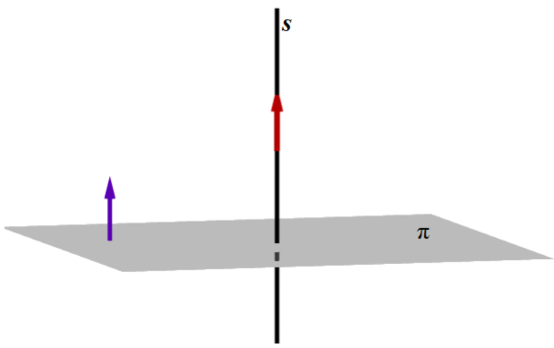
$$\overrightarrow{P_rQ_s}=(-2,-1,0)-(2,0,2)=(-4,-1,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,2,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(-1,-1,1)\\ \overrightarrow{P_rQ_s}=(-4,-1,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix}-1&2&1\\-1&-1&1\\-4&-1&-2\end{vmatrix}=-2-8+1-4-4-1=-18\neq 0$$

Al ser no nulo el producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ las rectas r y s se cruzan.



c) Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a s.



El vector normal del plano es el vector director de la recta s.

$$\vec{n}=\overrightarrow{v_s}=(-1,-1,1)\Rightarrow\pi\equiv -x-y+z+D=0$$

Hallamos el punto de corte del plano π y la recta r.

$$\left.\begin{array}{r}\pi \equiv -x-y+z+D=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=2\lambda \quad , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=2+\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow -2+\lambda-2\lambda+2+\lambda+D=0 \Rightarrow D=0$$

Para que la recta *r* y el plano π se corten debe ser *D = 0.*

El plano debe ser $\pi \equiv -x-y+z=0$.

Este plano contiene la recta *r*. Buscamos un punto de la recta *r* con segunda coordenada nula.

$$\left.\begin{array}{r} y=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=2\lambda \quad , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=2+\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 0=2\lambda \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \boxed{P(2,0,2)}$$

El plano buscado es $\pi \equiv -x-y+z=0$ que es perpendicular a la recta *s* y contiene a la recta *r*, y en particular coincide con ella en el punto P(2,0,2).

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(A/B)=\dfrac{1}{3}$, $P(B/A)=\dfrac{1}{14}$ y $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\dfrac{7}{15}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Probar razonadamente que $P(A\cap B)=\dfrac{1}{30}$.

b) (1 punto) Calcular $P(A)$ y $P(B)$.

a)

$$P(A/B)=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{3}\Rightarrow P(B)=3P(A\cap B)$$

$$P(B/A)=\frac{1}{14}\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{14}\Rightarrow P(A)=14P(A\cap B)$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{7}{15}\Rightarrow P(\overline{A\cup B})=\frac{7}{15}\Rightarrow P(A\cup B)=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos A y B.

$$\left.\begin{array}{l}P(B)=3P(A\cap B)\\P(A)=14P(A\cap B)\\P(A\cup B)=\dfrac{8}{15}\\P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{8}{15}=3P(A\cap B)+14P(A\cap B)-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{8}{15}=16P(A\cap B)\Rightarrow\boxed{P(A\cap B)=\frac{8}{15\cdot16}=\frac{1}{30}}$$

b) De lo visto en el apartado a) tenemos que $P(A)=14P(A\cap B)=\dfrac{14}{30}=\boxed{\dfrac{7}{15}}$.

También tenemos que $P(B)=3P(A\cap B)=\dfrac{3}{30}=\boxed{\dfrac{1}{10}}$

OTRA FORMA DE HACERLO

a) Cambiamos las probabilidades a valores absolutos.
Tomamos una población de 3 · 7 ·2 · 5 = 210 elementos.
Tenemos que $P(A/B)=\dfrac{1}{3}=\dfrac{70}{210}$; $P(B/A)=\dfrac{1}{14}=\dfrac{15}{210}$; $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\dfrac{7}{15}=\dfrac{98}{210}$
Y además

$$P(A/B)=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{3}\Rightarrow P(B)=3P(A\cap B)$$

$$P(B/A)=\frac{1}{14}\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{14}\Rightarrow P(A)=14P(A\cap B)$$

Llamamos x al número de elementos de $A \cap B$ y construimos una tabla de contingencia.

	B	$\overline{B}$	
A	x		14x
$\overline{A}$		98	
	3x		210

Completamos la tabla

	B	$\overline{B}$	
A	x	13x	14x
$\overline{A}$	2x	98	98+2x
	3x	98+13x	210

Debe cumplirse que $3x+98+13x=210 \rightarrow 16x=112 \rightarrow x=\frac{112}{16}=7$.

Por lo que $P(A \cap B)=\frac{7}{210}=\boxed{\frac{1}{30}}$

b) En las expresiones obtenidas sustituimos el valor de x.

$$P(B)=3x=3\frac{1}{30}=\boxed{\frac{1}{10}}$$
$$P(A)=14x=14\frac{1}{30}=\boxed{\frac{7}{15}}$$