PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
- **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
- **b)** Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)
- **c)** Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
- **d)** En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- **e)** Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- **f)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -a-1 \\ -1 & a & a+1 \\ 1 & -3 & -a \end{pmatrix}$$

donde a es un número real. Determine de manera justificada:

a) (**0.75 puntos**) Los valores de a para los que la matriz A tiene inversa.

b) (**0.75 puntos**) Las matrices A^2, A^3 y A^{2022} para $a = 4$.

c) (**1 punto**) La matriz X que verifica que $X\cdot A=I_3$ para $a = 3$.

EJERCICIO 2

(**2.5 puntos**) Una sastrería dispone de 70 m^2 de tela de lino y de 150 m^2 de tela de algodón. En la confección de un traje se emplea 1 m^2 de tela de lino y 3 m^2 de tela de algodón, y en un vestido se necesitan 2 m^2 de tela de cada tipo. Se obtienen 60 euros de beneficio por cada traje y 70 euros por cada vestido. Determine el número de trajes y vestidos que se deben confeccionar para obtener el máximo beneficio, así como dicho beneficio máximo.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} a(x+1)^2 & -3\le x\le 1 \\ \dfrac{bx^2}{2}+2 & 1< x\le 2 \end{cases}$$

con a y b números reales.

a) (**1.25 puntos**) Determine los valores de a y b para que f sea continua y derivable.

b) (**1.25 puntos**) Para $a = 1$ y $b = 2$, esboce la gráfica de la función f y calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$

a) (**1 punto**) Determine el dominio de la función y estudie su monotonía y curvatura.
b) (**1 punto**) Calcule las ecuaciones de las asíntotas de f si existen. Calcule los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas.
c) (**0.5 puntos**) Represente la gráfica de la función f.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

El 80% de los restaurantes de una localidad admite el pago con tarjeta de crédito, el 50% admite pagar mediante el móvil y el 10% no admite el pago con ninguno de estos métodos. Escogido al azar un restaurante de dicha localidad.
a) Calcule la probabilidad de que el restaurante admita
    i) (**1 punto**) alguno de estos dos medios de pago.
    ii) (**1 punto**) Pagar con móvil sabiendo que admite pagar con tarjeta de crédito.
b) (**0.5 puntos**) ¿Son independientes los sucesos "Pagar con tarjeta" y "Pagar con móvil"?

EJERCICIO 6

En una localidad se han vendido 1335 boletos de lotería en tres establecimientos A, B y C. En el establecimiento A se han vendido 1054 boletos, 99 en B y el resto en C. De los boletos premiados, 5 han sido vendidos en B y 13 en C. Sabemos que 95 de cada 100 boletos vendidos no han obtenido premio. Elegido un boleto al azar, se pide:
a) (**1.75 puntos**) ¿Cuál es el establecimiento que tiene una mayor probabilidad de haber vendido un boleto no premiado?
b) (**0.75 puntos**) ¿Cuál es la probabilidad de que un boleto no premiado haya sido vendido en el establecimiento A?

BLOQUE D

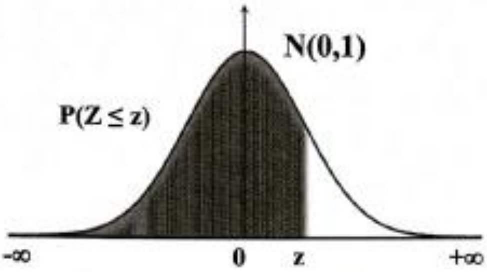
EJERCICIO 7

a) (**1.25 puntos**) Se divide una población en cuatro estratos de tamaño 60000, 20000, 24000 y 16000 personas. En dicha población se realiza un muestreo estratificado por afijación proporcional, seleccionándose 144 personas del tercer estrato. Determine el tamaño total de la muestra y su composición.
b) (**1.25 puntos**) Dada la población {1, 4, 7}, establezca todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y determinar la media y la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas estas muestras.

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de estudiantes de una universidad que proceden de otras provincias, para ello se selecciona una muestra de tamaño 2100 de los que 630 lo cumplen.
a) (**1.25 puntos**) Calcule un intervalo de confianza con un nivel del 97.5 % para estimar la proporción poblacional de estudiantes de esa universidad procedentes de otras provincias.
b) (**1.25 puntos**) En una nueva muestra que mantiene la misma proporción muestral, y con el mismo nivel de confianza, queremos que el error máximo cometido sea de 0.01. Halle su tamaño mínimo.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -a-1 \\ -1 & a & a+1 \\ 1 & -3 & -a \end{pmatrix}$$

donde a es un número real. Determine de manera justificada:

a) (**0.75 puntos**) Los valores de a para los que la matriz A tiene inversa.

b) (**0.75 puntos**) Las matrices A^2, A^3 y A^{2022} para $a = 4$.

c) (**1 punto**) La matriz X que verifica que $X\cdot A=I_3$ para $a = 3$.

a) La matriz tiene inversa si su determinante tiene un valor distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -a-1 \\ -1 & a & a+1 \\ 1 & -3 & -a \end{vmatrix}=-2a^2-3a-3-3a-3+a^2+a+3a+6a+6=-a^2+4a$$

$$|A|=0\Rightarrow -a^2+4a=0\Rightarrow -a(a-4)=0\Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ o \\ a-4=0\Rightarrow \boxed{a=4} \end{cases}$$

El determinante solo se anula para $a = 0$ y $a = 4$. La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de 0 y de 4.

b) Para $a = 4$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 4+3-5 & -6-12+15 & -10-15+20 \\ -2-4+5 & 3+16-15 & 5+20-20 \\ 2+3-4 & -3-12+12 & -5-15+16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}=A$$

$$A^3=A^2\cdot A=A\cdot A=A^2=A$$

Tenemos que $A^2=A$ y $A^3=A$. También se va a cumplir que cualquier potencia de A es igual a la matriz A, por lo que $A^{2022}=A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

c) Como hemos visto en el apartado a) para $a = 3$ la matriz A tiene inversa. Despejamos X de la ecuación matricial $X \cdot A = I_3$.

$$X \cdot A = I_3 \Rightarrow X = I_3 \cdot A^{-1} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A. Para $a = 3$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -3^2 + 4 \cdot 3 = 12 - 9 = 3$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación y obtenemos la expresión de X.

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

(**2.5 puntos**) Una sastrería dispone de 70 m^2 de tela de lino y de 150 m^2 de tela de algodón. En la confección de un traje se emplea 1 m^2 de tela de lino y 3 m^2 de tela de algodón, y en un vestido se necesitan 2 m^2 de tela de cada tipo. Se obtienen 60 euros de beneficio por cada traje y 70 euros por cada vestido. Determine el número de trajes y vestidos que se deben confeccionar para obtener el máximo beneficio, así como dicho beneficio máximo.

Llamamos x = número de trajes, y = número de vestidos.
La función a maximizar es el beneficio obtenido por las ventas que viene dado por la expresión $B(x,y)=60x+70y$

Realizamos una tabla con los datos.

	m^2 de lino	m^2 de algodón
Nº trajes (x)	x	3x
Nº vestidos (y)	2y	2y
TOTAL	$x+2y$	$3x+2y$

Las restricciones son:

"*Dispone de 70 m^2 de tela de lino y de 150 m^2 de tela de algodón*" → $x+2y\le 70;\ 3x+2y\le 150$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y\le 70 \\ 3x+2y\le 150 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+2y=70$

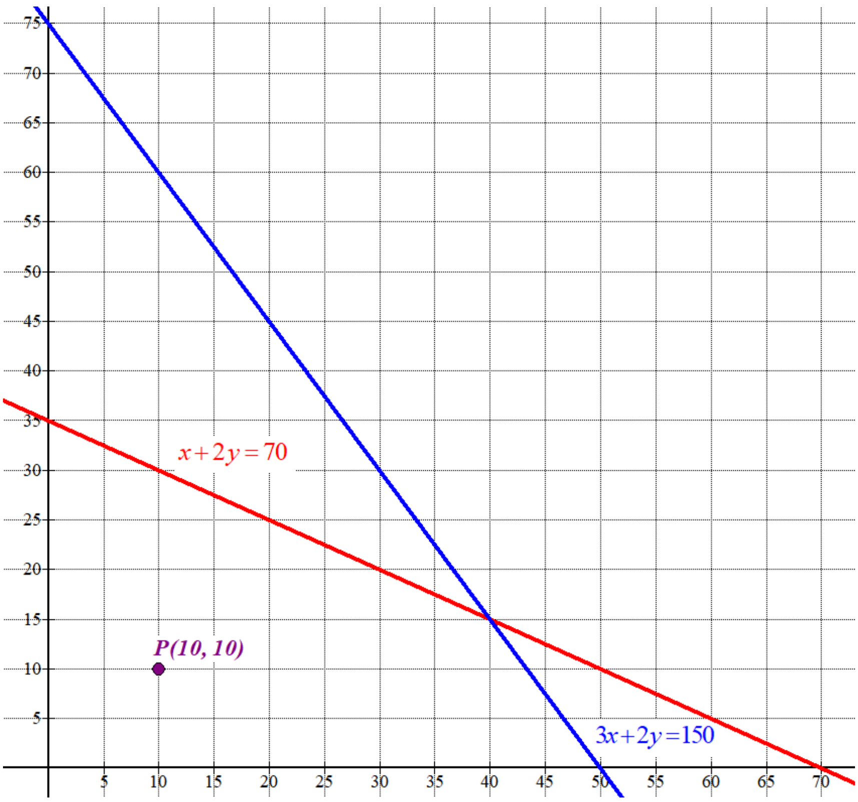
x	$y=\frac{70-x}{2}$
0	35
40	15
70	0

$3x+2y=150$

x	$y=\frac{150-3x}{2}$
0	75
40	15
50	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

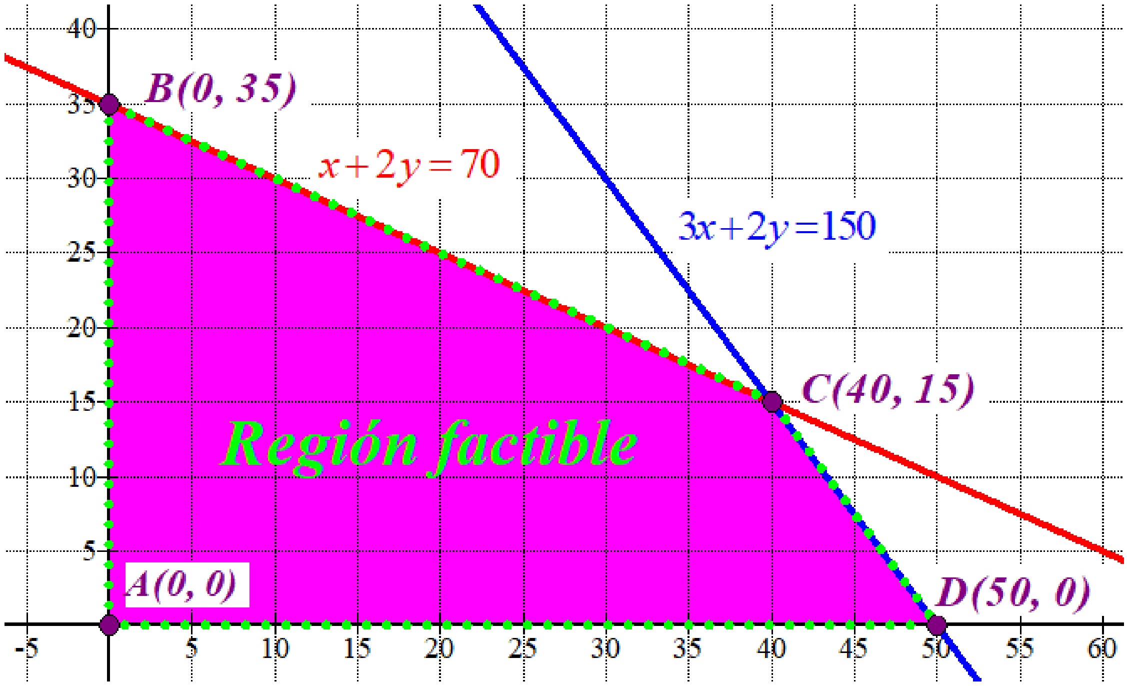


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+2y\leq 70 \\ 3x+2y\leq 150 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto *P(10, 10)* perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10+20\leq 70 \\ 30+20\leq 150 \\ 10\geq 0;\ 10\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función objetivo $B(x,y)=60x+70y$ en cada vértice.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 35) → $B(0,35)=0+70\cdot 35=2450€$

C(40, 15) → $B(40,15)=60\cdot 40+70\cdot 15=2400+1050=3450€$ ¡Máximo!

D(50, 0) → $B(50,0)=3000€$

El beneficio máximo es de 3450 € y se obtiene confeccionando y vendiendo 40 trajes y 15 vestidos.

.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} a(x+1)^2 & -3\le x\le 1 \\ \dfrac{bx^2}{2}+2 & 1<x\le 2 \end{cases}$$

con a y b números reales.

a) (**1.25 puntos**) Determine los valores de a y b para que f sea continua y derivable.

b) (**1.25 puntos**) Para $a = 1$ y $b = 2$, esboce la gráfica de la función f y calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.

a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = 1$ y para ello debe cumplirse que $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{bx^2}{2}+2=\dfrac{b}{2}+2 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} a(x+1)^2=a(2)^2=4a \\ f(1)=4a \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b}{2}+2=4a \Rightarrow b+4=8a \Rightarrow \boxed{b=8a-4}$$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$ y su derivada es $f'(x)=\begin{cases} 2a(x+1) & -3\le x<1 \\ bx & 1<x\le 2 \end{cases}$.

La función debe ser derivable en $x = 1$, por lo que las derivadas laterales deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} 2a(x+1)=4a \\ f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+} bx=b \\ f'(1^-)=f'(1^+) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{4a=b}$$

Juntamos las dos ecuaciones y resolvemos el sistema de ecuaciones que forman.

$$\left.\begin{array}{l} b=8a-4 \\ b=4a \end{array}\right\} \Rightarrow 8a-4=4a \Rightarrow 4a=4 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow \boxed{b=4}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = 4$.

b) Para $a = 1$ y $b = 2$ la función no es continua y tiene la expresión $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & -3\le x\le 1 \\ x^2+2 & 1<x\le 2 \end{cases}$.

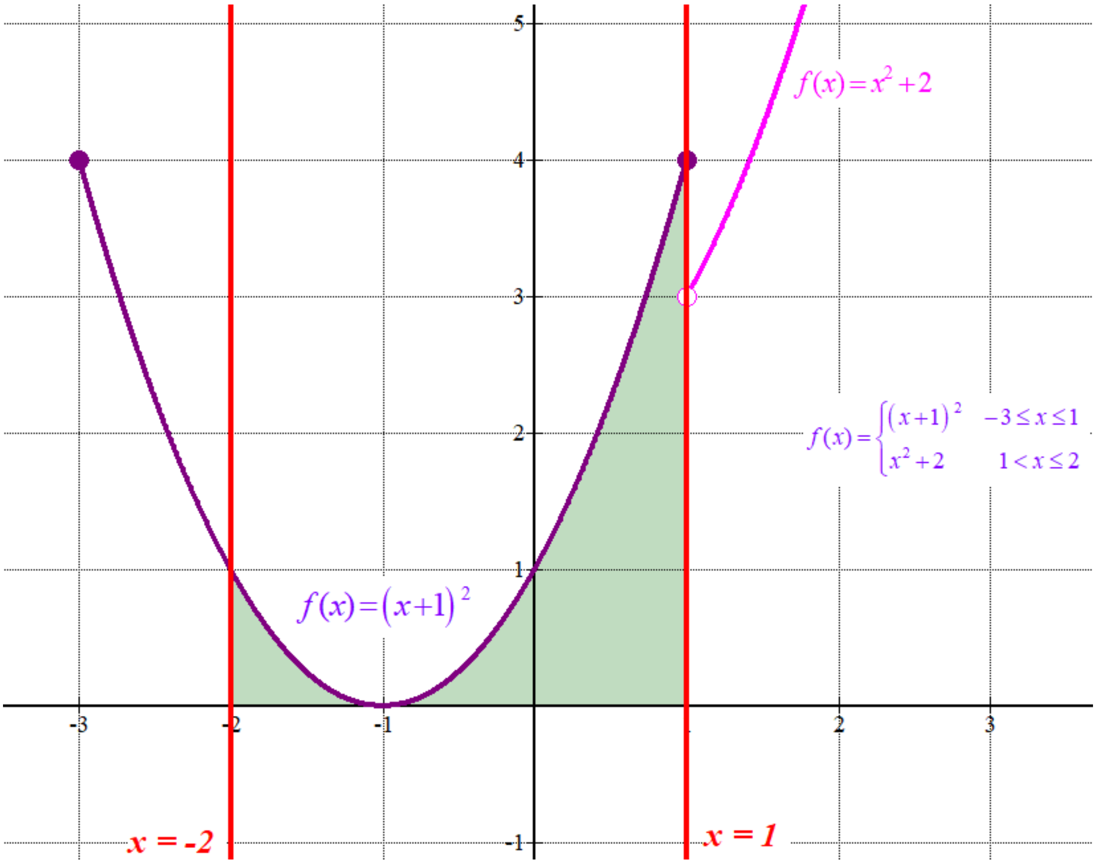
Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función y el recinto delimitado por el eje OX, la gráfica de f y las rectas verticales $x = -2$ y $x = 1$.

$-3\le x\le 1$

x	$y=(x+1)^2$
-2	1
-1	0
0	1
1	4

$1<x\le 2$

x	$y=x^2+2$
1	3 (No incluido)
1.5	4.25
2	11



Calculamos el área del recinto con la integral definida de la función entre $x = -2$ y $x = 1$.

$$Área = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} (x+1)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left[\frac{1}{3}(1+1)^3\right] - \left[\frac{1}{3}(-2+1)^3\right] = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{9}{3} = 3u^2}$$

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$

a) (**1 punto**) Determine el dominio de la función y estudie su monotonía y curvatura.
b) (**1 punto**) Calcule las ecuaciones de las asíntotas de f si existen. Calcule los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas.
c) (**0.5 puntos**) Represente la gráfica de la función f.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los valores que anulan el denominador, es decir, $\mathbb{R}-\{-2\}$.

Para estudiar la monotonía utilizo la derivada.

$$f'(x)=\frac{x+2-(x-3)}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x+3}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{5}{(x+2)^2}=0 \Rightarrow \text{No es posible.}$$

La derivada de la función nunca se anula y su valor siempre es positivo.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{5}{(x+2)^2} \\ 5>0 \\ (x+2)^2\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x)>0$$

La función es creciente en todo su dominio.

Para estudiar la curvatura utilizamos la derivada segunda.

$$f'(x)=\frac{5}{(x+2)^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{0(x+2)^2-5\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4}=\frac{-10x-20}{(x+2)^4}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{-10x-20}{(x+2)^4}=0 \Rightarrow -10x-20=0 \Rightarrow -10x=20 \Rightarrow \boxed{x=-2}$$

En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada segunda vale

$f''(-3)=\dfrac{-10(-3)-20}{(-3+2)^4}=10>0$. La función es convexa (∪) en $(-\infty,-2)$.

En el intervalo $(-2,+\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale

$f''(0)=\dfrac{-10(0)-20}{(0+2)^4}=\dfrac{-5}{4}<0$. La función es cóncava (∩) en $(-2,+\infty)$.

b) **Asíntota vertical**. $x=a$.
¿$x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x-3}{x+2} = \frac{-5}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$.

$$b = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x-3}{x+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$y = 1$ es asíntota horizontal.

Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

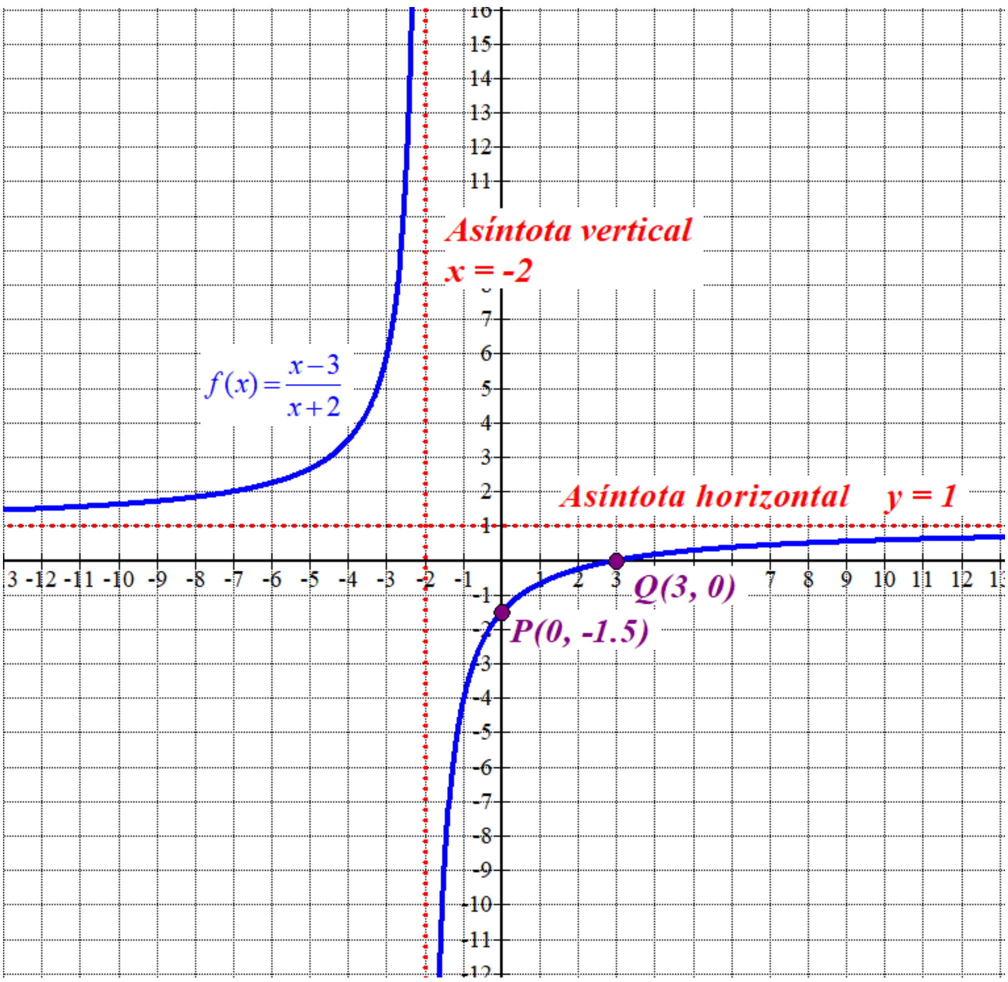
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x-3}{x+2} \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \frac{0-3}{0+2} = -1,5 \Rightarrow \boxed{P(0, -1.5)}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x-3}{x+2} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \frac{x-3}{x+2} \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \boxed{Q(3, 0)}$$

c)

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

x	y
-7	2
-3	6
-1	-4
0	-1.5
3	0



BLOQUE C

EJERCICIO 5

El 80% de los restaurantes de una localidad admite el pago con tarjeta de crédito, el 50% admite pagar mediante el móvil y el 10% no admite el pago con ninguno de estos métodos. Escogido al azar un restaurante de dicha localidad.

a) Calcule la probabilidad de que el restaurante admita

i) (**1 punto**) alguno de estos dos medios de pago.

ii) (**1 punto**) Pagar con móvil sabiendo que admite pagar con tarjeta de crédito.

b) (**0.5 puntos**) ¿Son independientes los sucesos "Pagar con tarjeta" y "Pagar con móvil"?

a) Realizamos una tabla de contingencia.

	Pago con móvil	No pago con móvil	
Pago con tarjeta			**80**
No pago con tarjeta		**10**	
	50		**100**

Completamos la tabla.

	Pago con móvil	No pago con móvil	
Pago con tarjeta	**40**	**40**	**80**
No pago con tarjeta	**10**	**10**	**20**
	50	**50**	**100**

Llamamos M = "Se puede pagar con Móvil" y T = "Se puede pagar con Tarjeta". Respondemos a las preguntas aplicando la regla de Laplace.

i) $P(M \cup T) = \frac{40+10+40}{100} = \boxed{0.9}$

ii) $P(M/T) = \frac{40}{80} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$

b) Para que sean independientes los sucesos M y T debe cumplirse que $P(M \cap T) = P(M)P(T)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(M \cap T) = \frac{40}{100} = 0.4 \\ P(M)P(T) = \frac{50}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{4000}{10000} = 0.4 \end{array} \right\} \Rightarrow P(M \cap T) = P(M)P(T)$$

Si son independientes los sucesos "Pagar con tarjeta" y "Pagar con móvil".

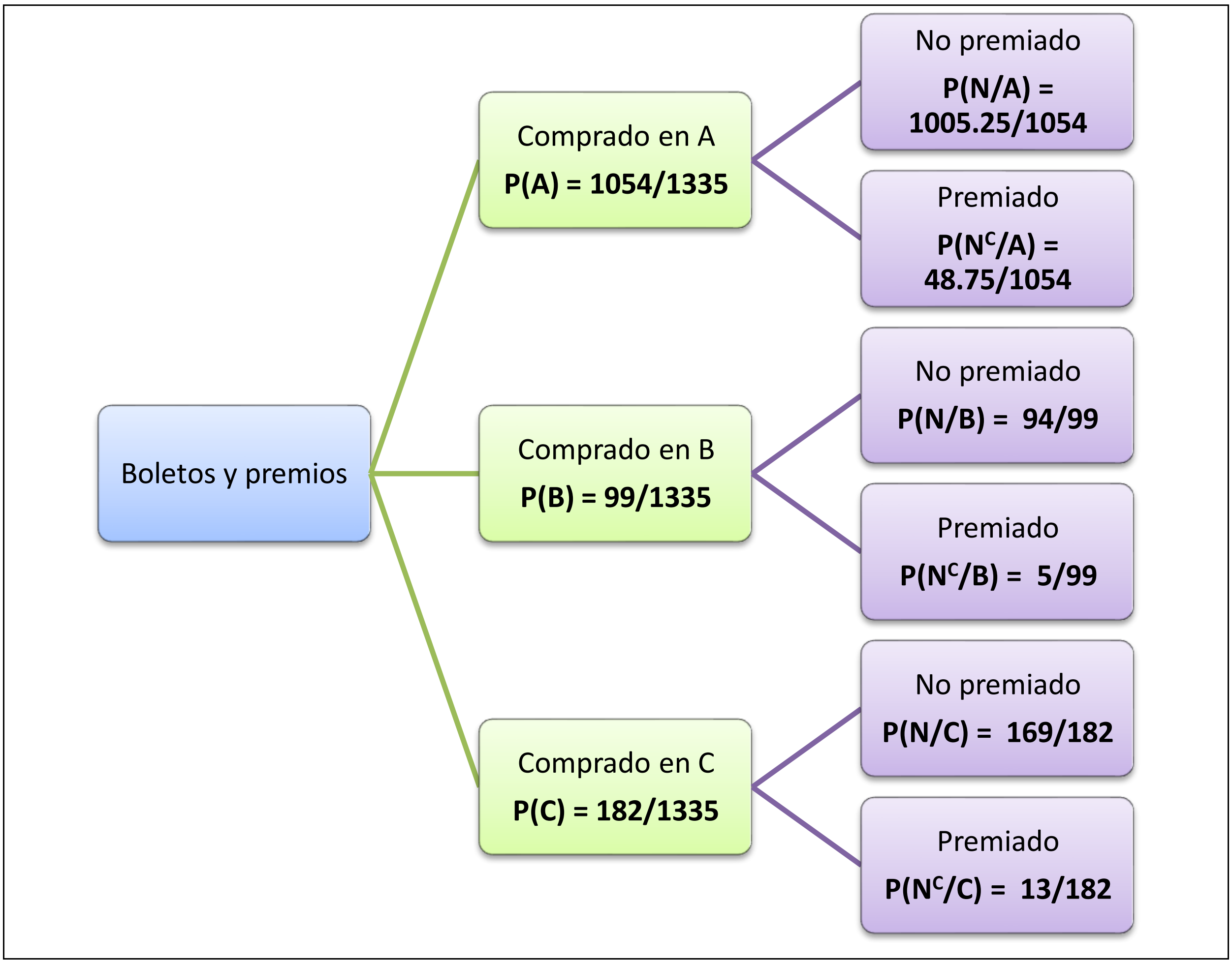
EJERCICIO 6

En una localidad se han vendido 1335 boletos de lotería en tres establecimientos A, B y C. En el establecimiento A se han vendido 1054 boletos, 99 en B y el resto en C. De los boletos premiados, 5 han sido vendidos en B y 13 en C. Sabemos que 95 de cada 100 boletos vendidos no han obtenido premio. Elegido un boleto al azar, se pide:

a) (**1.75 puntos**) ¿Cuál es el establecimiento que tiene una mayor probabilidad de haber vendido un boleto no premiado?

b) (**0.75 puntos**) ¿Cuál es la probabilidad de que un boleto no premiado haya sido vendido en el establecimiento A?

Llamamos A, B y C al suceso “boleto vendido en el establecimiento A, B o C” respectivamente.
Llamamos N al suceso “Boleto no premiado”
En el establecimiento C se han vendido 1335 – 99 – 1054 = 182 boletos.
Si el 5 % han recibido premio hay 1335 · 0.05 = 66.75 boletos premiados.
En el establecimiento A se han vendido 66.75 – 5 – 13 = 48.75 boletos premiados (sale decimal y no tiene sentido, pero los cálculos creo que son correctos). Habrán 1054 – 48.75 = 1005.25 boletos no premiados comprados en el establecimiento A.
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Calculamos la probabilidad de haber vendido el boleto no premiado en cada uno de los establecimientos.

$$P(A/N)=\frac{P(N\cap A)}{P(N)}=\frac{\frac{1005.25}{1335}}{0.95}=\boxed{\frac{4021}{5073}\approx 0.793}$$

$$P(B/N)=\frac{P(N\cap B)}{P(N)}=\frac{\frac{94}{1335}}{0.95}=\boxed{\frac{376}{5073}\approx 0.074}$$

$$P(C/N)=\frac{P(N\cap C)}{P(N)}=\frac{\frac{169}{1335}}{0.95}=\boxed{\frac{676}{5073}\approx 0.133}$$

Es más probable que haya sido comprado en el establecimiento A.

b) Esta probabilidad se ha calculado en el apartado a) y vale 0.793.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) (**1.25 puntos**) Se divide una población en cuatro estratos de tamaño 60000, 20000, 24000 y 16000 personas. En dicha población se realiza un muestreo estratificado por afijación proporcional, seleccionándose 144 personas del tercer estrato. Determine el tamaño total de la muestra y su composición.

b) (**1.25 puntos**) Dada la población {1,4,7}, establezca todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y determinar la media y la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas estas muestras.

a) Llamamos n al tamaño total de la muestra y n_1 al tamaño de la muestra en el estrato de 60000 personas, n_2 al tamaño de la muestra en el estrato de 20000 personas y n_4 al tamaño de la muestra en el estrato de 16000 personas.

$$\frac{n}{120000}=\frac{n_1}{60000}=\frac{n_2}{20000}=\frac{144}{24000}=\frac{n_4}{16000}$$

De esta expresión vamos separando por parejas y determinando el tamaño total de la muestra y el tamaño correspondiente a cada estrato.

$$\frac{n}{120000}=\frac{144}{24000}\Rightarrow n=\frac{144\cdot 120000}{24000}=720$$

$$\frac{n_1}{60000}=\frac{144}{24000}\Rightarrow n_1=\frac{144\cdot 60000}{24000}=360$$

$$\frac{n_2}{20000}=\frac{144}{24000}\Rightarrow n_2=\frac{144\cdot 20000}{24000}=120$$

$$\frac{144}{24000}=\frac{n_4}{16000}\Rightarrow n_4=\frac{144\cdot 16000}{24000}=96$$

El tamaño de la muestra total es de 720 personas. Del estrato 1 se eligen 360, del estrato 2 son 120 y del 4 son 96.

b) Las muestras posibles mediante muestreo aleatorio simple son:

M1 = {1,4} M2 = {1,7} y M3 = {4,7}

Las medias muestrales de cada una son:

$$\overline{x}_1=\frac{1+4}{2}=2.5\ ;\ \overline{x}_2=\frac{1+7}{2}=4\ ;\ \overline{x}_3=\frac{4+7}{2}=5.5$$

La media de las medias muestrales es $\overline{x}=\frac{\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3}{3}=\frac{2.5+4+5.5}{3}=4$

$$\text{Varianza}=\frac{\left(\overline{x}_1-\overline{x}\right)^2+\left(\overline{x}_2-\overline{x}\right)^2+\left(\overline{x}_3-\overline{x}\right)^2}{3}=\frac{(-1.5)^2+0^2+1.5^2}{3}=\frac{3}{2}$$

$$\boxed{\text{Desviación típica}=\sqrt{Varianza}=\sqrt{\frac{3}{2}}\simeq 1.225}$$

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de estudiantes de una universidad que proceden de otras provincias, para ello se selecciona una muestra de tamaño 2100 de los que 630 lo cumplen.

a) (**1.25 puntos**) Calcule un intervalo de confianza con un nivel del 97.5 % para estimar la proporción poblacional de estudiantes de esa universidad procedentes de otras provincias.

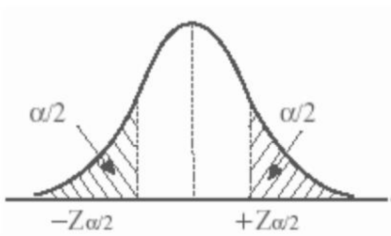
b) (**1.25 puntos**) En una nueva muestra que mantiene la misma proporción muestral, y con el mismo nivel de confianza, queremos que el error máximo cometido sea de 0.01. Halle su tamaño mínimo.

n = 2100. $pr = \frac{630}{2100} = 0.3$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.3 = 0.7$

a) Con un nivel de confianza del 97.5 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}975 \rightarrow \propto = 0{,}025 \rightarrow \propto/2 = 0'0125 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}9875 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.24}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	[illegible]
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	[illegible]
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	[illegible]
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	[illegible]
2,1	[illegible]	0,9826	0,9830	0,9834	[illegible]
2,2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0{,}9875}$
2,3	[illegible]	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.24 \cdot \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{2100}} = 0.0224$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.3 - 0.0224,\quad 0.3 + 0.0224) = (0.2776, 0.3224)$$

b) ¿n?

Con un nivel de confianza del 97.5 % tenemos $z_{\alpha/2} = \mathbf{2.24}$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.01 = 2.24 \cdot \sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{n}} \Rightarrow \frac{0.01}{2.24} = \sqrt{\frac{0.21}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.01}{2.24}\right)^2 = \frac{0.21}{n} \Rightarrow n = \frac{0.21}{\left(\frac{0.01}{2.24}\right)^2} = 10536.96$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 10537 estudiantes.