Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2022ko EZOHIKOA — EXTRAORDINARIA 2022

MATEMATIKA II — **MATEMÁTICAS II**

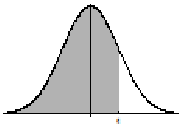
Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1
Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = \alpha \\ \alpha x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 1$, si es posible.

Ejercicio B1
Calcula de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

sabiendo que

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2
Sea la recta de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + \alpha y + z = 1 \\ 2x + 6y - 2z = 6 \end{cases},$$

¿Existe algún valor de α para el cual el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ contenga a la recta dada? Razona la respuesta.

Ejercicio B2
Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

¿Existe algún valor de *s* tal que el punto *(−3, s, s)* pertenezca a la recta? Razona la respuesta.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3
Calcula las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ que son paralelas a la recta $y = 3x - 2$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.

Ejercicio B3

Sea

$$f(x)=\begin{cases} x^2+Ax, & si\ x\le 1 \\ Bx-A, & si\ x>1 \end{cases}$$

(a) Encuentra los valores de A y B para que f sea derivable en toda la recta real.

(b) Haz la representación gráfica de la función f con los valores de A y B obtenidos en el apartado (a).

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula $\int \ln\left(x^2-1\right)dx$.

Ejercicio B4

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=x$, $g(x)=x/8$ y $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$ y calcula el área de ese recinto.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Una urna S contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna T, 6 blancas y 4 negras.
Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras?

(b) Si las dos bolas extraídas son negras, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la T?

Ejercicio B5

Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60% de los hogares tienen al menos dos coches. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos coches?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 30 y 40 hogares, ambos incluidos, tengan al menos dos coches?

Soluciones

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1
Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x+2y-2z=2 \\ 2x+2y-2z=\alpha \\ \alpha x+2y-z=1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha=1$, si es posible.

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} \alpha & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ \alpha & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} \alpha & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & \alpha \\ \alpha & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ \alpha & 2 & -1 \end{vmatrix}=-2\alpha-\cancel{4\alpha}-8+\cancel{4\alpha}+4+4\alpha=2\alpha-4$$

$$|A|=0 \Rightarrow 2\alpha-4=0 \Rightarrow 2\alpha=4 \Rightarrow \boxed{\alpha=2}$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha=2$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.
Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente triangular más fácil de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila\,2^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Fila\,3^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{A}$$
$$\xleftrightarrow{A/B}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 2$ el sistema es compatible determinado y si $\alpha = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible determinado.

$$\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 2x+2y-2z=1 \\ x+2y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} 2x & +2y & -2z & =1 \\ -2x & -4y & +4z & =-4 \\ \hline & -2y & +2z & =-3 \end{array} \rightarrow \textit{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} x & +2y & -z & =1 \\ -x & -2y & +2z & =-2 \\ \hline & & z & =-1 \end{array} \rightarrow \textit{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ -2y+2z=-3 \\ \boxed{z=-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+2=2 \\ -2y-2=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ -2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ \boxed{y=\dfrac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

Para $\alpha = 1$ la solución del sistema es $x=-1;\ y=\frac{1}{2};\ z=-1$.

Ejercicio B1

Calcula de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

sabiendo que

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6$$

$$6 = \begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = \left\{ \text{Saco factor común 2 en la 2ª fila} \right\} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Separo los elementos de la 1ª fila} \\ \text{en suma de dos determinantes} \end{array} \right\} =$$

$$= 2\left[\begin{vmatrix} p & q & r \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} \right] = \left\{ \begin{array}{l} \text{El primer determinante es 0,} \\ \text{pues la fila 3ª es la suma de las filas 1ª y 2ª.} \\ \text{En el segundo determinante separo} \\ \text{los elementos de la 3ª fila} \\ \text{en suma de dos determinantes} \end{array} \right\} =$$

$$= 2\left[0 + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} \right] = \left\{ \begin{array}{l} \text{El segundo determinante es 0,} \\ \text{pues la fila 3ª es igual que la fila 2ª.} \end{array} \right\} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambio las filas 2ª y 3ª} \\ \text{y el determinante cambia de signo} \end{array} \right\} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

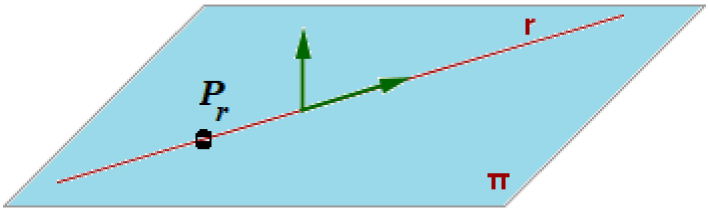
Hemos obtenido que $6 = \begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$, por lo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{6}{-2} = -3$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2
Sea la recta de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} 3x+\alpha y+z=1 \\ 2x+6y-2z=6 \end{cases},$$

¿Existe algún valor de α para el cual el plano $\pi \equiv x+y+z=1$ contenga a la recta dada? Razona la respuesta.



Para que la recta este contenida en el plano su vector director debe formar 90º con el vector normal del plano, es decir, su producto escalar debe ser 0 y además cualquier punto de la recta debe pertenecer al plano.
Obtenemos un vector director de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} 3x+\alpha y+z=1 \\ 2x+6y-2z=6 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & \alpha & 1 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -2\alpha i+2j+18k-2\alpha k+6j-6i$$

$$\overrightarrow{v_r} = (-2\alpha-6, 8, 18-2\alpha)$$

El vector normal del plano $\pi \equiv x+y+z=1$ es $\vec{n}=(1,1,1)$

Comprobamos si el producto escalar $\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}$ puede ser 0.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(-2\alpha-6,8,18-2\alpha) \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,1,1)(-2\alpha-6,8,18-2\alpha)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\alpha-6+8+18-2\alpha=0 \Rightarrow -4\alpha+20=0 \Rightarrow 4\alpha=20 \Rightarrow \boxed{\alpha=5}$$

Para $\alpha=5$ la recta es paralela al plano o está contenida en el plano.

Obtenemos un punto de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x+5y+z=1 \\ 2x+6y-2z=6 \end{cases}$.

$$r \equiv \begin{cases} 3x+5y+z=1 \\ 2x+6y-2z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+5y+z=1 \\ x+3y-z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+5y+z=1 \\ x=3-3y+z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(3-3y+z)+5y+z=1 \Rightarrow 9-9y+3z+5y+z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4y+4z+8=0 \Rightarrow -y+z+2=0 \Rightarrow z=y-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=3-3y+y-2=-2y+1 \Rightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ z=-2+y \end{cases}$$

$$Tomamos\ y=0 \Rightarrow P_r(1,0,-2)$$

Comprobamos si el punto pertenece al plano.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(1,0,-2) \\ \pi \equiv x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿1+0-2=1? \text{¡No es cierto!}$$

Para $\alpha=5$ plano y recta son paralelos. La recta no está contenida en el plano.
No existe ningún valor de α para el cual la recta esté contenida en el plano.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

El sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano debe tener infinitas soluciones (todos los puntos de la recta), por lo que rango de la matriz A de coeficientes y el rango de la matriz ampliada A/B debe ser 2.

El determinante de la matriz de coeficientes debe ser 0.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} 3x+\alpha y+z=1 \\ 2x+6y-2z=6 \end{cases} \\ \pi \equiv x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 3 & \alpha & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & \alpha & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 18-2\alpha+2-\cancel{6}-2\alpha+\cancel{6}=0 \Rightarrow -4\alpha+20=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=5}$$

Para $\alpha=5$ estudiamos el rango de A/B.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} 3x+5y+z=1 \\ x+3y-z=3 \end{cases} \\ \pi \equiv x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A/B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 1}^a - 3 \cdot \text{Ecuación 2}^a \\ \begin{array}{rrrr} 3 & 5 & 1 & 1 \\ -3 & -9 & 3 & -9 \\ \hline 0 & -4 & 4 & -8 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 2}^a \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{cases} \text{Ecuación 1}^{\text{a}} - 3 \cdot \text{Ecuación 3}^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 3 & 5 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ \hline 0 & 2 & -2 & -2 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^{\text{a}} \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \text{Ecuación 2}^{\text{a}} + 2 \cdot \text{Ecuación 3}^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 0 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -12 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^{\text{a}} \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

El rango de A/B es 3 distinto del rango de A, por lo que el sistema es incompatible y no tienen ningún punto común recta y plano. La recta es paralela al plano y no está contenida en él.
No existe ningún valor de α para el cual la recta esté contenida en el plano.

Ejercicio B2

Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$$

¿Existe algún valor de s tal que el punto *(−3, s, s)* pertenezca a la recta? Razona la respuesta.

Hallamos las ecuaciones paramétricas resolviendo el sistema formado por las ecuaciones implícitas de la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ x+2z=y \end{cases} \Rightarrow 3x+x+2z+z=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+3z=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{4}z \Rightarrow y=-\frac{3}{4}z+2z=\frac{5}{4}z \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x=-\frac{3}{4}t \\ y=\frac{5}{4}t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}}$$

Para que el punto *(−3, s, s)* pertenezca a la recta debe de satisfacer sus ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{c} r \equiv \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \\ (-3,\ s,\ s)\in r \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3(-3)+s+s=0 \\ -3-s+2s=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9+2s=0 \to s=\frac{9}{2} \\ -3+s=0 \to s=3 \end{cases}$$

Al resolver el sistema obtenemos valores distintos de s en cada una de las ecuaciones que definen la recta. El punto no pertenece a la recta.

No existe ningún valor de s tal que el punto *(−3, s, s)* pertenezca a la recta

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3
Calcula las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)=2x^3-3x+1$ que son paralelas a la recta $y=3x-2$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.

Si la recta tangente en *x* = *a* es paralela a $y=3x-2$ debe tener pendiente 3, es decir, $f'(a)=3$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=2x^3-3x+1 \Rightarrow f'(x)=6x^2-3 \\ f'(a)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3=6a^2-3 \Rightarrow 6a^2=6 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow \boxed{a=\pm 1}$$

Las rectas tangentes son en *x = –1* y en *x = 1*.

Calculamos la ecuación de la recta tangente en *x = –1*.

$$\left.\begin{array}{r} f(-1)=2(-1)^3-3(-1)+1=-2+3+1=2 \\ f'(-1)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow y-2=3(x+1) \Rightarrow \boxed{y=3x+5}$$

Calculamos la ecuación de la recta tangente en *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{r} f(1)=2\cdot 1^3-3+1=0 \\ f'(1)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=3(x-1) \Rightarrow \boxed{y=3x-3}$$

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f* igualo la derivada a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 6x^2-3=0 \Rightarrow 2x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

En el intervalo $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale $f'(-2)=6(-2)^2-3=21>0$. La función crece en $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

En el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=-3<0$. La función decrece en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=6\cdot 2^2-3=21>0$. La función crece en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

Resumiendo: La función crece en $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ y decrece en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ejercicio B3

Sea

$$f(x)=\begin{cases} x^2+Ax, & si\ x\leq 1 \\ Bx-A, & si\ x>1 \end{cases}$$

(a) Encuentra los valores de A y B para que f sea derivable en toda la recta real.

(b) Haz la representación gráfica de la función f con los valores de A y B obtenidos en el apartado (a).

(b) Para ser derivable primero ha de ser continua.

Si f es continua en $x = 1$ debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2+Ax=1+A \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} Bx-A=B-A \\ f(1)=1+A \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1+A=B-A \Rightarrow \boxed{2A=B-1}$$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$ y su derivada es $f'(x)=\begin{cases} 2x+A, & si\ x<1 \\ B, & si\ x>1 \end{cases}$.

La función debe ser derivable en $x = 1$ y por tanto las derivadas laterales deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-} 2x+A=2+A \\ f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+} B=B \\ f'(1^-)=f'(1^+) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{B=2+A}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 2A=B-1 \\ B=2+A \end{array}\right\} \Rightarrow 2A=2+A-1 \Rightarrow 2A-A=2-1 \Rightarrow \boxed{A=1} \Rightarrow \boxed{B=2+1=3}$$

Los valores que buscamos son $A=1,\ B=3$.

(b) La función $f(x)=\begin{cases} x^2+x, & si\ x\leq 1 \\ 3x-1, & si\ x>1 \end{cases}$ en el intervalo $(-\infty,1]$ la gráfica es una parábola.

Hallamos las coordenadas de su vértice.

$$f(x)=x^2+x \Rightarrow f'(x)=2x+1$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

$$Vértice \to \left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{4}\right)$$

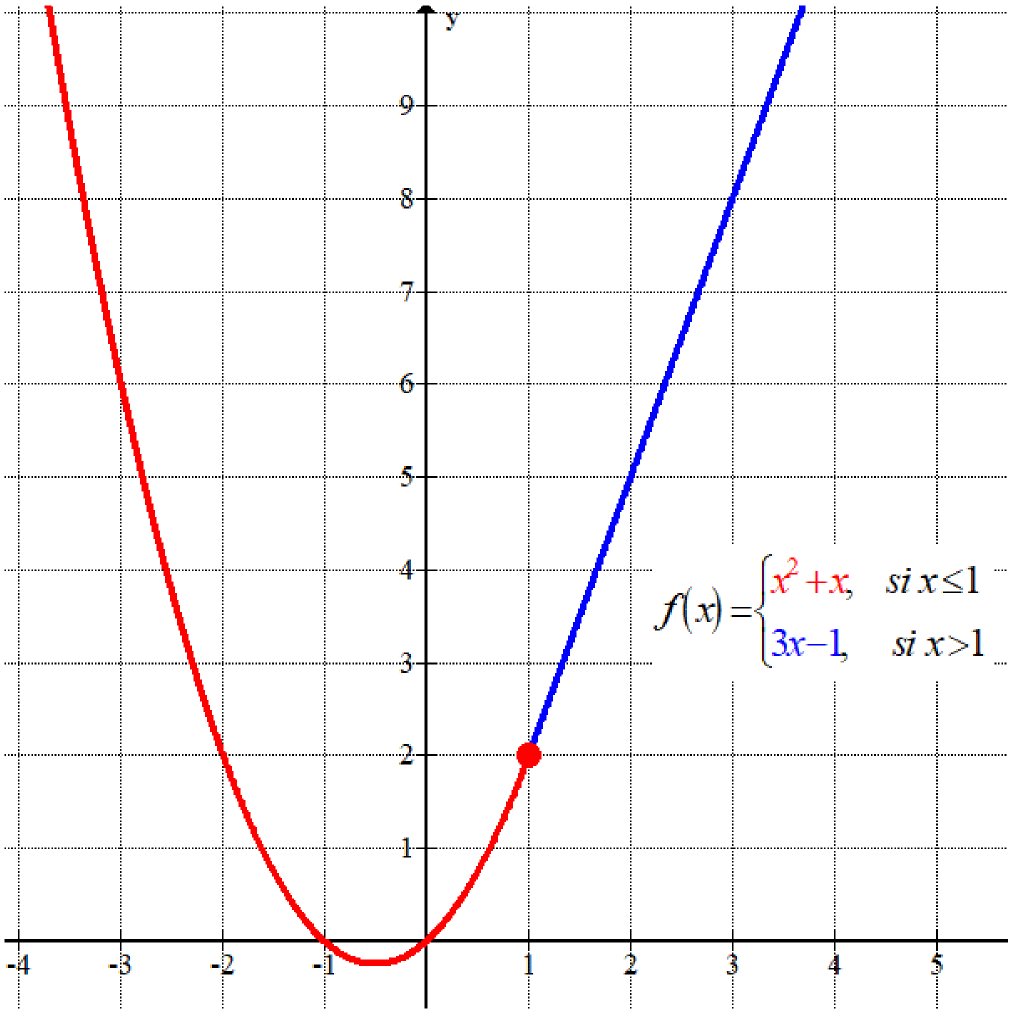
Hallamos una tabla de valores de la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x, & si\ x\leq 1 \\ 3x-1, & si\ x>1 \end{cases}$ y representamos su gráfica.

$si\ x\leq 1$

x	$y=x^2+x$
-1	0
$-1/2$	$-1/4$
0	0
1	2

$si\ x>1$

x	$y=3x-1$
2	5
3	8



CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula $\int \ln\left(x^2-1\right)dx$.

$$\int \ln\left(x^2-1\right)dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes} \\ u=\ln\left(x^2-1\right) \rightarrow du=\frac{2x}{x^2-1}dx \\ dv=dx \rightarrow v=\int dx = x\end{array}\right\} = x\ln\left(x^2-1\right)-\int x\frac{2x}{x^2-1}dx =$$

$$= x\ln\left(x^2-1\right)-\int \frac{2x^2}{x^2-1}dx = x\ln\left(x^2-1\right)-2\int \frac{x^2}{x^2-1}dx = x\ln\left(x^2-1\right)-2\int \frac{x^2-1+1}{x^2-1}dx =$$

$$= x\ln\left(x^2-1\right)-2\left[\int \frac{x^2-1}{x^2-1}dx+\int \frac{1}{x^2-1}dx\right] = x\ln\left(x^2-1\right)-2\left[\int 1dx+\int \frac{1}{x^2-1}dx\right] =$$

$$= x\ln\left(x^2-1\right)-2\left[x+\int \frac{1}{x^2-1}dx\right] = x\ln\left(x^2-1\right)-2x-2\int \frac{1}{x^2-1}dx = \ldots$$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=A(x+1)+B(x-1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \rightarrow 1=-2B \rightarrow B=\frac{-1}{2} \\ x=1 \rightarrow 1=2A \rightarrow A=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-1}=\frac{1/2}{x-1}-\frac{1/2}{x+1}$$

$$\ldots = x\ln\left(x^2-1\right)-2x-2\int \frac{1/2}{x-1}-\frac{1/2}{x+1}dx = x\ln\left(x^2-1\right)-2x-2\int \frac{1/2}{x-1}dx+2\int \frac{1/2}{x+1}dx =$$

$$= x\ln\left(x^2-1\right)-2x-\int \frac{1}{x-1}dx+\int \frac{1}{x+1}dx = \boxed{x\ln\left(x^2-1\right)-2x-\ln|x-1|+\ln|x+1|+K}$$

Ejercicio B4

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=x$, $g(x)=x/8$ y $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$ y calcula el área de ese recinto.

Hallamos los puntos de corte entre cada par de funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x \\ g(x)=x/8 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{x}{8} \Rightarrow 8x=x \Rightarrow 7x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x \\ h(x)=\dfrac{1}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{1}=1}$$

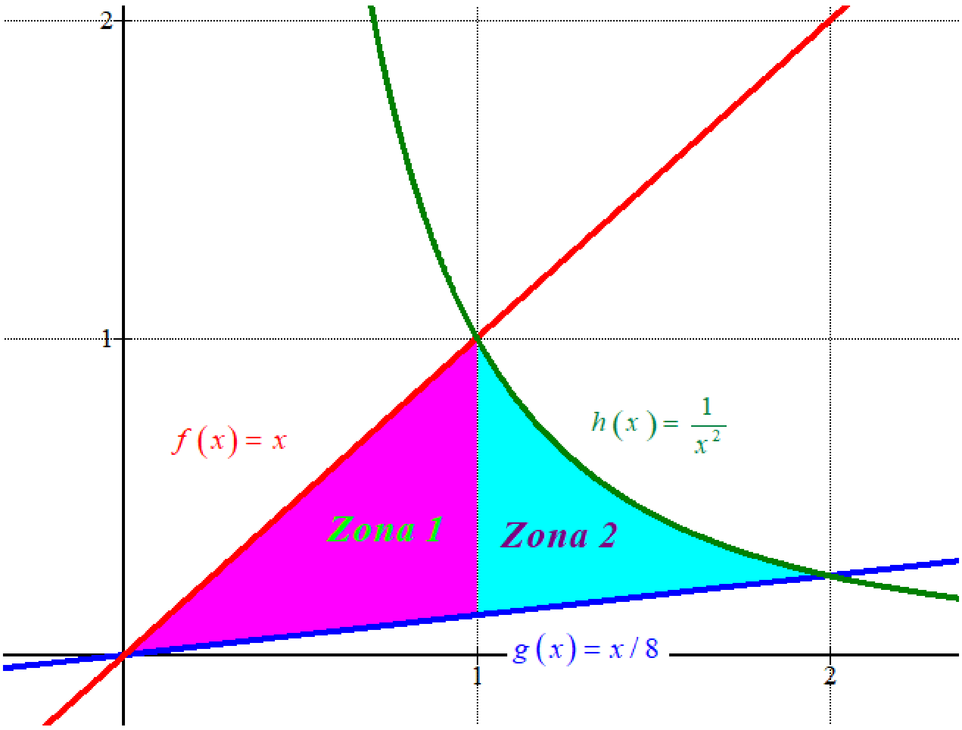
$$\left.\begin{array}{l} g(x)=x/8 \\ h(x)=\dfrac{1}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{8}=\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{8}=2}$$

Hacemos una tabla de valores para cada función y las dibujamos.

x	$f(x)=x$
0	0
1	1
2	2

x	$g(x)=x/8$
0	0
1	$1/8$
2	$1/4$

x	$h(x)=\dfrac{1}{x^2}$
1	1
2	$1/4$
3	$1/9$



La región de la cual queremos hallar el área la dividimos en dos zonas cuyas áreas calculamos con dos integrales definidas.

$$\text{Área Zona}\,1=\int_0^1 x-\frac{x}{8}dx=\int_0^1\frac{7}{8}xdx=\left[\frac{7}{8}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\left[\frac{7}{16}x^2\right]_0^1=\left[\frac{7}{16}\cdot 1^2\right]-\left[\frac{7}{16}\cdot 0^2\right]=\boxed{\frac{7}{16}\,u^2}$$

$$\text{Área Zona}\,2=\int_1^2\frac{1}{x^2}-\frac{x}{8}dx=\int_1^2 x^{-2}-\frac{1}{8}xdx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{8}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\left[-\frac{1}{x}-\frac{x^2}{16}\right]_1^2=$$

$$=\left[-\frac{1}{2}-\frac{2^2}{16}\right]-\left[-\frac{1}{1}-\frac{1^2}{16}\right]=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{16}=\boxed{\frac{5}{16}\,u^2}$$

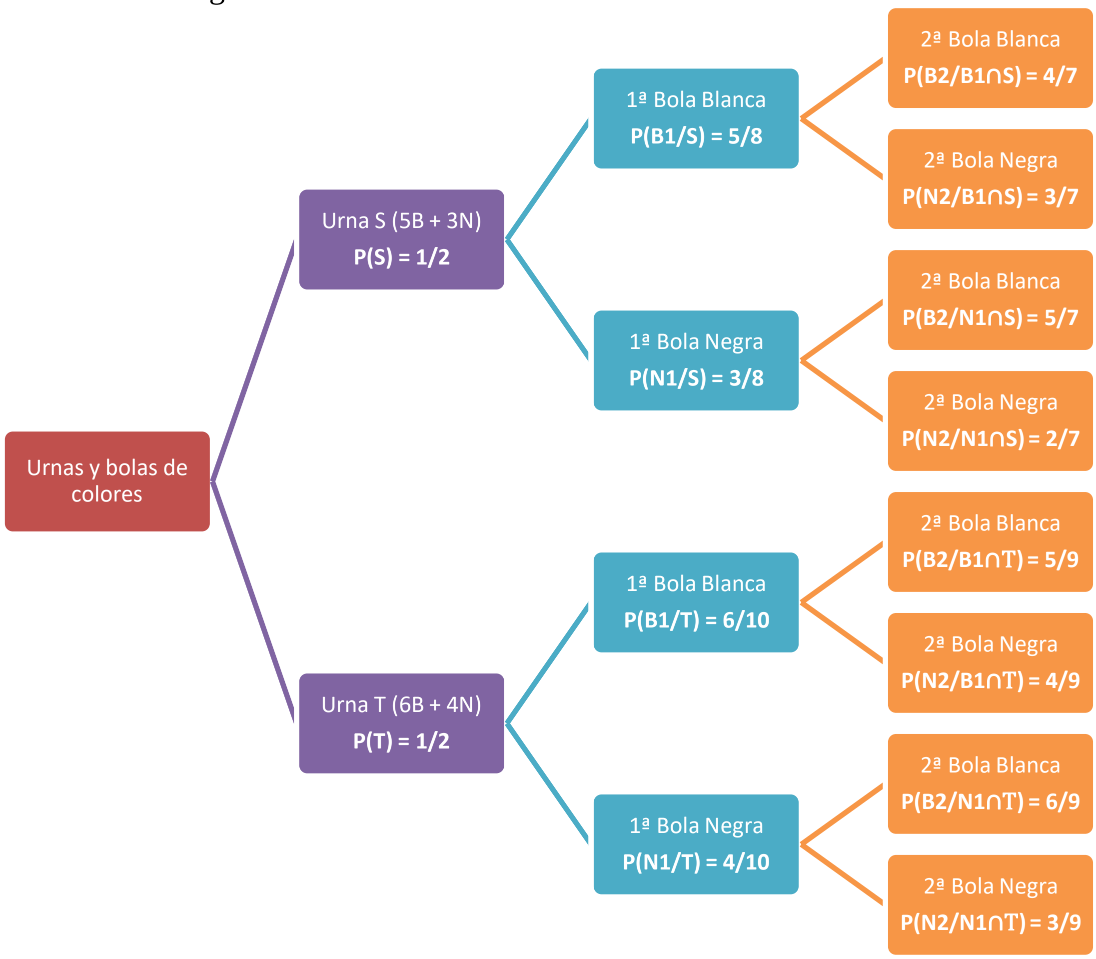
El área de la región encerrada entre las gráficas de las tres funciones es la suma de las dos áreas obtenidas:

$$\text{Área}=\frac{7}{16}+\frac{5}{16}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}=\boxed{0.75\,u^2}$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5
Una urna S contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna T, 6 blancas y 4 negras.
Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras?
(b) Si las dos bolas extraídas son negras, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la T?

Realizamos un diagrama de árbol.



(a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(N1\cap N2)=P(S\cap N1\cap N2)+P(T\cap N1\cap N2)=$$

$$=P(S)P(N1/S)P(N2/N1\cap S)+P(T)P(N1/T)P(N2/N1\cap T)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\boxed{\frac{101}{840}\simeq 0.1202}$$

(b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T/N1\cap N2)=\frac{P(T\cap N1\cap N2)}{P(N1\cap N2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}}{\frac{101}{840}}=\boxed{\frac{56}{101}\simeq 0.554}$$

Ejercicio B5

Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60% de los hogares tienen al menos dos coches. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos coches?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 30 y 40 hogares, ambos incluidos, tengan al menos dos coches?

X = El número de hogares de un grupo de 50 que tienen al menos dos coches.
Se trata de una distribución binomial, B(50, 0.6).
Como el número de repeticiones es muy alto y se cumple que $n \cdot p = 50 \cdot 0.6 = 30 \geq 5$ y $n \cdot q = 50 \cdot 0.4 = 20 \geq 5$, se puede aproximar mediante una distribución normal Y de media $np = 50 \cdot 0.6 = 30$ y desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = 2\sqrt{3} \simeq 3.46$ → Y = N(30, $2\sqrt{3}$).

(a) Nos piden calcular $P(X \geq 20)$

$$P(X \geq 20) = \{Corrección\ de Yates\} = P(Y \geq 19.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(\frac{Y-30}{2\sqrt{3}} \geq \frac{19.5-30}{2\sqrt{3}}\right) = P(Z \geq -3.03) = P(Z \leq 3.03) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = \boxed{0.9988}$$

	0	0'01	0'02	0'03	
0	0'5000	0'5040	0'5080	[illegible]	0
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	[illegible]	0
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	[illegible]	0
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	[illegible]	0
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	[illegible]	0
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	[illegible]	0
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	[illegible]	0
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	[illegible]	0
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	[illegible]	0
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	[illegible]	0
1	0'8413	0'8438	0'8461	[illegible]	0
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	[illegible]	0
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	[illegible]	0
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	[illegible]	0
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	[illegible]	0
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	[illegible]	0
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	[illegible]	0
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	[illegible]	0
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	[illegible]	0
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	[illegible]	0
2	0'9772	0'9778	0'9783	[illegible]	0
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	[illegible]	0
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	[illegible]	0
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	[illegible]	0
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	[illegible]	0
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	[illegible]	0
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	[illegible]	0
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	[illegible]	0
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	[illegible]	0
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	[illegible]	0
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'9988	
[illegible]	0'9990	0'9991	0'9991	[illegible]	0

(b) Nos piden hallar $P(30 \leq X \leq 40)$.

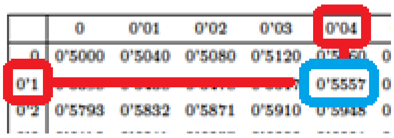
$$P(30 \le X \le 40) = \{Corrección\ de Yates\} = P(29.5 \le Y \le 40.5)$$

$$= P(Y \le 40.5) - P(Y \le 29.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \le \frac{40.5-30}{2\sqrt{3}}\right) - P\left(Z \le \frac{29.5-30}{2\sqrt{3}}\right) = P(Z \le 3.03) - P(Z \le -0.14) =$$

$$= P(Z \le 3.03) - P(Z \ge 0.14) = P(Z \le 3.03) - [1 - P(Z \le 0.14)] =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = 0.9988 - [1 - 0.5557] = \boxed{0.5545}$$



	0	0'01	0'02	0'03	0'04
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	[illegible]
0'1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'5557
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948