uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2021-2022** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real *m*:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ mx+(m+1)y-z=m-1 \\ -x-2y+(2m-1)z=1-m \end{array}\right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de *m*.
b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m=1$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función $f(x)=1+\frac{1}{x}$.

a) (1 punto) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f(x)*.
b) (1.5 puntos) Dada la función $g(x)=\frac{5-x}{2}$, halle el área de la región acotada por las gráficas de las funciones *f(x)* y *g(x)*.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la recta $r\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$ y el punto *P(1, 1, 0)*.

a) (1 punto) Halle los puntos pertenecientes a la recta *r* que distan de *P* una unidad.
b) (1.5 puntos) Halle unas ecuaciones de las rectas que pasan por *P*, son perpendiculares a *r* y forman un ángulo $\frac{\pi}{3}$ radianes con la normal al plano *x = 0*.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En una tienda se hace un estudio sobre la venta de dos productos A y B a lo largo de un mes. La probabilidad de que un cliente compre el producto A es de un 62% y la de que compre el producto B es de un 40 %. Se observa, además, que el 12% de los clientes compran al mismo tiempo el producto A y el producto B. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente haya comprado el producto A sabiendo que no ha adquirido el producto B.
b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente no compre ni el producto A ni el producto B.

c) (1 punto) Sabiendo que a lo largo de un mes visitan la tienda 3000 personas, calcular, utilizando la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución normal, cuál es la probabilidad de que compren el producto B más de 1250 personas.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}$ $y\ C=\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular el valor de *a* para que el sistema de ecuaciones $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea compatible.

b) (1.5 puntos) Calcular los valores de *a*, *b* y *c* para que la multiplicación de dos de las matrices sea igual a la restante.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea *f(x)* una función continua y derivable en todo R tal que *f(1) = 2, f(2) = 1, f '(1) = 1* y *f '(2) = 2*. Se consideran, además, las funciones $g(x)=\left(f(x)\right)^2$ y $h(x)=\left(f\circ f\right)(x)$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular *g(2)* y *g'(2)*.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *h(x)* en el punto *x = 1*.

c) (1 punto) Probar, utilizando el Teorema del Valor Medio, que existe un punto en el intervalo (1, 2) en el que el valor de la derivada de *f(x)* es −1.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (0.5 puntos) Calcule el ángulo formado por los vectores $\vec{u}=(0,0,1)$ y $\vec{v}=\left(0,1,\sqrt{3}\right)$.

b) (1 punto) Sea O el origen de coordenadas, y los puntos A(2, 0, 0), B (0, 3, 0) y $C\left(0,2,2\sqrt{3}\right)$. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por las tres aristas concurrentes OA, OB y OC.

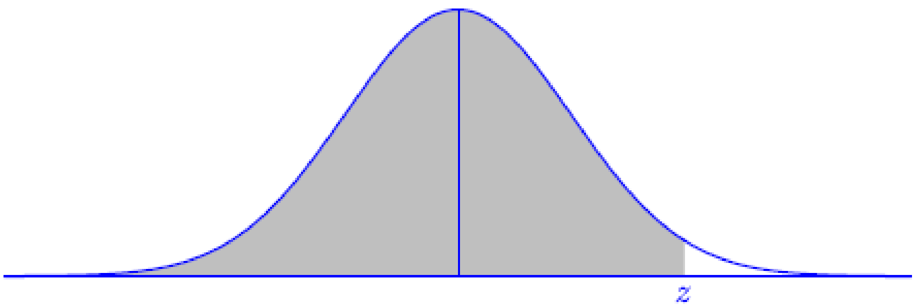
c) (1 punto) Calcule una ecuación de la recta perpendicular común a las rectas *r* y *s*, siendo *r* la recta que pasa por O y por C y *s* la recta de ecuaciones y − 3 = 0, z = 0.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una *influencer* famosa publica en su Instagram un 20% de fotografías dedicadas a viajes, un 50% referentes a temas de moda y el resto sobre maternidad. El 5% de las publicaciones de viajes reciben menos de 20 000 *Me gusta* y lo mismo ocurre con el 20% de las de moda y con el 35% de las que tratan asuntos de maternidad. Elegida una fotografía al azar, se pide:

a) (1.25 puntos) Determinar la probabilidad de que tenga más de 20 000 *Me gusta*.

b) (1.25 puntos) Si tiene menos de 20 000 *Me gusta*, calcular la probabilidad de que el tema tratado en ella haya sido sobre viajes.



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real *m*:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ mx+(m+1)y-z=m-1 \\ -x-2y+(2m-1)z=1-m \end{array}\right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de *m*.
b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m=1$

a) Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ m & m+1 & -1 \\ -1 & -2 & 2m-1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ m & m+1 & -1 \\ -1 & -2 & 2m-1 \end{vmatrix}=$$

$$=2(m+1)(2m-1)+1+2m-(m+1)-m(2m-1)-4=$$

$$=2\left(2m^2-m+2m-1\right)+1+2m-m-1-2m^2+m-4=$$

$$=4m^2-\cancel{2m}+4m-2+\cancel{1}+\cancel{2m}-\cancel{m}-\cancel{1}-2m^2+\cancel{m}-4=2m^2+4m-6$$

$$|A|=0 \Rightarrow 2m^2+4m-6=0 \Rightarrow m^2+2m-3=0 \Rightarrow$$

$$m=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1(-3)}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases} \dfrac{-2+4}{2}=\boxed{1=m} \\ \dfrac{-2-4}{2}=\boxed{-3=m} \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $m\neq 1$ **y** $m\neq -3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda $\left.\begin{array}{r} 2x+\ y-z=0 \\ x+2y-z=0 \\ -x-2y+z=0 \end{array}\right\}$

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\cdot\text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 3 & -1 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}^{A} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}}_{A/B}$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $m=-3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda $\left.\begin{array}{r} 2x+\ y-z=0 \\ -3x-2y-z=-4 \\ -x-2y-7z=4 \end{array}\right\}$

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\cdot\text{Fila } 2^a + 3\cdot\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} -6 & -4 & -2 & -8 \\ 6 & 3 & -3 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -5 & -8 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\cdot\text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} -2 & -4 & -14 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -3 & -15 & 8 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & -3 & -15 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3\cdot\text{Fila } 2^a - \text{Fila } 3^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & -3 & -15 & -24 \\ 0 & 3 & 15 & -8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -32 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}^{A} & \begin{matrix} 0 \\ -8 \\ -32 \end{matrix} \end{pmatrix}}_{A/B}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3, por lo que los rangos son distintos y el sistema es incompatible (no tiene solución).

Resumiendo: Si $m\neq 1$ y $m\neq -3$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $m=1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $m=-3$ el sistema es incompatible (sin solución)

b) Si $m=1$ el sistema es compatible indeterminado.

Obtenemos la solución a partir del sistema equivalente que hemos obtenido en el apartado a).

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ 3y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ z=3y \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+y-3y=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-2y=0 \Rightarrow 2x=2y \Rightarrow x=y \Rightarrow \boxed{\text{Solución:}\begin{cases} x=t \\ y=t \ \ ; t\in\mathbb{R} \\ z=3t \end{cases}}$$

Para $m=1$ las soluciones del sistema son $x=t;\ y=t;\ z=3t;\ t\in\mathbb{R}$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x)=1+\frac{1}{x}$.

a) (1 punto) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f(x)*.

b) (1.5 puntos) Dada la función $g(x)=\frac{5-x}{2}$, halle el área de la región acotada por las gráficas de las funciones *f(x)* y *g(x)*.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulen el denominador.

$$\text{Dominio } f(x)=\mathbb{R}-\{0\}$$

Usamos la derivada para estudiar el comportamiento de la función.

$$f(x)=1+\frac{1}{x}=1+x^{-1}\Rightarrow f'(x)=0+(-1)x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-1}{x^2}=0\Rightarrow -1=0\Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

La función derivada no se anula y siempre es negativa ($f'(1)=\frac{-1}{1^2}=-1<0$).

La función decrece en su dominio $=\mathbb{R}-\{0\}$

b) Hallamos los puntos de corte de ambas funciones.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow 1+\frac{1}{x}=\frac{5-x}{2}\Rightarrow\frac{x+1}{x}=\frac{5-x}{2}\Rightarrow 2(x+1)=x(5-x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+2=5x-x^2\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(2)}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=\boxed{2=x}\\ \frac{3-1}{2}=\boxed{1=x}\end{cases}$$

La región encerrada entre las dos gráficas está entre *x = 1* y *x = 2*, vemos que gráfica está por encima.

$$\left.\begin{array}{l} f(1.5)=1+\frac{1}{1.5}\simeq 1.66\\ g(1.5)=\frac{5-1.5}{2}=1.75\end{array}\right\}\Rightarrow f(1.5)<g(1.5)$$

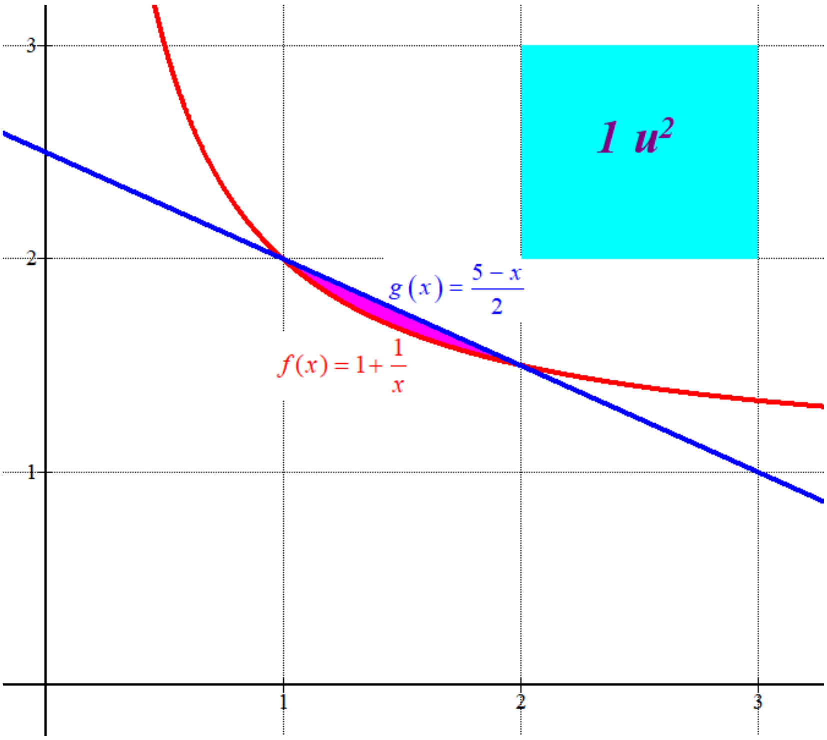
El área de la región encerrada entre las gráficas de las dos funciones es:

$$Área = \int_1^2 g(x) - f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{5-x}{2} - \left(1+\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^2 \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - \ln x\right]_1^2 = \left[\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \ln x\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{3}{2}2 - \frac{1}{4}2^2 - \ln 2\right] - \left[\frac{3}{2}1 - \frac{1}{4}1^2 - \ln 1\right] = 3 - 1 - \ln 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4} - \ln 2 \simeq 0.057\,u^2}$$

No piden dibujar la región. Lo hacemos para comprobar la bondad de la solución, dado que el valor del área es muy pequeño.
Podemos comprobar que el área de la región rosa del dibujo (la que nos piden calcular) es mucho más pequeña que un cuadradito (en color azul) de la gráfica que tiene de valor *1* u^2.



A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto *P(1, 1, 0)*.

a) (1 punto) Halle los puntos pertenecientes a la recta *r* que distan de *P* una unidad.

b) (1.5 puntos) Halle unas ecuaciones de las rectas que pasan por *P*, son perpendiculares a *r* y forman un ángulo $\frac{\pi}{3}$ radianes con la normal al plano *x = 0*.

a) Un punto A perteneciente a la recta *r* tiene coordenadas $A(a,a,0)$.

La distancia entre los puntos A y P es el módulo del vector que los une.

$$\left.\begin{array}{l} P(1,1,0) \\ A(a,a,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = (1,1,0)-(a,a,0) = (1-a,1-a,0)$$

$$d(A,P) = \left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(1-a)^2+(1-a)^2+0^2} = \sqrt{2(1-a)^2} = \sqrt{2}\left|1-a\right|$$

Igualamos la distancia a 1.

$$\left.\begin{array}{l} d(A,P)=1 \\ d(A,P)=\sqrt{2}\left|1-a\right| \end{array}\right\} \Rightarrow 1=\sqrt{2}\left|1-a\right| \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} = 1-a \to a = 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \to \boxed{A\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}},1-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} = -1+a \to a = 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \to \boxed{A'\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}},1+\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)} \end{cases}$$

Los dos puntos de la recta *r* que cumplen lo pedido son $A\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}},1-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ y $A'\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}},1+\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

b) Solo nos falta un vector director de la recta *s* pedida. Supongamos que $\overrightarrow{v_s} = (a,b,c)$ es ese vector director.

La recta *s* es perpendicular a *r* → el producto escalar de sus vectores directores es nulo.

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \overrightarrow{u_r} = (1,1,0) \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_s} = (a,b,c) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,0) \\ \overrightarrow{v_s}\cdot\overrightarrow{u_r} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (a,b,c)\cdot(1,1,0) = 0 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow b=-a \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (a,-a,c)$$

La recta s forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes con la normal al plano $x = 0$.

Un vector normal al plano $x = 0$ es $\vec{n} = (1,0,0)$, por lo que el vector director de la recta s y el vector normal del plano forman ese ángulo.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = (1,0,0) \\ \vec{v_s} = (a,-a,c) \\ \left(\vec{n},\vec{v_s}\right) = \frac{\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\vec{n},\vec{v_s}\right) = \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{v_s}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{v_s}\right|} = \frac{\left|(1,0,0)(a,-a,c)\right|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\sqrt{a^2+(-a)^2+c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = \frac{|a|}{\sqrt{2a^2+c^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|a|}{\sqrt{2a^2+c^2}} \Rightarrow \sqrt{2a^2+c^2} = 2|a| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2+c^2 = 4a^2 \Rightarrow c^2 = 2a^2 \Rightarrow c = \sqrt{2}\cdot|a| \Rightarrow \begin{cases} c = \sqrt{2}\cdot a \Rightarrow \vec{v_s} = \left(a,-a,\sqrt{2}\cdot a\right) \\ o \\ c = -\sqrt{2}\cdot a \Rightarrow \vec{w_s} = \left(a,-a,-\sqrt{2}\cdot a\right) \end{cases}$$

Existen dos rectas que cumplen lo pedido.

La primera:

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \rightarrow \vec{v_s} = \left(1,-1,\sqrt{2}\right) \\ P(1,1,0) \in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \sqrt{2}\lambda \end{cases}}$$

La segunda:

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \rightarrow \vec{w_s} = \left(1,-1,-\sqrt{2}\right) \\ P(1,1,0) \in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda\ ;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\sqrt{2}\lambda \end{cases}}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En una tienda se hace un estudio sobre la venta de dos productos A y B a lo largo de un mes. La probabilidad de que un cliente compre el producto A es de un 62% y la de que compre el producto B es de un 40 %. Se observa, además, que el 12% de los clientes compran al mismo tiempo el producto A y el producto B. Se pide:
a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente haya comprado el producto A sabiendo que no ha adquirido el producto B.
b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente no compre ni el producto A ni el producto B.
c) (1 punto) Sabiendo que a lo largo de un mes visitan la tienda 3000 personas, calcular, utilizando la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución normal, cuál es la probabilidad de que compren el producto B más de 1250 personas.

Hacemos una tabla de contingencia para obtener el resto de información que viene implícita con los datos del problema planteado.

	Compra el producto B	No compra el producto B	
Compra el producto A	**12**		**62**
No compra el producto A			
	40		**100**

Completamos la tabla.

	Compra el producto B (B)	No compra el producto B ($\overline{B}$)	
Compra el producto A (A)	**12**	**50**	**62**
No compra el producto A ($\overline{A}$)	**28**	**10**	**38**
	40	**60**	**100**

a) $P\left(A/\overline{B}\right)=\dfrac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\dfrac{50}{60}=\boxed{\dfrac{5}{6}\simeq 0.83}$

b) $P\left(\overrightarrow{A}\cap\overline{B}\right)=\dfrac{10}{100}=\boxed{0.1}$

c) Sabemos que *P(comprar el producto B) = p = 0.4*.
Consideramos la variable binomial X = Número de personas que compran el producto B de un grupo de 3000.
El número de repeticiones es *n = 3000.*
X = B(3000, 0.4)

Como el número de repeticiones es muy grande: *n = 3000* la aproximamos a una normal Y de media *n · p = 3000 · 0.4 = 1200* y desviación típica $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{3000\cdot 0.4\cdot 0.6}=12\sqrt{5}\simeq 26.83$
Esta aproximación es buena pues n · p = 1200 >5 y n · q = 3000 · 0.6 = 1800 >5.

Nos piden calcular $P\left(X>1250\right)$.

$$P\left(X>1250\right)=\left\{\text{Corrección de Yates}\right\}=P\left(Y\geq 1250.5\right)=$$

$$=\left\{Tipificamos\right\}=P\left(\frac{Y-1200}{12\sqrt{5}}\geq\frac{1250.5-1200}{12\sqrt{5}}\right)=P\left(Z\geq 1.88\right)=$$

$$=1-P\left(Z\leq 1.88\right)=\left\{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\right\}=1-0.9699=\boxed{0.0301}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	[illegible]	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	[illegible]	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	[illegible]	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	[illegible]	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	[illegible]	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	[illegible]	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	[illegible]	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	[illegible]	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	[illegible]	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	[illegible]	0,
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	[illegible]	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	[illegible]	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	[illegible]	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	[illegible]	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	[illegible]	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	[illegible]	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	[illegible]	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	[illegible]	0,
1,8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9699	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular el valor de *a* para que el sistema de ecuaciones $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea compatible.

b) (1.5 puntos) Calcular los valores de *a*, *b* y *c* para que la multiplicación de dos de las matrices sea igual a la restante.

a) Para ser un sistema compatible el rango de la matriz de coeficientes debe ser igual al de la matriz ampliada.

La matriz de coeficientes es $C=\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $C^*=\begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de C es 2 pues tiene un menor de orden 2 con determinante no nulo, el que se obtiene quitando la primera fila → $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$.

Comprobamos cuando el determinante de C* es nulo y por tanto también su rango es 2.

$$|C^*|=\begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2a+4+1+\cancel{3}-2-\cancel{3}-a-2=a+1$$

$$|C^*|=0 \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

El rango de C* es 2 cuando $a = -1$ y es 3 cuando $a \neq -1$.

El sistema es compatible cuando $a = -1$, pues el rango de C es 2 igual que el rango de C*.

b) Buscamos que productos se pueden realizar como se plantea en el ejercicio.

$$A\cdot B \xrightarrow{2\times\boxed{2\cdot 2}\times 3} 2\times 3 \; = \; C \text{ tiene dimensiones } 3\times 2$$

→ No es posible

$$A\cdot C \xrightarrow{2\times\boxed{2\cdot 3}\times 2} \; = \; B$$

No se puede realizar el producto A · C.

$$B\cdot C \xrightarrow{2\times\boxed{3\cdot 3}\times 2} 2\times 2 \; = \; A \text{ tiene dimensiones } 2\times 2$$

El producto BC es posible y su resultado puede ser A.

Nos planteamos el producto BC = A y determinamos los valores necesarios de *a*, *b* y *c*.

$$BC = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+2+6+3 & 1+4+3 \\ 2a+4+3a+3c+4 & 2+2a+2c+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+11=c \\ 8=8 \\ 5a+3c+8=1 \\ 2a+2c+6=b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+11=c \\ 5a+3c=-7 \\ 2a+c-b=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a+3(a+11)=-7 \\ 2a+a+11-b=-6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a+3a+33=-7 \\ 3a-b=-17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a=-40 \to \boxed{a=-5} \\ 3a-b=-17 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -15-b=-17 \Rightarrow \boxed{b=2} \Rightarrow \boxed{c=-5+11=6}$$

Los valores buscados son $a = -5$, $b = 2$ y $c = 6$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea *f(x)* una función continua y derivable en todo R tal que *f(1) = 2*, *f(2) = 1*, *f '(1) = 1* y *f '(2) = 2*. Se consideran, además, las funciones $g(x)=(f(x))^2$ y $h(x)=(f\circ f)(x)$. Se pide:
a) (0.5 puntos) Calcular *g(2)* y *g'(2)*.
b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *h(x)* en el punto *x = 1*.
c) (1 punto) Probar, utilizando el Teorema del Valor Medio, que existe un punto en el intervalo (1, 2) en el que el valor de la derivada de *f(x)* es −1.

a)

$$\boxed{g(2)=(f(2))^2=(1)^2=1}$$

$$g(x)=(f(x))^2 \Rightarrow g'(x)=2(f(x))\cdot f'(x) \Rightarrow \boxed{g'(2)=2(f(2))\cdot f'(2)=2(1)(2)=4}$$

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *h(x)* en el punto *x = 1* tiene la expresión:

$$y-h(1)=h'(1)(x-1)$$

Calculamos *h(1)* y *h´(1)* y obtenemos la ecuación pedida.

$$h(1)=(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=1$$
$$h'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x) \Rightarrow h'(1)=f'(f(1))\cdot f'(1)=f'(2)\cdot f'(1)=2\cdot 1=2$$

$$\left.\begin{array}{r} h(1)=1 \\ h'(1)=2 \\ y-h(1)=h'(1)(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-1=2(x-1) \Rightarrow \boxed{y=2x-1}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *h(x)* en el punto *x = 1* es: $y=2x-1$.

c) La función *f(x)* es continua en [1, 2] y derivable en (1, 2). Aplicando el Teorema Valor Medio, existe un punto *c* en (1, 2) tal que:

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{1-2}{2-1}=-1$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (0.5 puntos) Calcule el ángulo formado por los vectores $\vec{u}=(0,0,1)$ y $\vec{v}=\left(0,1,\sqrt{3}\right)$.

b) (1 punto) Sea O el origen de coordenadas, y los puntos A(2, 0, 0), B (0, 3, 0) y $C\left(0,2,2\sqrt{3}\right)$. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por las tres aristas concurrentes OA, OB y OC.

c) (1 punto) Calcule una ecuación de la recta perpendicular común a las rectas *r* y *s*, siendo *r* la recta que pasa por O y por C y *s* la recta de ecuaciones y − 3 = 0, z = 0.

a) Utilizamos el producto escalar.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(0,0,1)\\ \vec{v}=\left(0,1,\sqrt{3}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\frac{(0,0,1)\left(0,1,\sqrt{3}\right)}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{0^2+1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=30^{\circ}$$

El ángulo formado por los vectores es de 30º.

b) El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}=(2,0,0)\\ \overrightarrow{OB}=(0,3,0)\\ \overrightarrow{OC}=\left(0,2,2\sqrt{3}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow Volumen\,OABC=\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&2&2\sqrt{3}\end{vmatrix}=\boxed{12\sqrt{3}\simeq 20.78u^3}$$

c) Calculamos la ecuación de la recta *r* que pasa por O y C.

$$\left.\begin{array}{l}O(0,0,0)\in r\\ C\left(0,2,2\sqrt{3}\right)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}O(0,0,0)\in r\\ \vec{u}_r=\overrightarrow{OC}=\left(0,2,2\sqrt{3}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{r\equiv\begin{cases}x=0\\ y=2\lambda\\ z=2\sqrt{3}\lambda\end{cases};\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta *s*.

$$s\equiv\begin{cases}y-3=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{s\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=3;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=0\end{cases}}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}P_s(0,3,0)\\ \vec{v}_s=(1,0,0)\end{cases}$$

Estudiamos la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

Los vectores directores de ambas rectas no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}_r=\left(0,2,2\sqrt{3}\right)\\ \vec{v}_s=(1,0,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{0}{1}\neq\frac{2}{0}\neq\frac{2\sqrt{3}}{0}$$

Comprobamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{OP_s}\right]$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \left(0,2,2\sqrt{3}\right) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,0,0) \\ \overrightarrow{OP_s} = (0,3,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{OP_s}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6\sqrt{3} \neq 0$$

Como este producto mixto es no nulo las rectas *r* y *s* se cruzan.

Hallamos la recta perpendicular común a las rectas *r* y *s* como la intersección de dos planos.

Hallamos el vector perpendicular a ambas rectas que resulta del producto vectorial de sus respectivos vectores directores.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \left(0,2,2\sqrt{3}\right) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\sqrt{3}j - 2k = \left(0, 2\sqrt{3}, -2\right)$$

El primer plano π contiene a la recta *r* y tiene como uno de sus vectores directores el vector $\vec{n} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{v_s}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{u_r} = \left(0,2,2\sqrt{3}\right) \\ \vec{v} = \vec{n} = \left(0,2\sqrt{3},-2\right) \\ O(0,0,0) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4x - 4\left(\sqrt{3}\right)^2 x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x = 0}$$

El segundo plano π´ contiene a la recta *s* y tiene como uno de sus vectores directores el vector $\vec{n} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{v_s}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{v_s} = (1,0,0) \\ \vec{v} = \vec{n} = \left(0,2\sqrt{3},-2\right) \\ P_s(0,3,0) \in \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{3}z + 2y - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' \equiv y + \sqrt{3}z - 3 = 0}$$

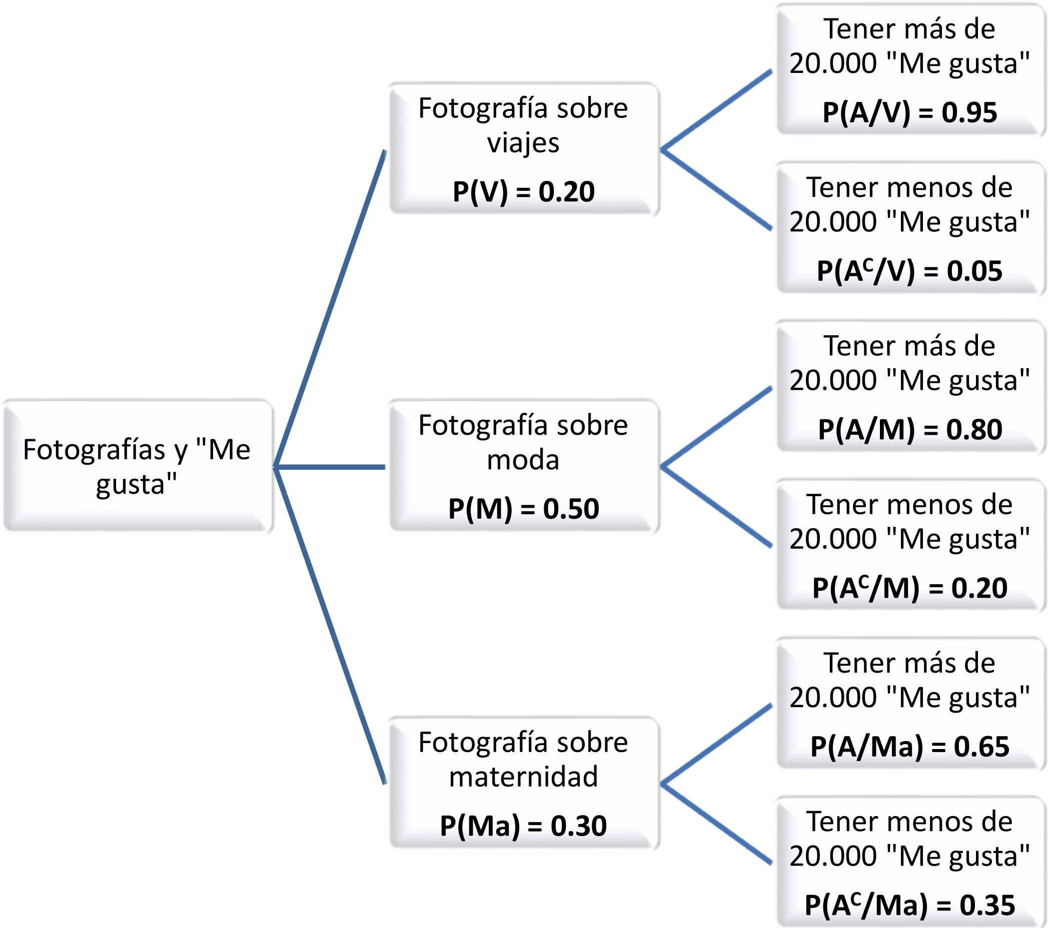
La recta *t* perpendicular común a las rectas *r* y *s* tiene ecuación:

$$t \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + \sqrt{3}z = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{t \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - \sqrt{3}\lambda; \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Una *influencer* famosa publica en su Instagram un 20% de fotografías dedicadas a viajes, un 50% referentes a temas de moda y el resto sobre maternidad. El 5% de las publicaciones de viajes reciben menos de 20 000 *Me gusta* y lo mismo ocurre con el 20% de las de moda y con el 35% de las que tratan asuntos de maternidad. Elegida una fotografía al azar, se pide:
a) (1.25 puntos) Determinar la probabilidad de que tenga más de 20 000 *Me gusta*.
b) (1.25 puntos) Si tiene menos de 20 000 *Me gusta*, calcular la probabilidad de que el tema tratado en ella haya sido sobre viajes.

Consideremos los sucesos V = "Fotografía sobre viajes", M = "Fotografía sobre moda", Ma = "Fotografía sobre maternidad" y A = "Tener más de 20 000 *Me gusta*".

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(V)P(A/V) + P(M)P(A/M) + P(Ma)P(A/Ma) =$$

$$= 0.2 \cdot 0.95 + 0.5 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.65 = \boxed{0.785}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V/A^C) = \frac{P(V \cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{P(V)P(A^C/V)}{1 - P(A)} = \frac{0.2 \cdot 0.05}{1 - 0.785} = \boxed{\frac{2}{43} \simeq 0.047}$$