PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea f la función continua definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\le 0 \\ \sqrt{ax+b} & si \quad 0<x\le 2 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} & si \quad 2<x \end{cases}$

a) Calcula a y b. **(1,25 puntos)**

b) Para $a=-1$ y $b=4$, estudia si existe la derivada de f en $x = 2$. En caso afirmativo, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto. **(1,25 puntos)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ln\left(x^2+1\right)$ (donde ln denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. **(1 punto)**

b) Determina los intervalos de convexidad y de concavidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica. **(1,5 puntos)**

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $F:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_0^x 2t\cos(t)\,dt$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de F. **(1 punto)**

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = \pi$. **(1,5 puntos)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\int_0^1 x\,arctg(x)\,dx$ (donde *arctg* denota la función arcotangente).

PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 **(2.5 puntos)**

Considera el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + mz = 3 \\ x + my - z = -1 \\ 3x + y - 3z = -m \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m. **(1,75 puntos)**

b) Para $m = -2$ encuentra, si es posible, y_0 para que la solución del sistema sea $x = \lambda,\ y = y_0,\ z = \lambda - \frac{3}{7}$. **(0,75 puntos)**

EJERCICIO 6 **(2.5 puntos)**

Dado $a \neq 0$, considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determina para qué valores de a se cumple que $A^{-1} = \frac{1}{4}A$. **(1,25 puntos)**

b) Para $a = 1$ calcula, si es posible, la matriz X tal que $AX = B^t$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B. **(1,25 puntos)**

EJERCICIO 7 **(2.5 puntos)**

Considera el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a r. **(1,25 puntos)**

b) Calcula la distancia entre r y π. **(1,25 puntos)**

EJERCICIO 8 **(2.5 puntos)**

Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 3 = 0$, $\pi_2 \equiv x + 2y - z + 5 = 0$ y la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{5}$.

a) Halla los puntos de r que equidistan de π_1 y π_2. **(2 puntos)**

b) Halla el seno del ángulo que forma el plano π_1 con la recta r. **(0,5 puntos)**

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea f la función continua definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\le 0 \\ \sqrt{ax+b} & si \quad 0<x\le 2 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} & si \quad 2<x \end{cases}$

a) Calcula *a* y *b*. **(1,25 puntos)**

b) Para $a=-1$ y $b=4$, estudia si existe la derivada de *f* en *x = 2*. En caso afirmativo, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en dicho punto. **(1,25 puntos)**

a) La función debe ser continua en *x = 0*. Debe cumplirse $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2+2=0^2+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{ax+b}=\sqrt{0+b}=\sqrt{b} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow 2=\sqrt{b} \Rightarrow \boxed{b=2^2=4}$$

La función queda $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\le 0 \\ \sqrt{ax+4} & si \quad 0<x\le 2 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} & si \quad 2<x \end{cases}$

La función debe ser continua en *x = 2*. Debe cumplirse $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{ax+4}=\sqrt{2a+4} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{-2}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2a+4}=\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a+4=2 \Rightarrow 2a=-2 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-2}{2}=-1}$$

Los valores buscados son $a=-1$ y $b=4$.

b) Para $a=-1$ y $b=4$ la función es continua y queda $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad x\le 0 \\ \sqrt{-x+4} & si \quad 0<x\le 2 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} & si \quad 2<x \end{cases}$.

Para que exista la derivada en $x = 2$ debe cumplirse que sean iguales las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-1}{2\sqrt{-x+4}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{-2+4}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \\ f'(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^+) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$$

La derivada en $x = 2$ existe y vale $f'(2) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2)(x-2)$.

$$\left.\begin{array}{l} y - f(2) = f'(2)(x-2) \\ f(2) = \sqrt{-2+4} = \sqrt{2} \\ f'(2) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow y - \sqrt{2} = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}(x-2) \Rightarrow y = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}x + \dfrac{2}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ln\left(x^2+1\right)$ (donde ln denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1 punto)**

b) Determina los intervalos de convexidad y de concavidad de *f* y los puntos de inflexión de su gráfica. **(1,5 puntos)**

a) Utilizamos la derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2x}{x^2+1}=0 \Rightarrow x=0$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 0$.

En $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{-2}{(-1)^2+1}=\dfrac{-2}{2}=-1<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.

En $(0,+\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{2}{1^2+1}=1>0$. La función crece en $(0,+\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,+\infty)$.

b) Utilizamos la derivada segunda.

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} f''(x)=\dfrac{2\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \\ f''(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-2x^2 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{1}=\pm 1}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes, entre y después de estos dos valores.

En $(-\infty,-1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada segunda vale $f''(-2)=\dfrac{2-2(-2)^2}{\left((-2)^2+1\right)^2}=\dfrac{-6}{25}<0$.

La función es cóncava (∩) en $(-\infty,-1)$.

En $(-1,+1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0)=\dfrac{2-2\cdot 0^2}{\left(0^2+1\right)^2}=2>0$. La función es convexa (∪) en $(-1,+1)$

En $(+1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale $f''(2)=\frac{2-2\cdot 2^2}{\left(2^2+1\right)^2}=\frac{-6}{25}<0$. La función es cóncava (∩) en $(+1,+\infty)$.

Resumiendo: La función es cóncava en $(-\infty,-1)\cup(+1,+\infty)$ y es convexa en $(-1,+1)$.
La función presenta dos puntos de inflexión: $x = -1$ y $x = +1$.

EJERCICIO 3 **(2.5 puntos)**

Considera la función $F:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_0^x 2t\cos(t)\,dt$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *F*. **(1 punto)**

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *F* en el punto de abscisa $x=\pi$. **(1,5 puntos)**

Calculamos la integral indefinida.

$$\int 2t\cos(t)\,dt=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=2t\to du=2dt\\ dv=\cos(t)\,dt\to v=\int\cos(t)\,dt=sen(t)\end{array}\right\}=$$

$$=2tsen(t)-\int sen(t)2dt=2tsen(t)-2(-\cos(t))=2tsen(t)+2\cos(t)+K$$

Obtenemos la expresión de la función *F*.

$$F(x)=\int_0^x 2t\cos(t)\,dt=\left[2tsen(t)+2\cos(t)\right]_0^x=$$

$$=\left[2xsen(x)+2\cos(x)\right]-\left[2\cdot 0\cdot sen(0)+2\cos(0)\right]=2xsen(x)+2\cos(x)-2$$

La función es $F(x)=2xsen(x)+2\cos(x)-2$.

a) Utilizamos la derivada.

$$\left.\begin{array}{r}F'(x)=2sen(x)+2x\cos(x)-2sen(x)=2x\cos(x)\\ F'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2x\cos(x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\boxed{x=0}\\ o\\ \cos(x)=0\to\boxed{x=\frac{\pi}{2}};\ \boxed{x=\frac{3\pi}{2}}\end{array}\right.$$

Se cumple que si $F(x)=\int_0^x 2t\cos(t)\,dt$ *entonces* $F'(x)=2x\cos(x)$

Tenemos tres puntos críticos en el dominio de definición $[0,2\pi]$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

En $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ tomamos $x=\frac{\pi}{4}$ y la derivada vale $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$. La función crece en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

En $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ tomamos $x=\pi$ y la derivada vale $F'(\pi)=2\pi\cos(\pi)=-2\pi<0$. La función decrece en $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

En $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ tomamos $x=\frac{7\pi}{4}$ y la derivada vale $F'\left(\frac{7\pi}{4}\right)=2\frac{7\pi}{4}\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)>0$. La función crece en $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

Resumiendo: La función F crece en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ y decrece en $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en $x = \pi$ es $y-F(\pi)=F'(\pi)(x-\pi)$.

$$\left.\begin{array}{l} y-F(\pi)=F'(\pi)(x-\pi) \\ F(\pi)=2\pi sen(\pi)+2\cos(\pi)-2=-2-2=-4 \\ F'(\pi)=2\pi\cos(\pi)=-2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow y-(-4)=-2\pi(x-\pi) \Rightarrow \boxed{y=-2\pi x+2\pi^2-4}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\int_0^1 x\,arctg(x)\,dx$ (donde *arctg* denota la función arcotangente).

Calculamos la integral indefinida.

$$\int x arctg(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = arctg(x) \rightarrow du = \frac{1}{x^2+1}dx \\ dv = xdx \rightarrow v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2}arctg(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}arctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctg(x) - \frac{1}{2}\left[\int \frac{x^2+1}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx\right] = \frac{x^2}{2}arctg(x) - \frac{1}{2}\left[\int dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx\right] =$$

$$= \frac{x^2}{2}arctg(x) - \frac{1}{2}\left[x - arctg(x)\right] = \frac{x^2}{2}arctg(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}arctg(x) + K$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_0^1 x\,arctg(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}arctg(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}arctg(x)\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1^2}{2}arctg(1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}arctg(1)\right] - \left[\frac{0^2}{2}arctg(0) - \frac{0}{2} + \frac{1}{2}arctg(0)\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\right] - \left[0 + \frac{1}{2}0\right] = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 **(2.5 puntos)**
Considera el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + mz = 3 \\ x + my - z = -1 \\ 3x + y - 3z = -m \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de *m*. **(1,75 puntos)**
b) Para *m* = *–2* encuentra, si es posible, y_0 para que la solución del sistema sea $x=\lambda,\ y=y_0,\ z=\lambda-\frac{3}{7}$. **(0,75 puntos)**

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & m \\ 1 & m & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & m & 3 \\ 1 & m & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -m \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & m \\ 1 & m & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-6m-9+m-3m^2+9+2=-3m^2-5m+2$$

$$|A|=0 \Rightarrow -3m^2-5m+2=0 \Rightarrow m=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2+24}}{-6}=\frac{5\pm 7}{-6}=\begin{cases} \frac{5+7}{-6}=\boxed{-2=m} \\ \frac{5-7}{-6}=\boxed{\frac{1}{3}=m} \end{cases}$$

CASO 1. $m\neq -2$ y $m\neq \frac{1}{3}$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, así como el de A/B e igual al número de incógnitas = 3, por lo que el sistema tiene una única solución.

CASO 2. $m=-2$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Triangulamos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}2&3&-2&3\\1&-2&-1&-1\\3&1&-3&2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3}^{\text{a}}-3\cdot\text{Fila 2}^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}3&1&-3&2\\-3&6&3&3\\\hline 0&7&0&5\end{array}\to\text{Nueva Fila 3}^{\text{a}}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 1}^{\text{a}}-2\cdot\text{Fila 2}^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}2&3&-2&3\\-2&4&2&2\\\hline 0&7&0&5\end{array}\to\text{Nueva Fila 2}^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&3&-2&3\\0&7&0&5\\0&7&0&5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3}^{\text{a}}-\text{Fila 2}^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}0&7&0&5\\0&-7&0&-5\\\hline 0&0&0&0\end{array}\to\text{Nueva Fila 3}^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix}2&3&-2\\0&7&0\\0&0&0\end{matrix}}_{A}\begin{matrix}3\\5\\0\end{matrix}}^{A/B}\right)$$

El rango de A = 2 = Rango de A/B < nº de incógnitas = 3

El sistema tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $m=\frac{1}{3}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}2&3&1/3&3\\1&1/3&-1&-1\\3&1&-3&-1/3\end{pmatrix}$. Triangulamos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}2&3&1/3&3\\1&1/3&-1&-1\\3&1&-3&-1/3\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3}^{\text{a}}-3\cdot\text{Fila 2}^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}3&1&-3&-1/3\\-3&-1&3&3\\\hline 0&0&0&8/3\end{array}\to\text{Nueva Fila 3}^{\text{a}}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 1}^{\text{a}}-2\cdot\text{Fila 2}^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}2&3&1/3&3\\-2&-2/3&2&2\\\hline 0&7/3&7/3&5\end{array}\to\text{Nueva Fila 2}^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix}2&3&1/3\\0&7/3&7/3\\0&0&0\end{matrix}}_{A}\begin{matrix}3\\5\\8/3\end{matrix}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Al ser los rangos distintos el sistema no tiene solución.

Resumiendo: Si $m\neq-2$ y $m\neq\frac{1}{3}$ el sistema tiene solución única, si $m=-2$ el sistema tiene infinitas soluciones y si $m=\frac{1}{3}$ el sistema no tiene solución.

b) Para $m = -2$ el sistema tiene infinitas soluciones.
Lo resolvemos a partir del sistema equivalente obtenido con el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y-2z=3 \\ 7y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y-2z=3 \\ \boxed{y=\frac{5}{7}} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+\frac{15}{7}-2z=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-2z=3-\frac{15}{7} \Rightarrow 2x-2z=\frac{6}{7} \Rightarrow x-z=\frac{3}{7} \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{7}+z}$$

Comprobamos lo pedido

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x=\frac{3}{7}+z \\ y=\frac{5}{7} \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=y_0 \\ z=\lambda-\frac{3}{7} \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda=\frac{3}{7}+z=\frac{3}{7}+\lambda-\frac{3}{7} \\ \frac{5}{7}=y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{5}{7}=y_0}$$

Existe la solución pedida siendo $y_0=\frac{5}{7}$

EJERCICIO 6 **(2.5 puntos)**

Dado $a \neq 0$, considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determina para qué valores de a se cumple que $A^{-1} = \frac{1}{4}A$. **(1,25 puntos)**

b) Para $a = 1$ calcula, si es posible, la matriz X tal que $AX = B^t$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B. **(1,25 puntos)**

a) Averiguamos para que valores de "a" existe la inversa de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -a - 3a = -4a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -4a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

La inversa de la matriz A existe para cualquier valor de $a \neq 0$.

Multiplicamos la igualdad $A^{-1} = \frac{1}{4}A$ por la matriz A y tenemos que debe cumplirse:

$$A^{-1}A = \frac{1}{4}AA \Rightarrow I = \frac{1}{4}A^2 \Rightarrow 4I = A^2 \Rightarrow 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+3a & -3a+3 \\ -a^2+a & 3a+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 = a^2+3a \\ 0 = -3a+3 \\ 0 = -a^2+a \\ 4 = 3a+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 = a^2+3a \\ -3 = -3a \\ 0 = -a^2+a \\ 3 = 3a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 = a^2+3a \\ \boxed{1 = a} \\ 0 = -a^2+a \\ 1 = a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 = 1^2+3 \\ 0 = -1^2+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{¡Se cumplen todas las ecuaciones!}$$

El valor buscado es $a = 1$.

b) Para $a = 1$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Despejamos X en la ecuación $AX = B^t$.

$$AX = B^t \Rightarrow X = A^{-1}B^t$$

Obtenemos la expresión de la inversa de A y de la traspuesta de B.

$$A^{-1}=\frac{1}{4}A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

Sustituimos y obtenemos X.

$$X=A^{-1}B^t=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1-3 & -3+12 & -1+6\\ 1-1 & 3+4 & 1+2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4 & 9 & 5\\ 0 & 7 & 3\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{2\cdot\ 2}\times 3 \longrightarrow 2\times 3$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-1 & 9/4 & 5/4\\ 0 & 7/4 & 3/4\end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x+y+z=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=0 \end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a *r*. **(1,25 puntos)**
b) Calcula la distancia entre *r* y π. **(1,25 puntos)**

Estudiemos la posición relativa de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y+z=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1) \\ r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \Rightarrow \vec{v_r}=(1,-1,0) \\ z=0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{v_r}=(1,-1,0)\cdot(1,1,1)=1-1=0$$

Al ser perpendiculares el vector normal del plano y el vector director de la recta la recta es paralela al plano, o bien la recta está contenida en el plano.

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \Rightarrow P_r(0,1,0) \\ z=0 \end{cases} \\ \pi \equiv x+y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0+1+0 \neq 0$$

El plano no contiene al punto *Pr*, por lo que la recta no está contenida en el plano y son paralelos y por tanto existe el plano que se pide.

a) El plano π´ perpendicular a π que contiene a *r* tiene como vectores directores el vector normal del plano y el vector director de la recta, y además contiene un punto de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \Rightarrow \\ z=0 \end{cases} \left.\begin{array}{l} P_r(0,1,0) \\ \vec{v_r}=(1,-1,0) \end{array}\right\} \\ \pi \equiv x+y+z=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+z+z-y+1=0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv -x-y+2z+1=0}$$

b) La recta *r* y el plano **π** son paralelos por lo que la distancia entre ellos es la distancia entre un punto de la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y+z=0 \\ P_r(0,1,0) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|0+1+0|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ u$$

La distancia es $d(r,\pi)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ u$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x+y+z-3=0$, $\pi_2 \equiv x+2y-z+5=0$ y la recta $r \equiv x-1=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{5}$.

a) Halla los puntos de *r* que equidistan de π_1 y π_2. **(2 puntos)**

b) Halla el seno del ángulo que forma el plano π_1 con la recta *r*. **(0,5 puntos)**

Estudiamos la posición relativa de los dos planos.
Comprobamos que sus vectores normales no son paralelos pues no tienen coordenadas proporcionales, por lo que no son planos paralelos (son secantes, coincidiendo en una recta).

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv 2x+y+z-3=0 \Rightarrow \vec{n_1}=(2,1,1) \\ \pi_2 \equiv x+2y-z+5=0 \Rightarrow \vec{n_2}=(1,2,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1}$$

a) Hallamos las coordenadas paramétricas de la recta *r*.

$$r \equiv x-1=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{5} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(1,0,-1) \\ \vec{v_r}=(1,2,5) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-1+5\lambda \end{cases}$$

Un punto *P* de la recta tiene coordenadas $P(1+\lambda, 2\lambda, -1+5\lambda)$. Calculamos la distancia del punto *P* a cada plano.

$$\left.\begin{array}{l} P(1+\lambda, 2\lambda, -1+5\lambda) \\ \pi_1 \equiv 2x+y+z-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi_1)=\frac{|2+2\lambda+2\lambda-1+5\lambda-3|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{|9\lambda-2|}{\sqrt{6}}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(1+\lambda, 2\lambda, -1+5\lambda) \\ \pi_2 \equiv x+2y-z+5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi_2)=\frac{|1+\lambda+4\lambda-(-1+5\lambda)+5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{6}}$$

Igualamos las distancias para que el punto equidiste de ambos planos.

$$d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2) \Rightarrow \frac{|9\lambda-2|}{\sqrt{6}}=\frac{7}{\sqrt{6}} \Rightarrow |9\lambda-2|=7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9\lambda-2=7 \Rightarrow 9\lambda=9 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \boxed{P(2,2,4)} \\ o \\ 9\lambda-2=-7 \Rightarrow 9\lambda=-5 \Rightarrow \lambda=\frac{-5}{9} \Rightarrow \boxed{P'\left(\frac{4}{9},\frac{-10}{9},\frac{-34}{9}\right)} \end{cases}$$

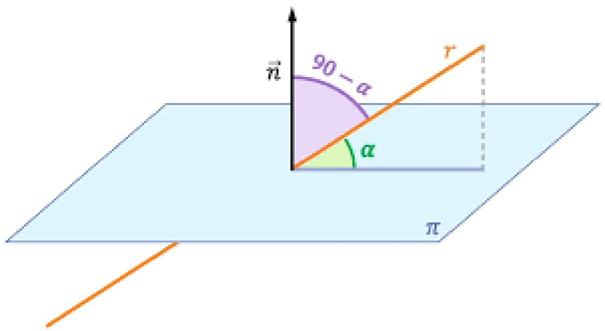
Los dos puntos de la recta *r* que equidista de los dos planos son $P(2,2,4)$ y $P'\left(\frac{4}{9},\frac{-10}{9},\frac{-34}{9}\right)$.

b) Hallamos el coseno del ángulo que forman el vector normal del plano y el vector director de la recta. Utilizamos el producto escalar.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv 2x+y+z-3=0 \Rightarrow \vec{n}_1=(2,1,1) \\ r \equiv x-1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{5} \Rightarrow \vec{v}_r=(1,2,5) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\vec{n}_1,\vec{v}_r\right)=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{v}_r}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{v}_r\right|}=\frac{(2,1,1)(1,2,5)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+5^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\vec{n}_1,\vec{v}_r\right)=\frac{2+2+5}{\sqrt{6}\sqrt{30}}=\frac{9}{\sqrt{180}}=\frac{9}{\sqrt{9\cdot 4\cdot 5}}=\frac{9}{6\sqrt{5}}=\frac{3}{2\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen(r,\pi_1)=\cos\left(\vec{n}_1,\vec{v}_r\right)=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$



$$sen\alpha=\cos(90-\alpha)$$