PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA. CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)
c) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
d) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
e) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\2&-1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3\\-7\\-2\end{pmatrix}$$

a) (**1 punto**) Razone si se pueden efectuar las siguientes operaciones y realice las que sean posibles:

$$C\cdot A,\qquad A+B,\qquad C^t\cdot B^t\ .$$

b) (**1.5 puntos**) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X=B\cdot X+C$.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una papelería quiere vender 400 cuadernos de vacaciones y 300 estuches de lápices de colores. Para ello ha preparado dos lotes de esos productos a precios especiales. Los lotes de tipo A contienen 2 cuadernos y 2 estuches; los lotes de tipo B contienen 3 cuadernos y 1 estuche. No es posible vender más de 100 lotes de tipo B. Cada lote de tipo A se vende a 35€ y cada lote de tipo B a 45€. Calcule cuántos lotes de cada tipo debe vender la papelería para conseguir el máximo valor de ventas. ¿A cuánto asciende dicho valor?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}4x^2+16x+17 & x<-1\\ \frac{1}{3}(10-5x) & -1\le x\le 2\\ \frac{3}{2} & x>2\end{cases}$$

a) (**1.25 puntos**) Estudie la continuidad y derivabilidad de f.
b) (**0.5 puntos**) Represente gráficamente la función f.
c) (**0.75 puntos**) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas entre $x=-2$ y $x=2$.

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=3x^3-6x^2+5$

a) (**1.5 puntos**) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a f que sean paralelas a la recta de ecuación $y=-3x+1$.

b) (**1 punto**) Calcule la función F que verifique que $F'(x)=f(x)$ y $F(2)=4$.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

De los sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(A)=0.7 \quad P(B)=0.6 \quad P(A\cup B)=0.8$$

Calcule la probabilidad de que:

a) (**0.75 puntos**) Ocurra A y B.

b) (**0.75 puntos**) No ocurra ni A ni B.

c) (**0.5 puntos**) Ocurra A pero no B.

d) (**0.5 puntos**) Ocurra A sabiendo que no ha ocurrido B.

EJERCICIO 6

El porcentaje de conductores que consumen alcohol durante la madrugada del sábado es del 5%. La policía realiza controles de alcoholemia mediante un test del que se sabe que da positivo en un 96% si la persona ha bebido alcohol y en un 10% si la persona no ha bebido alcohol.

Elegido al azar un conductor en la madrugada del sábado y realizado este test de alcoholemia, halle la probabilidad de que:

a) (**1.25 puntos**) Si el test da positivo, el conductor haya consumido alcohol.

b) (**0.5 puntos**) El test dé negativo y el conductor no haya consumido alcohol.

c) (**0.75 puntos**) Si el test ha dado negativo, el conductor no haya consumido alcohol.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Un taller desea estimar el grado de satisfacción de sus clientes. Para ello, a 120 clientes seleccionados al azar, les pregunta si volverían a solicitar sus servicios en caso de necesitarlo, de los que 96 respondieron que sí lo harían.

a) (**1.25 puntos**) Determine, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de clientes de este taller que volverían a solicitar sus servicios.

b) (**1.25 puntos**) Mediante una nueva muestra queremos estimar la proporción de clientes de ese taller que volverían a solicitar sus servicios con un error máximo del 5% y un nivel de confianza del 97%. Suponiendo que se mantiene la proporción muestral, ¿qué tamaño mínimo debe tener dicha muestra?

EJERCICIO 8

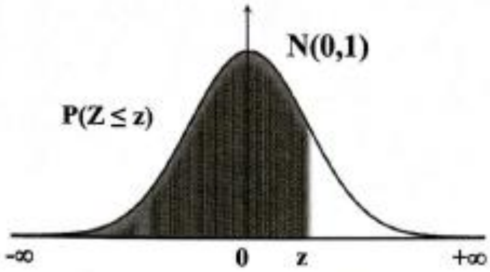
El consumo de energía eléctrica mensual por vivienda medido en kilovatios hora (kWh) sigue una distribución Normal con varianza 4225 $(\text{kWh})^2$.

a) (**1 punto**) Se toma una muestra aleatoria de 100 viviendas, obteniéndose un consumo total de 26830 kWh. Calcule un intervalo de confianza al 92% para estimar el consumo medio poblacional.

b) (**1 punto**) Calcule el tamaño mínimo de la muestra necesario para estimar el consumo medio de energía eléctrica mensual por vivienda, con un error máximo de 5 kWh y con un nivel de confianza del 98%.

c) (**0.5 puntos**) Tras una campaña para incentivar el ahorro energético se toma una nueva muestra y el intervalo de confianza para el consumo medio que se obtiene es (224.08, 255.92). Calcule la media del consumo de energía eléctrica mensual por vivienda para dicha muestra.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\2&-1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3\\-7\\-2\end{pmatrix}$$

b) (**1 punto**) Razone si se pueden efectuar las siguientes operaciones y realice las que sean posibles:

$$C\cdot A,\qquad A+B,\qquad C^t\cdot B^t\ .$$

b) (**1.5 puntos**) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X=B\cdot X+C$.

a) C · A no es posible pues no coinciden el número de columnas de C con el número de filas de A.

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}3\\-7\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\2&-1&0\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{1\cdot\ \ 3}\times 3\Rightarrow\text{¡}No\,es\ posible\text{!}$$

A + B se puede realizar pues tienen la misma dimensión: 3 filas y 3 columnas.

$$A+B=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\2&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\-2&-2&0\\3&-2&1\end{pmatrix}$$

$C^t\cdot B^t$ se puede realizar pues coinciden el número de columnas de C^t con el número de filas de B^t.

$$C^t\cdot B^t=\begin{pmatrix}3&-7&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+7-2&-3+7+2&3+7-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&6&8\end{pmatrix}$$

$$1\times\boxed{3\qquad\cdot\qquad 3}\times 3\longrightarrow 1\times 3$$

b) Despejamos X en la ecuación matricial $A\cdot X=B\cdot X+C$.

$$A\cdot X=B\cdot X+C\Rightarrow A\cdot X-B\cdot X=C\Rightarrow (A-B)X=C\Rightarrow X=(A-B)^{-1}\cdot C$$

Comprobamos que $A-B$ tiene inversa.

$$A-B=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\2&-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$|A-B|=\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&-1\end{vmatrix}=0+2+0-0-0-0=2\neq 0$$

Al ser el determinante distinto de cero existe la inversa y la calculamos.

$$(A-B)^{-1}=\frac{Adj\left((A-B)^t\right)}{|A-B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&2&-1\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\2&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\2&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\0&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\0&2\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&2\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/2&1\\1&0&0\\0&1/2&0\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial $X=(A-B)^{-1}\cdot C$ y calculamos X.

$$X=(A-B)^{-1}\cdot C=\begin{pmatrix}0&1/2&1\\1&0&0\\0&1/2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-7\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-7/2-2\\3+0+0\\0-7/2-0\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{3\quad\cdot\ 3}\times 1\to 3\times 1$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-11/2\\3\\-7/2\end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una papelería quiere vender 400 cuadernos de vacaciones y 300 estuches de lápices de colores. Para ello ha preparado dos lotes de esos productos a precios especiales. Los lotes de tipo A contienen 2 cuadernos y 2 estuches; los lotes de tipo B contienen 3 cuadernos y 1 estuche. No es posible vender más de 100 lotes de tipo B. Cada lote de tipo A se vende a 35€ y cada lote de tipo B a 45€. Calcule cuántos lotes de cada tipo debe vender la papelería para conseguir el máximo valor de ventas. ¿A cuánto asciende dicho valor?

Llamamos x = número de lotes del tipo A, y = número de lotes del tipo B.

La función a maximizar es el valor de las ventas que viene dado como $f(x,y)=35x+45y$

Realizamos una tabla con los datos.

	Cuadernos	Estuches
Nº lotes del tipo A (x)	2x	2x
Nº lotes del tipo B (y)	3y	y
TOTAL	$2x+3y$	$2x+y$

Las restricciones son:

"*Quiere vender 400 cuadernos de vacaciones y 300 estuches de lápices de colores*" → $2x+3y\le 400;\ 2x+y\le 300$

"*No es posible vender más de 100 lotes de tipo B*" → $y\le 100$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y\le 400 \\ 2x+y\le 300 \\ y\le 100 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+3y=400$

x	$y=\dfrac{400-2x}{3}$
50	100
125	50

$2x+y=300$

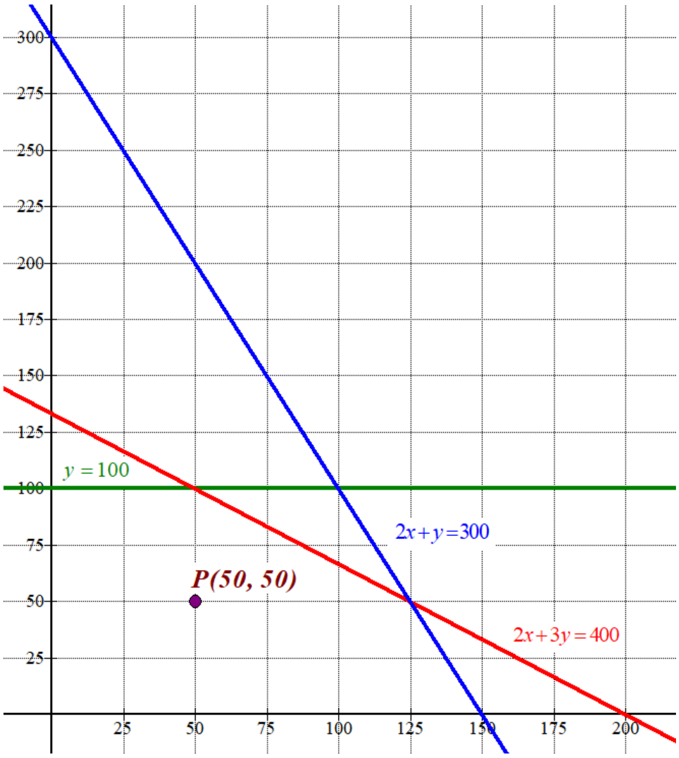
x	$y=300-2x$
0	300
125	50

$y=100$

x	$y=100$
0	100
50	100

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

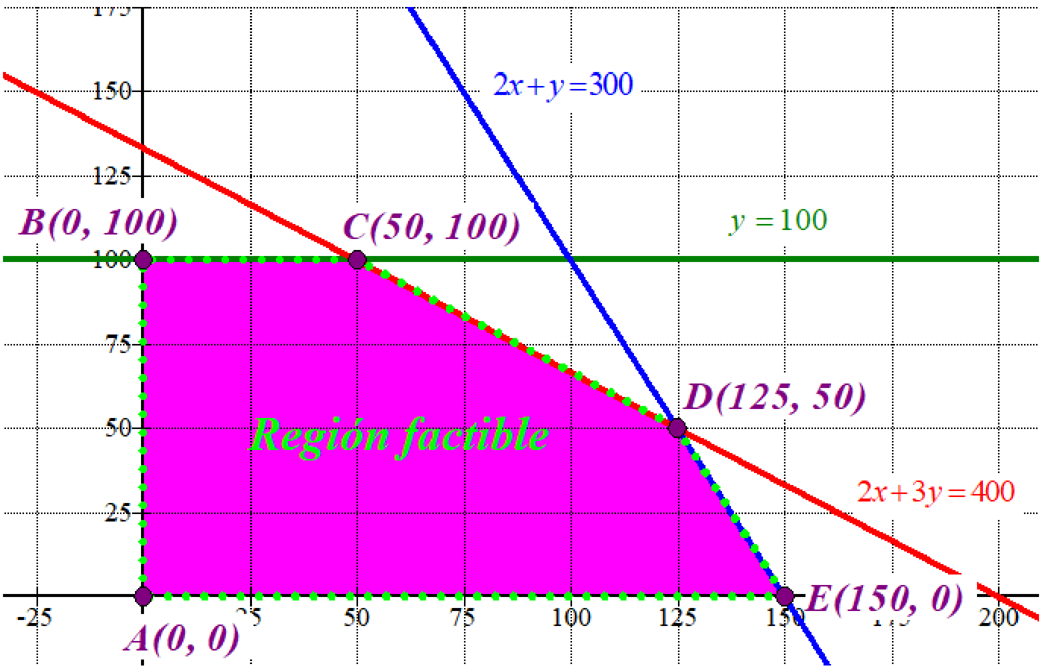


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+3y\le 400 \\ 2x+y\le 300 \\ y\le 100 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de la recta horizontal verde, la azul y la roja.

Comprobamos que el punto *P(50, 50)* perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 100+150\le 400 \\ 100+50\le 300 \\ 50\le 100 \\ 50\ge 0;\ 50\ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas del vértice D.

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=400 \\ 2x+y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=400 \\ y=300-2x \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+3(300-2x)=400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+900-6x=400 \Rightarrow -4x=-500 \Rightarrow x=\frac{500}{4}=125 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=300-250=50 \Rightarrow \boxed{D(125,50)}$$

Valoramos la función objetivo $f(x,y)=35x+45y$ en cada vértice.

A(0, 0) → $f(0,0)=0$
B(0, 100) → $f(0,100)=4500$
C(50, 100) → $f(50,100)=1750+4500=6250$
D(125, 50) → $f(125,50)=4375+2250=6625$ ¡Máximo!
E(150, 0) → $f(150,0)=5250$

Las ventas más altas se consiguen vendiendo 125 lotes del tipo A y 50 del tipo B. Estas ventas máximas son de un importe de 6625 €
.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} 4x^2+16x+17 & x<-1 \\ \frac{1}{3}(10-5x) & -1\le x\le 2 \\ \frac{3}{2} & x>2 \end{cases}$$

a) (**1.25 puntos**) Estudie la continuidad y derivabilidad de f.
b) (**0.5 puntos**) Represente gráficamente la función f.
c) (**0.75 puntos**) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas entre $x=-2$ y $x=2$.

a) La función es continua en $\mathbb{R}-\{-1,2\}$, pues en cada intervalo la función es una función polinómica. Falta comprobar la continuidad en el cambio de definición.

Para ser continua en $x=-1$ debe cumplirse que $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} 4x^2+16x+17=4(-1)^2+16(-1)+17=5 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{3}(10-5x)=\frac{1}{3}(10-5(-1))=5 \\ f(-1)=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)=5$$

La función es continua en $x=-1$.

Para ser continua en $x=2$ debe cumplirse que $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{3}(10-5x)=\frac{1}{3}(10-5\cdot 2)=0 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} \frac{3}{2}=\frac{3}{2} \\ f(2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

La función no es continua en $x=2$.

La función es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{-1,2\}$ y su derivada tiene la expresión:

$$f'(x)=\begin{cases} 8x+16 & x<-1 \\ \frac{1}{3}(-5)=\frac{-5}{3} & -1<x<2 \\ 0 & x>2 \end{cases}$$

Al no ser continua la función no es derivable en $x=2$.

Comprobamos si es derivable en $x=-1$. Para ello deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(-1^-\right)=\lim\limits_{x\to -1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} 8x+16=-8+16=8 \\ f'\left(-1^+\right)=\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{-5}{3}=\frac{-5}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow f'\left(-1^-\right)\neq f'\left(-1^+\right)$$

La función no es derivable en $x=-1$.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{-1,2\}$.

a) Para representarla hacemos una tabla de valores para cada intervalo de definición.

Si $x<-1$

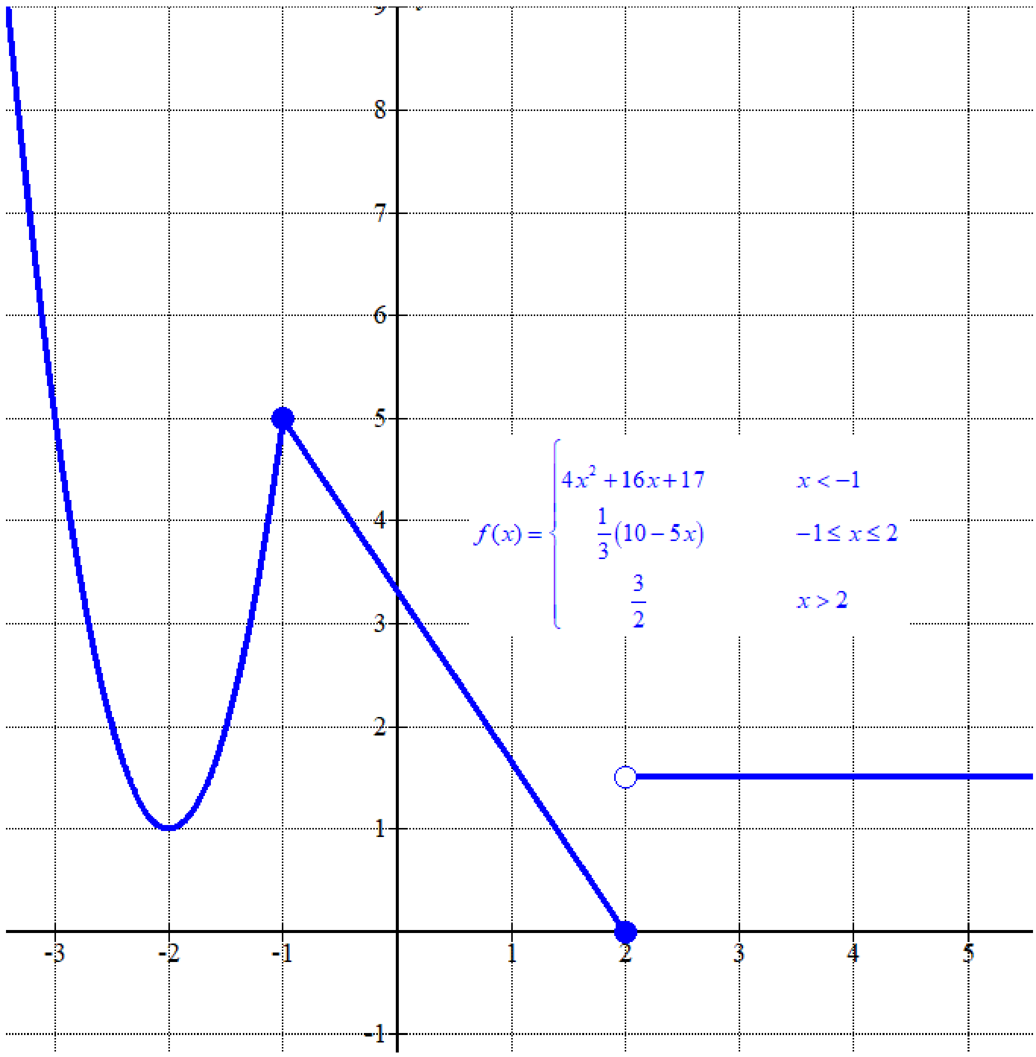
x	$y=4x^2+16x+17$
-1	5 (No se incluye)
-2	1
-3	5

Si $-1\le x\le 2$

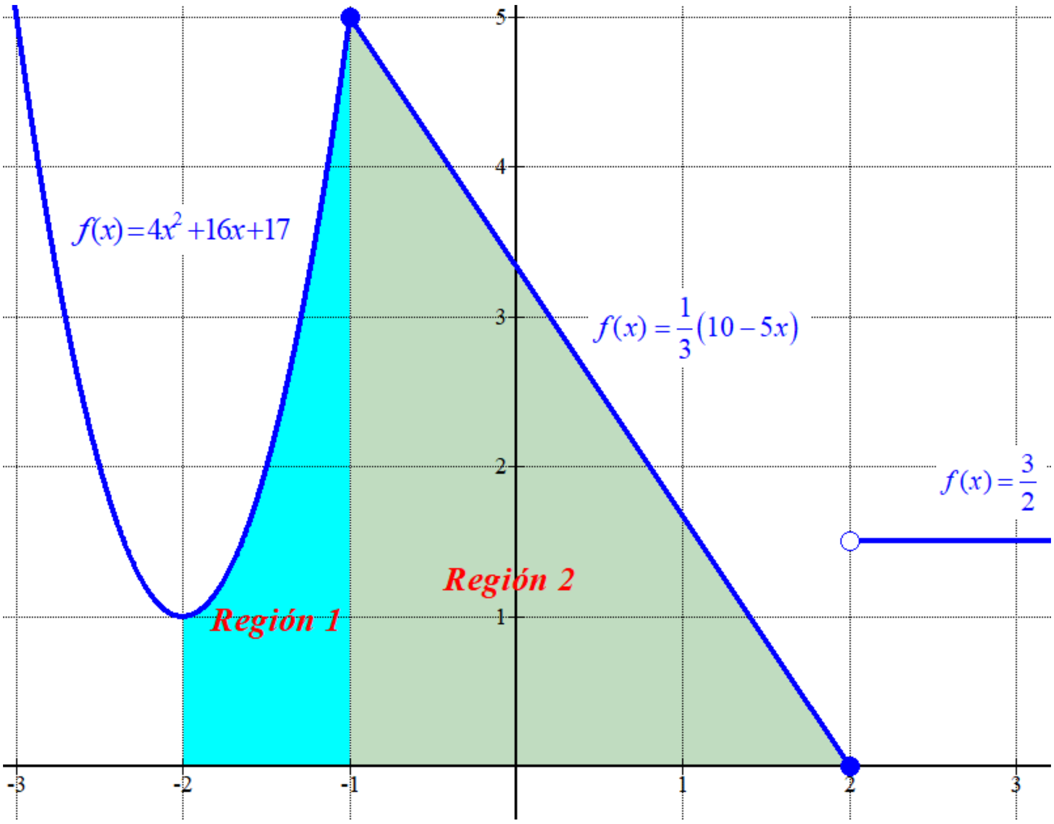
x	$y=\frac{1}{3}(10-5x)$
-1	5
0	$10/3$
2	0

Si $x>2$

x	$y=\frac{3}{2}$
2	$\frac{3}{2}$ (No se incluye)
3	$3/2$



b) Dibujamos la región de la cual queremos hallar el área.



Hallamos el área de la región 1.

$$Área\ región 1=\int_{-2}^{-1} 4x^2+16x+17dx=\left[4\frac{x^3}{3}+8x^2+17x\right]_{-2}^{-1}=$$

$$=\left[4\frac{(-1)^3}{3}+8(-1)^2+17(-1)\right]-\left[4\frac{(-2)^3}{3}+8(-2)^2+17(-2)\right]=$$

$$=-\frac{4}{3}+8-17+\frac{32}{3}-32+34=\boxed{\frac{7}{3}u^2}$$

Hallamos el área de la región 2.

$$Área\ región\ 2=\int_{-1}^{2}\frac{1}{3}(10-5x)\,dx=\left[\frac{1}{3}\left(10x-5\frac{x^2}{2}\right)\right]_{-1}^{2}=$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(10\cdot 2-5\frac{2^2}{2}\right)\right]-\left[\frac{1}{3}\left(10(-1)-5\frac{(-1)^2}{2}\right)\right]=\frac{1}{3}(20-10)-\frac{1}{3}\left(-10-\frac{5}{2}\right)=\boxed{\frac{15}{2}u^2}$$

Esta área también se puede hallar con la fórmula del área de un triángulo.

$$Área=\frac{Base\cdot Altura}{2}=\frac{3\cdot 5}{2}=\boxed{\frac{15}{2}u^2}$$

El área total es la suma de las dos áreas obtenidas: Área total $=\frac{7}{3}+\frac{15}{2}=\boxed{\frac{59}{6}\simeq 9.83\ u^2}$

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=3x^3-6x^2+5$

a) (**1.5 puntos**) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a f que sean paralelas a la recta de ecuación $y=-3x+1$.

b) (**1 punto**) Calcule la función F que verifique que $F'(x)=f(x)$ y $F(2)=4$.

a) Las rectas tangentes a f que sean paralelas a la recta de ecuación $y=-3x+1$ deben tener la misma pendiente, luego $m=-3$, por lo que debe cumplirse que $f'(x)=-3$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=3x^3-6x^2+5\to f'(x)=9x^2-12x \\ f'(x)=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow 9x^2-12x=-3\Rightarrow 9x^2-12x+3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2-4x+1=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-12}}{6}=\frac{4\pm 2}{6}=\begin{cases}\frac{4+2}{6}=\boxed{1=x}\\ \frac{4-2}{6}=\frac{2}{6}=\boxed{\frac{1}{3}=x}\end{cases}$$

Calculamos la recta tangente a *f* en *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} y-f(1)=f'(1)(x-1) \\ f(1)=3\cdot 1^3-6\cdot 1^2+5=2 \\ f'(1)=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow y-2=-3(x-1)\Rightarrow y=2-3x+3\Rightarrow\boxed{y=-3x+5}$$

Calculamos la recta tangente a *f* en $x=\frac{1}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} y-f\left(\frac{1}{3}\right)=f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) \\ f\left(\frac{1}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3-6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+5=\frac{1}{9}-\frac{6}{9}+5=\frac{40}{9} \\ f'\left(\frac{1}{3}\right)=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{40}{9}=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{40}{9}-3x+1\Rightarrow\boxed{y=-3x+\frac{49}{9}}$$

b) La función F que verifique que $F'(x)=f(x)$ es la integral de la función *f*.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int 3x^3-6x^2+5dx=3\frac{x^4}{4}-2x^3+5x+K$$

Además, la función F debe cumplir que $F(2)=4$. Sustituimos en la función obtenida y nos saldrá el valor de *K*.

$$\left.\begin{array}{r} F(x)=3\dfrac{x^4}{4}-2x^3+5x+K \\ F(2)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\frac{2^4}{4}-2\cdot 2^3+5\cdot 2+K=4 \Rightarrow 12-16+10+K-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K+2=0 \Rightarrow \boxed{K=-2}$$

La función F que verifica lo pedido es $F(x)=3\dfrac{x^4}{4}-2x^3+5x-2$

BLOQUE C

EJERCICIO 5

De los sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0.7 \qquad P(B) = 0.6 \qquad P(A \cup B) = 0.8$$

Calcule la probabilidad de que:

a) (**0.75 puntos**) Ocurra A y B.

b) (**0.75 puntos**) No ocurra ni A ni B.

c) (**0.5 puntos**) Ocurra A pero no B.

d) (**0.5 puntos**) Ocurra A sabiendo que no ha ocurrido B.

a) Nos piden calcular $P(A \cap B)$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A) = 0.7 \\ P(B) = 0.6 \\ P(A \cup B) = 0.8 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.8 = 0.7 + 0.6 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

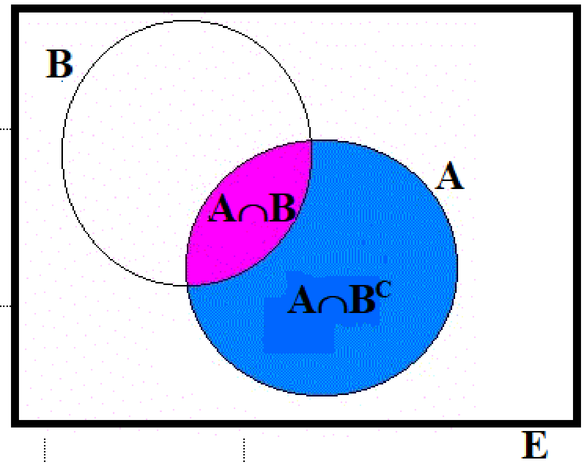
$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.8 = 0.5}$$

b) Nos piden calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. Utilizamos las leyes de Morgan.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 = \boxed{0.2}$$

c) Nos piden calcular $P(A \cap \overline{B})$.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \Rightarrow 0.7 = 0.5 + P(A \cap \overline{B}) \Rightarrow \boxed{P(A \cap \overline{B}) = 0.2}$$



d) Nos piden calcular $P(A / \overline{B})$. Es una probabilidad condicionada.

$$P(A / \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0.2}{1 - P(B)} = \frac{0.2}{1 - 0.6} = \boxed{0.5}$$

EJERCICIO 6

El porcentaje de conductores que consumen alcohol durante la madrugada del sábado es del 5%. La policía realiza controles de alcoholemia mediante un test del que se sabe que da positivo en un 96% si la persona ha bebido alcohol y en un 10% si la persona no ha bebido alcohol.

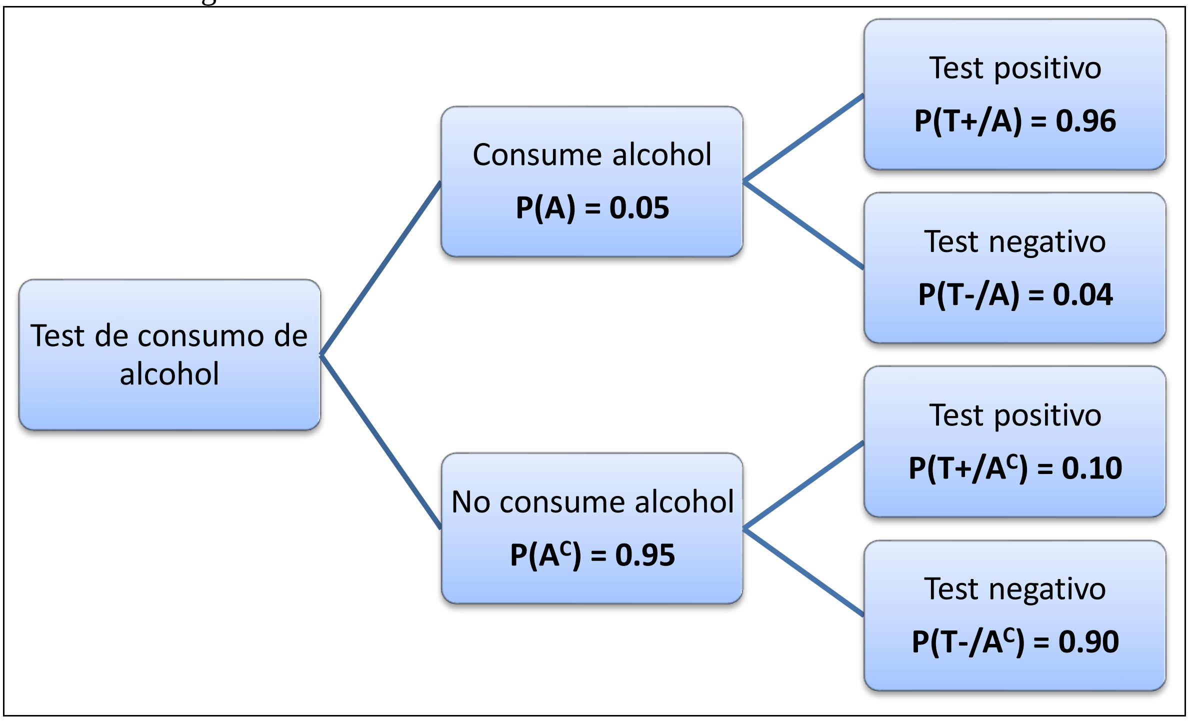
Elegido al azar un conductor en la madrugada del sábado y realizado este test de alcoholemia, halle la probabilidad de que:

a) (**1.25 puntos**) Si el test da positivo, el conductor haya consumido alcohol.

b) (**0.5 puntos**) El test dé negativo y el conductor no haya consumido alcohol.

c) (**0.75 puntos**) Si el test ha dado negativo, el conductor no haya consumido alcohol.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/T+)=\frac{P(A\cap T+)}{P(T+)}=\frac{P(A)P(T+/A)}{P(A)P(T+/A)+P(A^C)P(T+/A^C)}=$$

$$=\frac{0.05\cdot 0.96}{0.05\cdot 0.96+0.95\cdot 0.10}=\boxed{\frac{48}{143}\simeq 0.336}$$

b)

$$P(T-\cap A^C)=P(A^C)P(T-/A^C)=0.95\cdot 0.9=\boxed{0.855}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A^C/T-)=\frac{P(A^C\cap T-)}{P(T-)}=\frac{0.855}{P(A)P(T-/A)+P(A^C)P(T-/A^C)}=$$

$$=\frac{0.855}{0.05\cdot 0.04+0.95\cdot 0.90}=\boxed{\frac{855}{857}\simeq 0.998}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Un taller desea estimar el grado de satisfacción de sus clientes. Para ello, a 120 clientes seleccionados al azar, les pregunta si volverían a solicitar sus servicios en caso de necesitarlo, de los que 96 respondieron que sí lo harían.

a) (**1.25 puntos**) Determine, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de clientes de este taller que volverían a solicitar sus servicios.

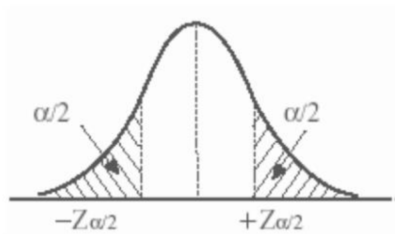
b) (**1.25 puntos**) Mediante una nueva muestra queremos estimar la proporción de clientes de ese taller que volverían a solicitar sus servicios con un error máximo del 5% y un nivel de confianza del 97%. Suponiendo que se mantiene la proporción muestral, ¿qué tamaño mínimo debe tener dicha muestra?

n = 120. $pr = \frac{96}{120} = 0.8$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.8 = 0.2$

a) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	[illegible]
1,8	[illegible]	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	[illegible]
1,9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{120}} = 0.07156$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.8 - 0.07156,\quad 0.8 + 0.07156) = (0.72844,\ 0.87156)$$

b) ¿n?

Con un nivel de confianza del 97% tenemos:

$$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	[illegible]
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	[illegible]
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	[illegible]
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	[illegible]
2,1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.05 = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{n}} = 0.05 \Rightarrow \frac{0.05}{2.17} = \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{n}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{0.05}{2.17}\right)^2 = \frac{0.16}{n} \Rightarrow n = \frac{0.16}{\left(\frac{0.05}{2.17}\right)^2} = 301.3696$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 302 clientes.

EJERCICIO 8

El consumo de energía eléctrica mensual por vivienda medido en kilovatios hora (kWh) sigue una distribución Normal con varianza 4225 $(kWh)^2$.

a) (**1 punto**) Se toma una muestra aleatoria de 100 viviendas, obteniéndose un consumo total de 26830 kWh. Calcule un intervalo de confianza al 92% para estimar el consumo medio poblacional.

b) (**1 punto**) Calcule el tamaño mínimo de la muestra necesario para estimar el consumo medio de energía eléctrica mensual por vivienda, con un error máximo de 5 kWh y con un nivel de confianza del 98%.

c) (**0.5 puntos**) Tras una campaña para incentivar el ahorro energético se toma una nueva muestra y el intervalo de confianza para el consumo medio que se obtiene es (224.08, 255.92). Calcule la media del consumo de energía eléctrica mensual por vivienda para dicha muestra.

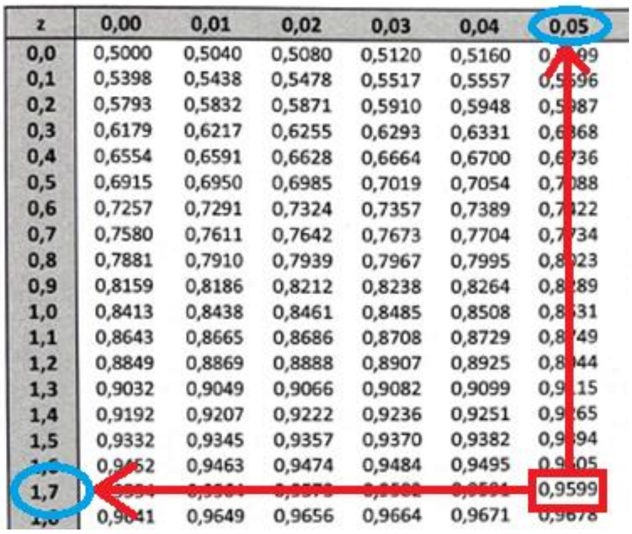
a) X = Consumo de energía mensual de una vivienda en kilovatios hora

Como la desviación típica es la raíz de la varianza tenemos que $\sigma = \sqrt{4225} = 65$

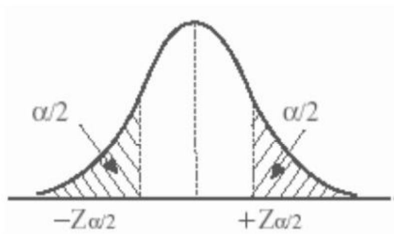
X = N(μ,65)

Con un nivel de confianza del 92%

$1 - \propto = 0{,}92 \rightarrow \propto = 0{,}08 \rightarrow \propto/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}75}$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5[illegible]99
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5[illegible]96
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5[illegible]87
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6[illegible]68
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6[illegible]36
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7[illegible]88
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7[illegible]22
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7[illegible]34
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8[illegible]23
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8[illegible]89
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8[illegible]31
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8[illegible]49
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8[illegible]44
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9[illegible]15
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9[illegible]65
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9[illegible]94
[illegible]	0,9[illegible]52	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9[illegible]05
1,7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9599
[illegible]	0,9[illegible]41	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	[illegible]



Tamaño de muestra n = 100. Media muestral $\bar{x} = \dfrac{26830}{100} = 268.3$ kWh

Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{65}{\sqrt{100}} = 11.375$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(268.3 - 11.375,\ 268.3 + 11.375\right) = \left(256.925,\ 279.375\right)$$

b) La media del consumo de energía eléctrica mensual por vivienda es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{224.08 + 255.92}{2} = 240$$

La media del consumo de energía eléctrica mensual por vivienda es 240 kWh.