PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan.** En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea *f* la función la función continua definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{\lambda x}-e^{x}-x}{x^2} & si\ x\neq 0 \\ \mu & si\ x=0 \end{cases}$

a) Calcula λ y μ. **(1,25 puntos)**

b) Para $\lambda=2$, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$. **(1,25 puntos)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^4-3x^2+2}{(x+2)^3}$, para $x\neq -2$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1,5 puntos)**

b) Calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$. **(1 punto)**

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula $\displaystyle\int \frac{2x^3+2x^2-2x+7}{x^2+x-2}\,dx$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=x^2$ y $g(x)=a|x|$, con *a* > *0*.

Determina el valor de *a* para que el área total de los recintos limitados por las gráficas de ambas funciones sea de 9 unidades cuadradas.

PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS

CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de α. **(1,25 puntos)**

b) Para $\alpha = 1$ resuelve el sistema y da una solución del mismo diferente de la solución trivial, si es posible. **(1,25 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el sistema:

$$\begin{cases} x - my - 2z = m \\ x + y + z = 2m \\ x + 2y + mz = 3m \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de *m*. **(1,75 puntos)**

b) Para $m = 1$ resuelve el sistema, si es posible. **(0,75 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Sea el plano $\pi \equiv 2x + y - 2z - 2 = 0$.

a) Halla las ecuaciones de los planos paralelos a π que distan 2 unidades de dicho plano. **(1,5 puntos)**

b) Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados. **(1 punto)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv x = 1 - y = z$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ 3x - y + z = -2 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de *r* y *s*. **(1,5 puntos)**

b) Calcula la ecuación del plano que contiene a *s* y es paralelo a *r*. **(1 punto)**

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea f la función continua definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{\lambda x}-e^x-x}{x^2} & si\ x\neq 0 \\ \mu & si\ x=0 \end{cases}$

a) Calcula λ y μ. **(1,25 puntos)**

b) Para $\lambda=2$, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$. **(1,25 puntos)**

a) La función debe ser continua en $x = 0$ y para ello debe cumplirse que $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\lambda x}-e^x-x}{x^2}=\frac{e^0-e^0-0}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\lambda e^{\lambda x}-e^x-1}{2x}=\frac{\lambda e^0-e^0-1}{2\cdot 0}=\frac{\lambda-1-1}{0}=\frac{\lambda-2}{0}=\ldots$$

Existen dos posibilidades: $\lambda-2=0$ o $\lambda-2\neq 0$.

Si $\lambda-2\neq 0$ entonces el límite anterior queda:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{\lambda-2}{0}=\infty$$

Pero entonces tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0} f(x)=\infty \\ f(0)=\mu \\ \lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \end{array}\right\}\Rightarrow \infty=\mu. \text{ Esto no es posible.}$$

Por lo que debe ser $\lambda-2=0\Rightarrow \boxed{\lambda=2}$. Y seguimos calculando el límite.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x-x}{x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^x-1}{2x}=\frac{2-1-1}{0}=\frac{0}{0}=$$

$$=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-e^x}{2}=\frac{4e^0-e^0}{2}=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}$$

El valor de λ es 2 y el límite vale 3/2.
Aplicamos la continuidad en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{3}{2} \\ f(0)=\mu \\ \lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{3}{2}=\mu$$

Los valores buscados son $\lambda = 2$ y $\mu = \dfrac{3}{2}$

b) Para $\lambda = 2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - e^x - x}{x^2} & si \ x \neq 0 \\ \mu & si \ x = 0 \end{cases}$. En el entorno de $x = 1$ la función es $f(x) = \dfrac{e^{2x} - e^x - x}{x^2}$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^x - x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\left(2e^{2x} - e^x - 1\right)x^2 - 2x\left(e^{2x} - e^x - x\right)}{x^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{\left(2e^2 - e^1 - 1\right)\cdot 1^2 - 2\left(e^2 - e^1 - 1\right)}{1^4} = \frac{\cancel{2e^2} - e - 1 - \cancel{2e^2} + 2e + 2}{1} = e + 1$$

$$\left.\begin{array}{r} f(1) = \dfrac{e^2 - e^1 - 1}{1^2} = e^2 - e - 1 \\ f'(1) = e + 1 \\ y - f(1) = f'(1)(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y - \left(e^2 - e - 1\right) = (e+1)(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = (e+1)x - e - 1 + e^2 - e - 1 \Rightarrow \boxed{y = (e+1)x + e^2 - 2e - 2}$$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^4-3x^2+2}{(x+2)^3}$, para $x\neq -2$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1,5 puntos)**
b) Calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$. **(1 punto)**

a) El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{2\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^4-3x^2+2}{(x+2)^3}=\frac{(-2)^4-3(-2)^2+2}{(-2+2)^3}=\frac{16-12+2}{0}=\frac{6}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+2}{(x+2)^3}=\{\text{Grado del denominador} < \text{grado del numerador}\}=\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^4-3x^2+2}{(x+2)^3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+2}{x(x+2)^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^4}{x^4}-3\dfrac{x^2}{x^4}+\dfrac{2}{x^4}}{\dfrac{x(x+2)^3}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}}{\dfrac{(x+2)^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}}{\left(\dfrac{x}{x}+\dfrac{2}{x}\right)^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}}{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^3}=\frac{1-0+0}{(1+0)^3}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+2}{(x+2)^3}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+2-x(x+2)^3}{(x+2)^3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+2-x\left(x^3+8+6x^2+12x\right)}{(x+2)^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^4}-3x^2+2-\cancel{x^4}-8x-6x^3-12x^2}{(x+2)^3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x^3-15x^2+2-8x}{(x+2)^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x^3}{x^3}=-6$$

La asíntota oblicua es $y=x-6$

b) La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es $y-f(0)=\dfrac{-1}{f'(0)}(x-0)$.

$$f(x)=\frac{x^4-3x^2+2}{(x+2)^3} \Rightarrow f'(x)=\frac{(4x^3-6x)(x+2)^3-3(x+2)^2(x^4-3x^2+2)}{(x+2)^6}$$

$$f'(0)=\frac{(4\cdot 0^3-6\cdot 0)(0+2)^3-3(0+2)^2(0^4-3\cdot 0^2+2)}{(0+2)^6}=\frac{-24}{64}=-\frac{3}{8}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{0^4-3\cdot 0^2+2}{(0+2)^3}=\dfrac{1}{4} \\ f'(0)=-\dfrac{3}{8} \\ y-f(0)=\dfrac{-1}{f'(0)}(x-0) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{1}{4}=\frac{-1}{-\frac{3}{8}}x \Rightarrow y-\frac{1}{4}=\frac{8}{3}x \Rightarrow \boxed{y=\frac{8}{3}x+\frac{1}{4}}$$

EJERCICIO 3 **(2.5 puntos)**

Calcula $\int \frac{2x^3+2x^2-2x+7}{x^2+x-2}dx$.

$$\int \frac{2x^3+2x^2-2x+7}{x^2+x-2}dx = \int \frac{2x^3+2x^2-4x}{x^2+x-2}+\frac{2x+7}{x^2+x-2}dx = \int \frac{2x\cancel{\left(x^2+x-2\right)}}{\cancel{x^2+x-2}}+\frac{2x+7}{x^2+x-2}dx =$$

$$= \int 2x+\frac{2x+7}{x^2+x-2}dx = x^2+\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx = \ldots$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{-1+3}{2}=1=x\\ \frac{-1-3}{2}=-2=x\end{cases} \Rightarrow x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

$$\frac{2x+7}{x^2+x-2}=\frac{2x+7}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} \Rightarrow \frac{2x+7}{(x-1)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+7=A(x+2)+B(x-1) \Rightarrow \begin{cases}x=-2 \to 3=-3B \to B=-1\\ x=1 \to 9=3A \to A=3\end{cases} \Rightarrow \frac{7}{x^2+x-2}=\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

$$\ldots = x^2+\int \frac{3}{x-1}dx-\int \frac{1}{x+2}dx = x^2+3\int \frac{1}{x-1}dx-\int \frac{1}{x+2}dx = \boxed{x^2+3\ln|x-1|-\ln|x+2|+K}$$

EJERCICIO 4 **(2.5 puntos)**

Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=x^2$ y $g(x)=a|x|$, con $a>0$.

Determina el valor de a para que el área total de los recintos limitados por las gráficas de ambas funciones sea de 9 unidades cuadradas.

Hallo los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2 \\ g(x)=a|x| \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\}\Rightarrow x^2=a|x|\Rightarrow\begin{cases} x^2=ax\rightarrow x^2-ax=0\rightarrow x(x-a)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x-a=0\Rightarrow x=a\end{cases} \\ o \\ x^2=-ax\rightarrow x^2+ax=0\rightarrow x(x+a)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x+a=0\Rightarrow x=-a\end{cases}\end{cases}$$

Como a es positivo tenemos dos regiones: una entre $-a$ y 0 y otra entre 0 y a.
Calculamos el área de cada una de estas regiones.

$$Área\,región 1=\left|\int_{-a}^{0}x^2-(-ax)\,dx\right|=\left|\int_{-a}^{0}x^2+axdx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}+a\frac{x^2}{2}\right]_{-a}^{0}\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{0^3}{3}+a\frac{0^2}{2}\right]-\left[\frac{(-a)^3}{3}+a\frac{(-a)^2}{2}\right]\right|=\left|\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{2}\right|=\left|\frac{2a^3-3a^3}{6}\right|=\left|\frac{-a^3}{6}\right|=\frac{a^3}{6}$$

$$Área\,región 2=\left|\int_{0}^{a}x^2-axdx\right|=\left|\int_{0}^{a}x^2-axdx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-a\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{a}\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{a^3}{3}-a\frac{a^2}{2}\right]-\left[\frac{0^3}{3}-a\frac{0^2}{2}\right]\right|=\left|\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{2}\right|=\left|\frac{2a^3-3a^3}{6}\right|=\left|\frac{-a^3}{6}\right|=\frac{a^3}{6}$$

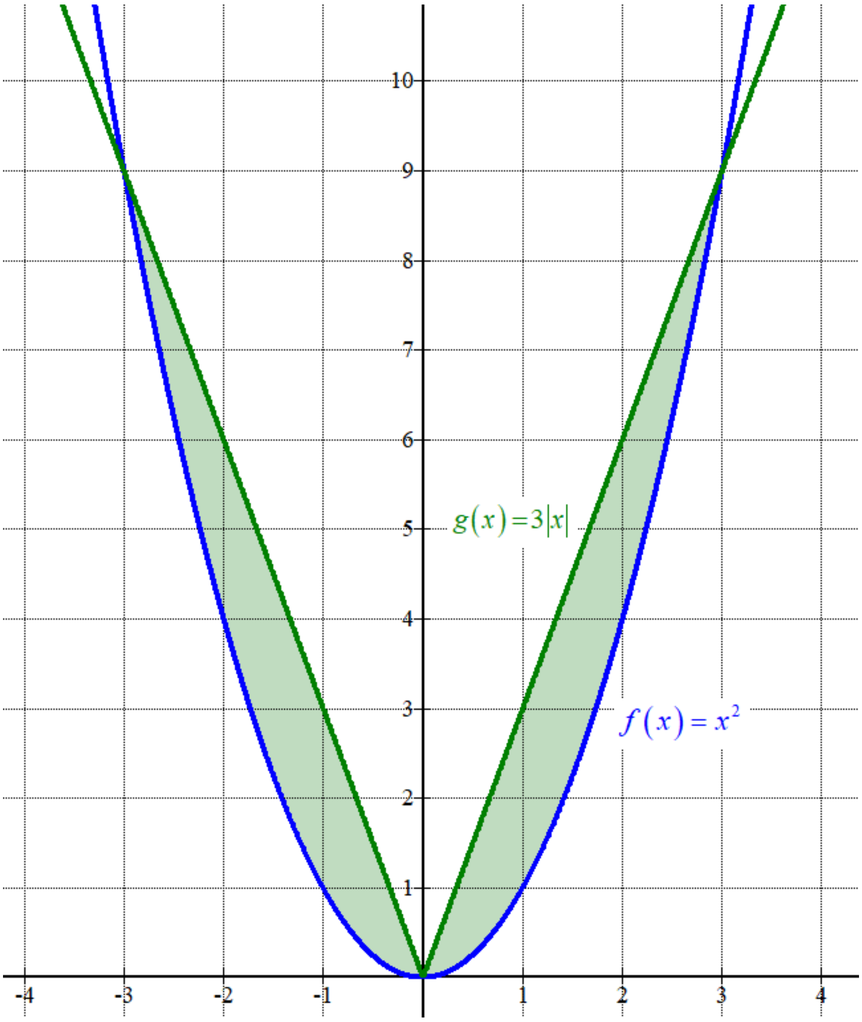
El área total es la suma de las dos áreas parciales.

$$\text{Área total }=\frac{a^3}{6}+\frac{a^3}{6}=\frac{2a^3}{6}=\boxed{\frac{a^3}{3}u^2}$$

El área total tiene un valor de $\frac{a^3}{3}u^2$.
Como buscamos que el área valga 9 obtenemos el valor de "a".

$$\frac{a^3}{3}=9\Rightarrow a^3=27\Rightarrow a=\sqrt[3]{27}=3$$

El valor buscado es $a=3$.



$g(x)=3|x|$
$f(x)=x^2$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)
Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de α. **(1,25 puntos)**
b) Para α = 1 resuelve el sistema y da una solución del mismo diferente de la solución trivial, si es posible. **(1,25 puntos)**

a) El sistema es $AX=0$, siendo A la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, X es la matriz de las incógnitas $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y 0 es la matriz columna nula $0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{vmatrix}=-\alpha^2+\alpha+0+\alpha-\alpha^2-0=-2\alpha^2+2\alpha$$

$$|A|=0\Rightarrow -2\alpha^2+2\alpha=0\Rightarrow 2\alpha(-\alpha+1)=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ -\alpha+1=0\rightarrow\alpha=1\end{cases}$$

CASO 1. Si $\alpha\neq 0$ y $\alpha\neq 1$

En este caso $|A|\neq 0$ y existe la inversa de A.

La solución del sistema $AX=0$ es $X=A^{-1}\cdot 0=0$. El sistema tiene solución única y dicha solución es la trivial $x=0;\ y=0;\ z=0$

CASO 2. $\alpha=0$

En este caso el determinante de A es nulo y el sistema no tiene solución única.
Resolvemos el sistema que nos queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix} y+z=0 \\ -y+z=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix} y+z=0 \\ z=y\end{matrix}\right\}\Rightarrow y+y=0\Rightarrow 2y=0\Rightarrow\boxed{y=0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{z=0}\Rightarrow \text{Solución:}\, x=t, y=z=0$$

El sistema tiene infinitas soluciones: $x=t, y=z=0$.

CASO 3. $\alpha=1$

En este caso el determinante de A es nulo y el sistema no tiene solución única.

Resolvemos el sistema que nos queda:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{matrix}x+y+z=0\\ x-y+z=0\\ x+z=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}x+y+z=0\\ x-y+z=0\\ x=-z\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}-z+y+z=0\\ -z-y+z=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}y=0\\ -y=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow y=0\Rightarrow \text{Soluciones:}\, x=-t,\, y=0;\ z=t$$

El sistema tiene infinitas soluciones: $x=-t, y=0;\ z=t$.

Resumiendo: Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ el sistema tiene una única solución y si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones.

b) Para α = 1 ya hemos resuelto el sistema en el apartado anterior y sus soluciones son $x=-t, y=0;\ z=t$.
Una solución distinta de la trivial se obtiene dando a *t* un valor distinto de cero. Por ejemplo tomamos *t = 1* y una solución no trivial es $x=-1, y=0;\ z=1$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)
Considera el sistema:

$$\begin{cases} x - my - 2z = m \\ x + y + z = 2m \\ x + 2y + mz = 3m \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m. **(1,75 puntos)**
b) Para $m = 1$ resuelve el sistema, si es posible. **(0,75 puntos)**

a) La matriz de coeficientes A y la matriz ampliada A/B asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -m & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix} \qquad A/B = \begin{pmatrix} 1 & -m & -2 & m \\ 1 & 1 & 1 & 2m \\ 1 & 2 & m & 3m \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = m - m - 4 + 2 + m^2 - 2 = m^2 - 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Existen tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. Si $m \neq 2 \ y \ m \neq -2$

En este caso $|A| \neq 0$ y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

CASO 2. Si $m = 2$

En este caso $|A| = 0$ y el rango de A no es 3. Será 2 o 1.

Averiguamos el rango de A y el de A/B utilizando el método de Gauss para triangular.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{ Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 3 & 3 & 2 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{ Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 4 & 4 & 4 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - 4 \cdot \text{ Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & -12 & -12 & -8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & 4 \end{array}}^{A/B} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. El sistema no tiene solución.

CASO 3. Si $m=-2$

En este caso $|A|=0$ y el rango de A no es 3. Será 2 o 1.

Averiguamos el rango de A y el de A/B utilizando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{llll} \text{Fila } 2^a - & \text{Fila } 1^a & & \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & -1 & 3 & -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} \text{Fila } 3^a - & \text{Fila } 1^a & & \\ 1 & 2 & -2 & -6 \\ -1 & -2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \begin{matrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{matrix}}^{A/B} \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. El sistema no tiene solución.

b) Para *m* = *1* estamos en el caso 1 y el sistema tiene solución única.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y - 2z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{llll} \text{Ecuación } 2^a - & \text{Ecuación } 1^a & & \\ x & +y & +z & =2 \\ -x & +y & +2z & =-1 \\ \hline & 2y & +3z & =1 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} \text{Ecuación } 3^a - & \text{Ecuación } 1^a & & \\ x & +2y & +z & =3 \\ -x & +y & +2z & =-1 \\ \hline & 3y & +3z & =2 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x-y-2z=1 \\ 2y+3z=1 \\ 3y+3z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} 2\cdot\text{Ecuación } 3^a - & 3\cdot\text{Ecuación } 2^a & & \\ 6y & + & 6z & =4 \\ -6y & - & 9z & =-3 \\ \hline & & -3z & =1 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x-y-2z=1 \\ 2y+3z=1 \\ -3z=1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} x-y-2z=1 \\ 2y+3z=1 \\ \boxed{z=\frac{-1}{3}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x-y-2\left(\frac{-1}{3}\right)=1 \\ 2y+3\left(\frac{-1}{3}\right)=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x-y+\frac{2}{3}=1 \\ 2y-1=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x-y=1-\frac{2}{3} \\ 2y=2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=\dfrac{1}{3} \\ \boxed{y=1} \end{array}\right\} \Rightarrow x-1=\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}}$$

La solución del sistema es $x=\dfrac{4}{3};\ y=1;\ z=\dfrac{-1}{3}$

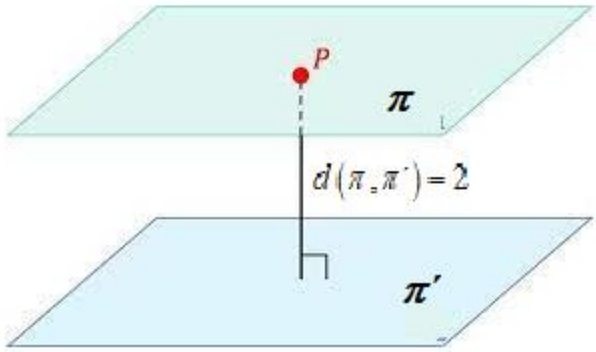
EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Sea el plano $\pi \equiv 2x+y-2z-2=0$.

a) Halla las ecuaciones de los planos paralelos a π que distan 2 unidades de dicho plano. **(1,5 puntos)**

b) Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados. **(1 punto)**

a) Un plano π' paralelo a $\pi \equiv 2x+y-2z-2=0$ tiene ecuación $\pi' \equiv 2x+y-2z+D=0$.
La distancia entre los planos es la distancia entre un punto P del plano π y el plano π´.

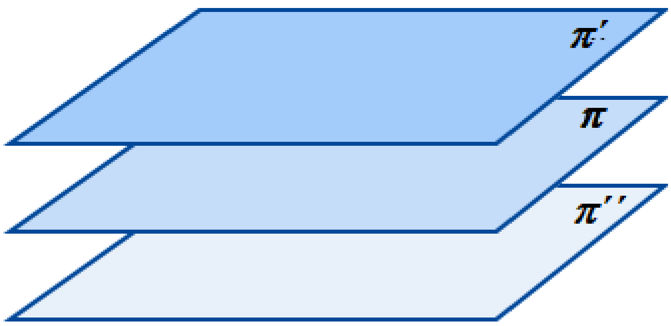


$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x+y-2z-2=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0+0-2z-2=0 \Rightarrow -2z=2 \Rightarrow z=\frac{2}{-2}=-1 \Rightarrow P(0,0,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv 2x+y-2z+D=0 \\ P(0,0,-1) \in \pi \\ d(\pi,\pi')=2 \end{array}\right\} \Rightarrow d(\pi,\pi')=d(P,\pi')=\frac{|0+0+2+D|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|2+D|}{\sqrt{9}}=2 \Rightarrow \frac{|2+D|}{3}=2 \Rightarrow |2+D|=6 \Rightarrow \begin{cases} 2+D=6 \Rightarrow D=4 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv 2x+y-2z+4=0} \\ 2+D=-6 \Rightarrow D=-8 \Rightarrow \boxed{\pi'' \equiv 2x+y-2z-8=0} \end{cases}$$

Existen dos planos que cumplen las condiciones pedidas: $\pi' \equiv 2x+y-2z+4=0$ y $\pi'' \equiv 2x+y-2z-8=0$.



b) Hallamos los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x+y-2z-2=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0+0-2z-2=0 \Rightarrow 2z=-2 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow A(0,0,-1)$$

$$\left.\begin{array}{r}\pi \equiv 2x+y-2z-2=0 \\ x=0 \\ z=0\end{array}\right\} \Rightarrow 0+y-2\cdot 0-2=0 \Rightarrow y-2=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow B(0,2,0)$$

$$\left.\begin{array}{r}\pi \equiv 2x+y-2z-2=0 \\ y=0 \\ z=0\end{array}\right\} \Rightarrow 2x+0-2\cdot 0-2=0 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow C(1,0,0)$$

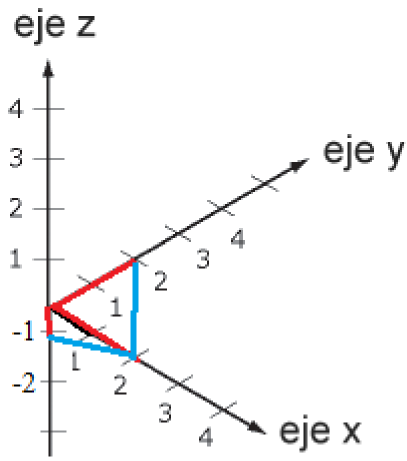
El tetraedro tiene vértices O(0, 0, 0), A(0,0,–1), B(0, 2, 0) y C(1, 0, 0).

El volumen de dicho tetraedro es la sexta parte del producto mixto de los vectores que unen el punto O con el resto de puntos (A, B y C).

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}=(0,0,-1)-(0,0,0)=(0,0,-1) \\ \overrightarrow{OB}=(0,2,0)-(0,0,0)=(0,2,0) \\ \overrightarrow{OC}=(1,0,0)-(0,0,0)=(1,0,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]=\begin{vmatrix}0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=2$$

$$Volumen\ OABC=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}u^3$$

El volumen del tetraedro es $\frac{1}{3}u^3$.



<u>EJERCICIO 8</u> (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv x = 1 - y = z$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ 3x - y + z = -2 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de r y s. **(1,5 puntos)**

b) Calcula la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r. **(1 punto)**

a) Obtenemos los vectores directores de las rectas.

$$r \equiv x = 1 - y = z \Rightarrow r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(0,1,0) \\ \vec{u_r} = (1,-1,1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ 3x - y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ z = -2 - 3x + y \end{cases} \Rightarrow x + y - 3(-2 - 3x + y) = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y + 6 + 9x - 3y = 4 \Rightarrow 10x - 2y = -2 \Rightarrow 5x - y = -1 \Rightarrow 5x + 1 = y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = -2 - 3x + 5x + 1 \Rightarrow z = -1 + 2x \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 5t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} Q_s(0,1,-1) \\ \vec{v_s} = (1,5,2) \end{cases}$$

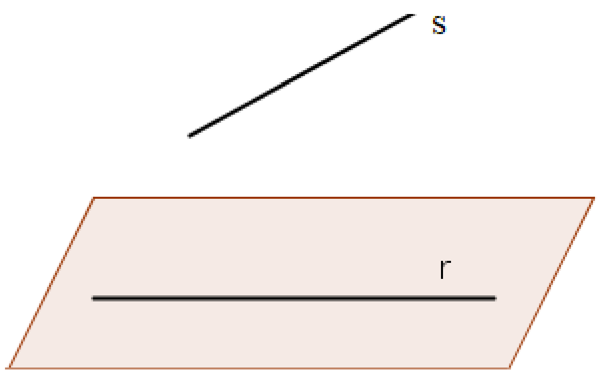
Los vectores directores $\vec{u_r} = (1,-1,1)$ y $\vec{v_s} = (1,5,2)$ no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u_r} = (1,-1,1) \\ \vec{v_s} = (1,5,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{5} \neq \frac{1}{2}$$

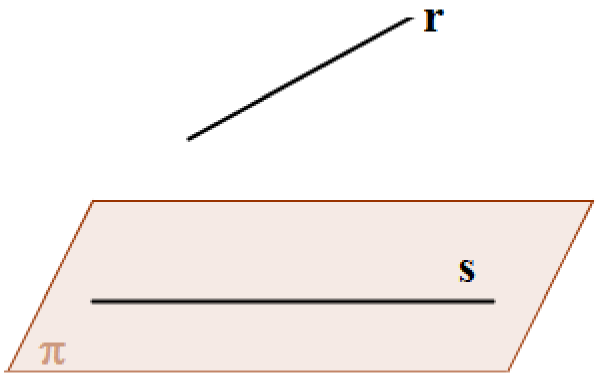
Averiguamos si se cortan o cruzan comprobando si el producto mixto $\left[\overrightarrow{P_rQ_s}, \vec{u_r}, \vec{v_s}\right]$ es nulo o no.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_rQ_s} = (0,1,-1) - (0,1,0) = (0,0,-1) \\ \vec{u_r} = (1,-1,1) \\ \vec{v_s} = (1,5,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{P_rQ_s}, \vec{u_r}, \vec{v_s}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -5 - 1 = -6 \neq 0$$

Las rectas r y s se cruzan.



b) Nos piden hallar la ecuación del plano π del dibujo.



Este plano tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene el punto *Qs* de la recta *s*.

$$\left.\begin{array}{l} Q_s(0,1,-1)\in\pi \\ \vec{u}=\vec{u}_r=(1,-1,1) \\ \vec{v}=\vec{v}_s=(1,5,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+y-\cancel{1}+5z+5+z+\cancel{1}-2y+2-5x=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv-7x-y+6z+7=0}$$

La ecuación del plano pedido es $\pi\equiv-7x-y+6z+7=0$.