PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
- **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
- **b)** Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)
- **c)** Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
- **d)** En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- **e)** Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- **f)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x+2y\geq 7\ ;\ 2x-y\leq 4\ ;\ 4x-y\geq 1\ ;\ 3x+2y\leq 20$$

a) (**2 puntos**) Represente dicho recinto y calcule sus vértices.

b) (**0.5 puntos**) Obtenga el valor máximo de la función $F(x,y)=x+3y$ en el recinto anterior, así como el punto donde se alcanza.

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 8 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) (**0.75 puntos**) Determine los valores de a para que la matriz A sea no invertible.

b) (**1 punto**) Para $a = 5$, calcule la inversa de la matriz A.

c) (**0.75 puntos**) Para $a = 5$, resuelva la ecuación matricial $A\cdot X = B$.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Los ingresos (I) y costes (C) de una discoteca, en miles de euros, en función del número de horas diarias que permanece abierta, vienen dados por las funciones:

$$I(x)=x^3-x;\ C(x)=x^3-x^2+6,$$

respectivamente. Sabiendo que la licencia del ayuntamiento no permite que este tipo de local permanezca abierto más de 8 horas diarias, halle:

a) (**0.5 puntos**) La función beneficio en función del número de horas diarias que la discoteca permanece abierta.

b) (**0.5 puntos**) El número de horas que debe permanecer abierta para obtener beneficios.

c) (**0.75 puntos**) En qué momento se tienen las mayores pérdidas y a cuánto ascienden.

d) (**0.75 puntos**) El tiempo que debe permanecer abierta para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende.

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{4}{x+1} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) (**1 punto**) Calcule a y b para que la función f sea continua y derivable.
b) (**0.75 puntos**) Para $a=-1$ y $b=1$, realice un esbozo de la gráfica de la función f.
c) (**0.75 puntos**) Para $a=-1$ y $b=1$, halle el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de f, la recta $x=1$ y el eje OX.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Se ha llevado a cabo una encuesta en un centro educativo para saber qué actividades extraescolares se realizan por la tarde. El 80% de los encuestados practican deporte o estudian idiomas, el 35% realizan ambas actividades y el 60% no estudian idiomas.
a) Elegido un estudiante de ese centro al azar, calcule la probabilidad de que:
  i) (**0.75 puntos**) Practique deporte y no estudie idiomas.
  ii) (**0.5 puntos**) Estudie idiomas y no practique deporte.
  iii) (**0.5 puntos**) Haga solamente una de las dos actividades.
  iv) (**0.25 puntos**) No haga ninguna de las dos actividades.
b) (**0.5 puntos**) ¿Son independientes los sucesos "Practicar deporte" y "Estudiar idiomas"?

EJERCICIO 6

Del total de personas vacunadas en un país para prevenir una enfermedad, el 48% recibió la vacuna A, el 35% la vacuna B y el resto la vacuna C.
La efectividad de la vacuna A se sitúa en el 70%, la de B en el 95% y la de C en el 94%. Elegida al azar una persona vacunada,
a) (**1.25 puntos**) ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido vacunada con A y no le sea efectiva?
b) (**0.75 puntos**) ¿Qué probabilidad hay de que la vacuna le sea efectiva?
c) (**0.5 puntos**) Sabiendo que la vacuna no le ha sido efectiva, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido vacunada con C?

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Se desea estimar la proporción de jóvenes de una localidad que están suscritos a una determinada plataforma de televisión. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 100 jóvenes de los que 36 afirman estar suscritos a dicha plataforma.
a) (**1.5 puntos**) Determine un intervalo de confianza, con un nivel del 92%, para la proporción de jóvenes que están suscritos a esta plataforma.
b) (**1 punto**) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño muestral mínimo que se debería tomar si se quisiera que el error máximo fuera 0.025.

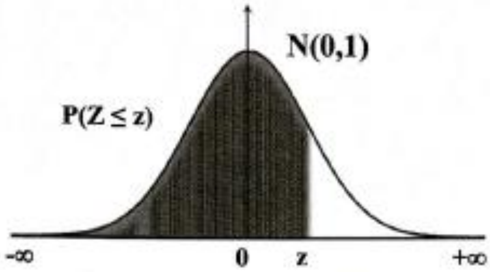
EJERCICIO 8

La vida útil de un determinado modelo de teléfono móvil (en meses) se distribuye según una ley Normal de varianza 9.61 meses^2. En una muestra de 10 teléfonos, la vida útil de los mismos ha sido:

30.6 30 31.3 29.7 32.3 32 32.8 31.5 31.2 30.5

a) (**1.5 puntos**) Determine un intervalo de confianza para estimar la vida útil de este modelo de teléfono móvil con un nivel de confianza del 97%.
b) (**1. punto**) Determine el tamaño mínimo muestral para que, con el mismo nivel de confianza, el error que se comete al estimar la duración media de la vida útil de este modelo de teléfono móvil sea inferior a 0.15 meses.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x+2y\geq 7\ ;\ 2x-y\leq 4\ ;\ 4x-y\geq 1\ ;\ 3x+2y\leq 20$$

a) (**2 puntos**) Represente dicho recinto y calcule sus vértices.

b) (**0.5 puntos**) Obtenga el valor máximo de la función $F(x,y)=x+3y$ en el recinto anterior, así como el punto donde se alcanza.

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+2y=7$

x	$y=\frac{7-x}{2}$
1	3
3	2
7	0

$2x-y=4$

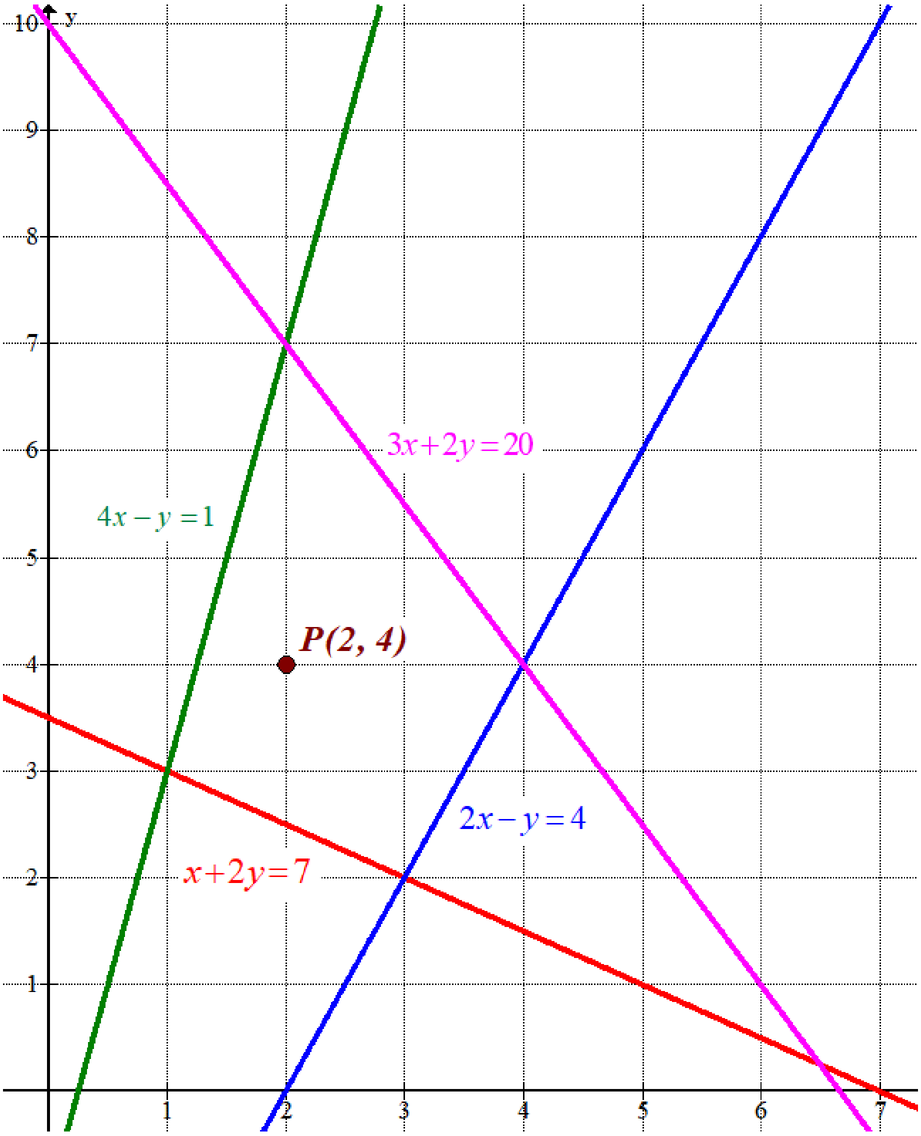
x	$y=2x-4$
2	0
3	2
4	4

$4x-y=1$

x	$y=4x-1$
1	3
2	7
3	11

$3x+2y=20$

x	$y=\frac{20-3x}{2}$
4	4
6	1
2	7

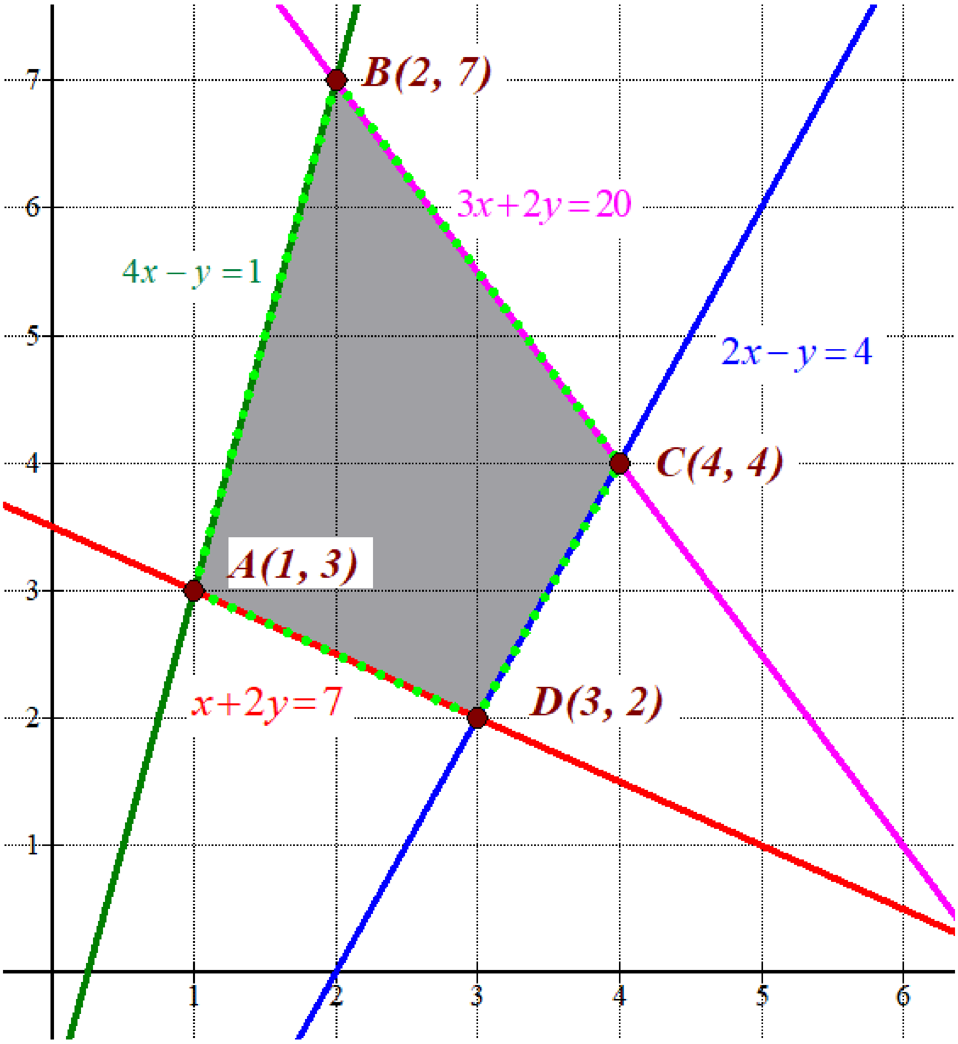


Como las restricciones son $x+2y\geq 7\ ;\ 2x-y\leq 4\ ;\ 4x-y\geq 1\ ;\ 3x+2y\leq 20$ la región factible es la región del plano que está por encima de las rectas roja y azul, y por debajo de las rectas rosa y verde.

Comprobamos que el punto *P(2, 4)* perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$2+2\cdot 4\geq 7\ ;\ 2\cdot 2-4\leq 4\ ;\ 4\cdot 2-4\geq 1\ ;\ 3\cdot 2+2\cdot 4\leq 20 \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



b) Valoramos la función objetivo $F(x,y) = x+3y$ en cada vértice.

A(1, 3) → $F(1,3) = 1+9 = 10$

B(2, 7) → $F(2,7) = 2+21 =$ 23 ¡Máximo!

C(4, 4) → $F(4,4) = 4+12 = 16$

D(3, 2) → $F(3,2) = 3+6 = 9$

El valor máximo de la función en el recinto es 23 y se obtiene en el punto *B(2, 7)*.

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 8 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) (**0.75 puntos**) Determine los valores de a para que la matriz A sea no invertible.
b) (**1 punto**) Para a = 5, calcule la inversa de la matriz A.
c) (**0.75 puntos**) Para a = 5, resuelva la ecuación matricial $A\cdot X=B$.

a) La matriz A es no invertible cuando su determinante es nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 8 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^3+0+0-0-16a-0=a^3-16a$$

$$|A|=0\Rightarrow a^3-16a=0\Rightarrow a\left(a^2-16\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{a=0} \\ o \\ a^2-16=0\to a^2=16\to\boxed{a=\sqrt{16}=\pm4}\end{cases}$$

La matriz A no es invertible cuando “a” vale 0, 4 o –4.

b) Para a = 5 la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\Rightarrow|A|=5^3-16\cdot5=45\neq0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}{45}=\frac{1}{45}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{45}\begin{pmatrix} 25 & -10 & 0 \\ -40 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5/9 & -2/9 & 0 \\ -8/9 & 5/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}}$$

c) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A\cdot X=B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

Sustituimos el valor de la inversa de A y el valor de B y obtenemos la expresión de X.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 25 & -10 & 0 \\ -40 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 25+20 \\ -40-50 \\ 90 \end{pmatrix} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 45 \\ -90 \\ 90 \end{pmatrix}$$

$$3\times \boxed{3 \quad \cdot \; 3} \times 1 \longrightarrow 3\times 1$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Los ingresos (I) y costes (C) de una discoteca, en miles de euros, en función del número de horas diarias que permanece abierta, vienen dados por las funciones:

$$I(x) = x^3 - x;\ C(x) = x^3 - x^2 + 6,$$

respectivamente. Sabiendo que la licencia del ayuntamiento no permite que este tipo de local permanezca abierto más de 8 horas diarias, halle:

a) (**0.5 puntos**) La función beneficio en función del número de horas diarias que la discoteca permanece abierta.

b) (**0.5 puntos**) El número de horas que debe permanecer abierta para obtener beneficios.

c) (**0.75 puntos**) En qué momento se tienen las mayores pérdidas y a cuánto ascienden.

d) (**0.75 puntos**) El tiempo que debe permanecer abierta para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende.

a) El beneficio *B(x)* es la diferencia entre los costes *C(x)* y los ingresos *I(x)*.

$$B(x) = I(x) - C(x) = x^3 - x - (x^3 - x^2 + 6) = \cancel{x^3} - x - \cancel{x^3} + x^2 - 6 = x^2 - x - 6$$

Siendo $0 \le x \le 8$.

b) Buscamos cuando los beneficios son nulos.

$$\left.\begin{array}{l} B(x) = x^2 - x - 6 \\ B(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1(-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \in [0,8] \\ \frac{1-5}{2} = -2 \notin [0,8] \end{cases}$$

El cambio de signo de la función beneficios se produce cuando la discoteca está abierta 3 horas.

Vemos si son positivos los beneficios antes o después de este valor.

$$B(x) = x^2 - x - 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow B(1) = 1^2 - 1 - 6 = -6 < 0 \\ x = 4 \rightarrow B(4) = 4^2 - 4 - 6 = 6 > 0 \end{cases}$$

Los beneficios son positivos a partir de las 3 primeras horas.

c) Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$\left.\begin{array}{l} B'(x) = 2x - 1 \\ B'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Comprobamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $[0, 0.5)$ tomamos $x = 0.25$ y la derivada vale $B'(0.25) = 0.5 - 1 = -0.5 < 0$. La función decrece en $[0, 0.5)$.

En el intervalo $(0.5, 8]$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $B'(1) = 2 - 1 = 1 > 0$. La función crece en $[0, 0.5)$.

La función beneficios presenta un mínimo relativo en $x = 0.5$.

Al cabo de la primera media hora se obtienen perdidas y serán las mayores posibles.
Estas pérdidas tienen un valor de $B(0.5)=0.5^2-0.5-6=-6.25$, es decir, unas pérdidas por un valor de 6250 €

d) Como la función obtiene beneficios a partir de la tercera hora y crecen los beneficios a partir de dicha hora se obtendrán los máximos beneficios al cabo de 8 horas.
El valor de esos beneficios es $B(8)=8^2-8-6=50$. Los beneficios máximos son de 50000 € y se obtienen al cabo de 8 horas de permanecer abierta la discoteca.

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{4}{x+1} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) (**1 punto**) Calcule a y b para que la función f sea continua y derivable.
b) (**0.75 puntos**) Para $a=-1$ y $b=1$, realice un esbozo de la gráfica de la función f.
c) (**0.75 puntos**) Para $a=-1$ y $b=1$, halle el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de f, la recta $x=1$ y el eje OX.

a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = 1$ y para ello debe cumplirse que $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{4}{2}=2 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} ax^2+bx+2=a+b+2 \\ f(1)=2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \end{array}\right\}\Rightarrow a+b+2=2\Rightarrow \boxed{a+b=0}$$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$ y su derivada es $f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & x\le 1 \\ \dfrac{-4}{(x+1)^2} & x>1 \end{cases}$.

La función debe ser derivable en $x = 1$, por lo que las derivadas laterales deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} 2ax+b=2a+b \\ f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{-4}{(x+1)^2}=\dfrac{-4}{4}=-1 \\ f'(1^-)=f'(1^+) \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{2a+b=-1}$$

Juntamos las dos ecuaciones y resolvemos el sistema de ecuaciones que forman.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ 2a+b=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-a \\ 2a+b=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow 2a-a=-1\Rightarrow \boxed{a=-1}\Rightarrow \boxed{b=1}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = 1$.

b) Para $a = -1$ y $b = 1$ la función es continua y tiene la expresión:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+x+2 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{4}{x+1} & si \quad x>1 \end{cases}.$$

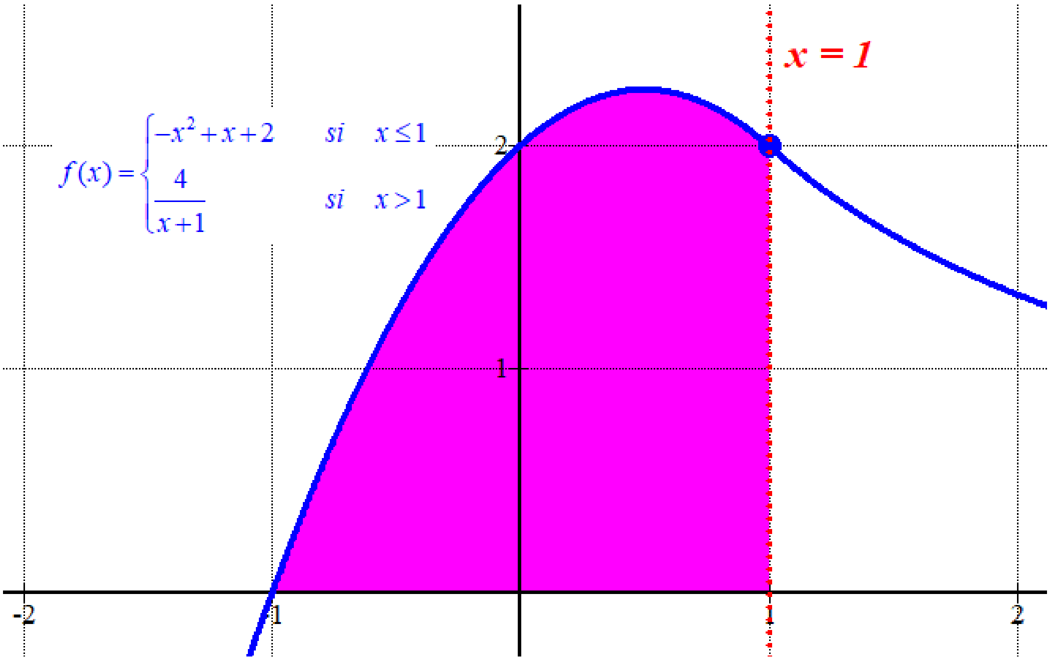
Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función y el recinto delimitado por el eje OX, la gráfica de f y la recta vertical $x = 1$.

$x \le 1$

x	$y = -x^2 + x + 2$
-2	-4
-1	0
0	2
1	2

$x > 1$

x	$y = \frac{4}{x+1}$
2	$4/3$
3	1
4	0.8



Calculamos el área del recinto con la integral definida de la función entre $x = -1$ y $x = 1$.

$$Área = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} -x^2 + x + 2dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left[-\frac{1}{3}1^3 + \frac{1}{2}1^2 + 2 \right] - \left[-\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{1}{2}(-1)^2 - 2 \right] = -\frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} + 2 - \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} + 2 = \boxed{\frac{10}{3} = 3.33u^2}$$

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Se ha llevado a cabo una encuesta en un centro educativo para saber qué actividades extraescolares se realizan por la tarde. El 80% de los encuestados practican deporte o estudian idiomas, el 35% realizan ambas actividades y el 60% no estudian idiomas.

a) Elegido un estudiante de ese centro al azar, calcule la probabilidad de que:

i) (**0.75 puntos**) Practique deporte y no estudie idiomas.

ii) (**0.5 puntos**) Estudie idiomas y no practique deporte.

iii) (**0.5 puntos**) Haga solamente una de las dos actividades.

iv) (**0.25 puntos**) No haga ninguna de las dos actividades.

b) (**0.5 puntos**) ¿Son independientes los sucesos "Practicar deporte" y "Estudiar idiomas"?

Llamamos D = "Practica deporte" e I = "Estudia idiomas"

Tenemos que $P(D\cup I)=0.80$, $P(D\cap I)=0.35$ y $P(I^C)=0.60$.

$$P(I)=1-P(I^C)=1-0.60=0.40$$

$$\left.\begin{array}{l} P(D\cup I)=P(D)+P(I)-P(D\cap I) \\ P(D\cup I)=0.80 \\ P(D\cap I)=0.35 \\ P(I)=0.40 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.80=P(D)+0.40-0.35 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(D)=0.80-0.40+0.35=0.75$$

Realizamos una tabla de contingencia.

	Estudia idiomas	No estudia idiomas	
Practica deporte	**35**		**75**
No practica deporte			
	40	**60**	**100**

Completamos la tabla.

	Estudia idiomas	No estudia idiomas	
Practica deporte	**35**	**40**	**75**
No practica deporte	**5**	**20**	**25**
	40	**60**	**100**

a)

i) $P(D\cap I^C)=\dfrac{40}{100}=\boxed{0.40}$

ii) $P(I\cap D^C)=\dfrac{5}{100}=\boxed{0.05}$

iii) $P\left((D\cap I^C)\cup(D^C\cap I)\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{Sucesos incompatibles}\\ (D\cap I^C)\cap(D^C\cap I)=\varnothing\end{array}\right\}=0.40+0.05=\boxed{0.45}$

Mirando en la tabla también podemos responder a la pregunta:

$$P\left(\left(D\cap I^{C}\right)\cup\left(D^{C}\cap I\right)\right)=\frac{40+5}{100}=\boxed{0.45}$$

iv) Mirando en la tabla tenemos que $P\left(D^{C}\cap I^{C}\right)=\frac{20}{100}=\boxed{0.20}$

También se pude calcular con las leyes de Morgan:

$$P\left(D^{C}\cap I^{C}\right)=P\left(\left(D\cup C\right)^{C}\right)=1-P\left(D\cup C\right)=1-0.8=\boxed{0.2}$$

b) Para que sean independientes los sucesos "Practicar deporte" y "Estudiar idiomas" debe cumplirse que $P\left(D\cap I\right)=P\left(D\right)\cdot P\left(I\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} P\left(D\cap I\right)=\frac{35}{100}=0.35 \\ P\left(D\right)=\frac{75}{100}=0.75 \\ P\left(I\right)=\frac{40}{100}=0.4 \end{array}\right\}\Rightarrow P\left(D\cap I\right)=0.35\neq 0.30=0.75\cdot 0.4=P\left(D\right)\cdot P\left(I\right)$$

Los sucesos no son independientes.

EJERCICIO 6

Del total de personas vacunadas en un país para prevenir una enfermedad, el 48% recibió la vacuna A, el 35% la vacuna B y el resto la vacuna C.

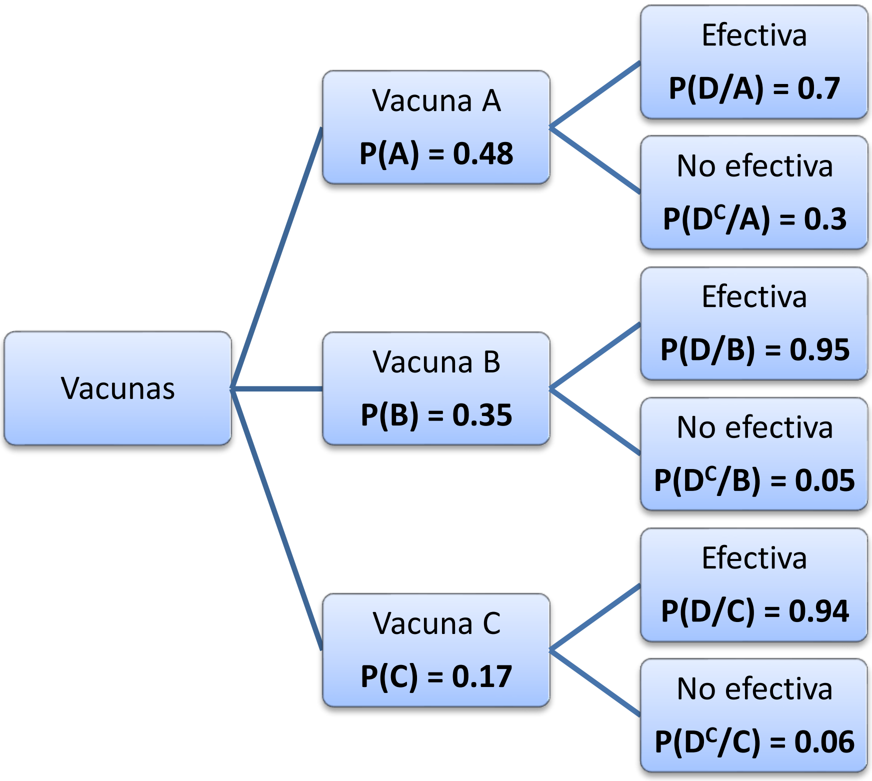
La efectividad de la vacuna A se sitúa en el 70%, la de B en el 95% y la de C en el 94%. Elegida al azar una persona vacunada,

a) (**1.25 puntos**) ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido vacunada con A y no le sea efectiva?

b) (**0.75 puntos**) ¿Qué probabilidad hay de que la vacuna le sea efectiva?

c) (**0.5 puntos**) Sabiendo que la vacuna no le ha sido efectiva, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido vacunada con C?

Llamamos A, B y C a los sucesos "ser vacunado con la vacuna A, B o C" respectivamente.
Llamamos D al suceso "La vacuna es efectiva"
Realizamos un diagrama de árbol.



a) $P(A \cap D^C) = P(A)P(D^C / A) = 0.48 \cdot 0.3 = \boxed{0.144}$

b)

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) =$$

$$= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= 0.48 \cdot 0.7 + 0.35 \cdot 0.95 + 0.17 \cdot 0.94 = \boxed{0.8283}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C / D^C) = \frac{P(C \cap D^C)}{P(D^C)} = \frac{P(C)P(D^C / C)}{1 - P(D)} = \frac{0.17 \cdot 0.06}{1 - 0.8283} = \boxed{\frac{6}{101} \simeq 0.059}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Se desea estimar la proporción de jóvenes de una localidad que están suscritos a una determinada plataforma de televisión. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 100 jóvenes de los que 36 afirman estar suscritos a dicha plataforma.

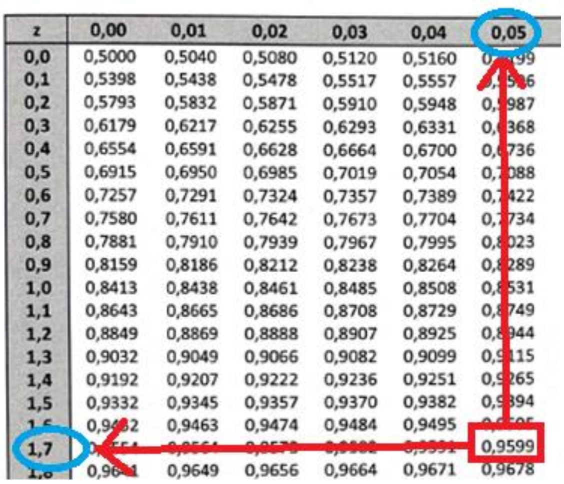
a) (**1.5 puntos**) Determine un intervalo de confianza, con un nivel del 92%, para la proporción de jóvenes que están suscritos a esta plataforma.

b) (**1 punto**) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño muestral mínimo que se debería tomar si se quisiera que el error máximo fuera 0.025.

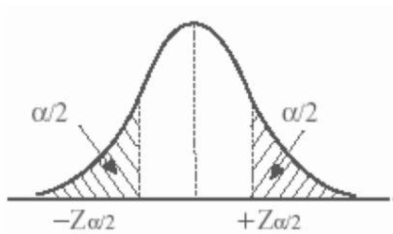
n = 100. $pr = \frac{36}{100} = 0.36$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.36 = 0.64$

a) Con un nivel de confianza del 92 % tenemos

$$1 - \alpha = 0{,}92 \rightarrow \alpha = 0{,}08 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	[illegible]
1,7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9599
[illegible]	[illegible]	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.36 \cdot 0.64}{100}} = 0.084$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.36 - 0.084,\quad 0.36 + 0.084) = (0.276,\ 0.444)$$

b) ¿n?

Con un nivel de confianza del 92 % tenemos $z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.025 = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.36 \cdot 0.64}{n}} \Rightarrow \frac{0.025}{1.75} = \sqrt{\frac{0.2304}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.025}{1.75}\right)^2 = \frac{0.2304}{n} \Rightarrow n = \frac{0.2304}{\left(\frac{0.025}{1.75}\right)^2} = 1128.96$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 1129 jóvenes.

EJERCICIO 8

La vida útil de un determinado modelo de teléfono móvil (en meses) se distribuye según una ley Normal de varianza 9.61 meses^2. En una muestra de 10 teléfonos, la vida útil de los mismos ha sido:

30.6 30 31.3 29.7 32.3 32 32.8 31.5 31.2 30.5

a) (**1.5 puntos**) Determine un intervalo de confianza para estimar la vida útil de este modelo de teléfono móvil con un nivel de confianza del 97%.

b) (**1. punto**) Determine el tamaño mínimo muestral para que, con el mismo nivel de confianza, el error que se comete al estimar la duración media de la vida útil de este modelo de teléfono móvil sea inferior a 0.15 meses.

a) X = La vida útil de un determinado modelo de teléfono móvil (en meses)

Como la desviación típica es la raíz de la varianza tenemos que $\sigma = \sqrt{9.61} = 3.1$ meses

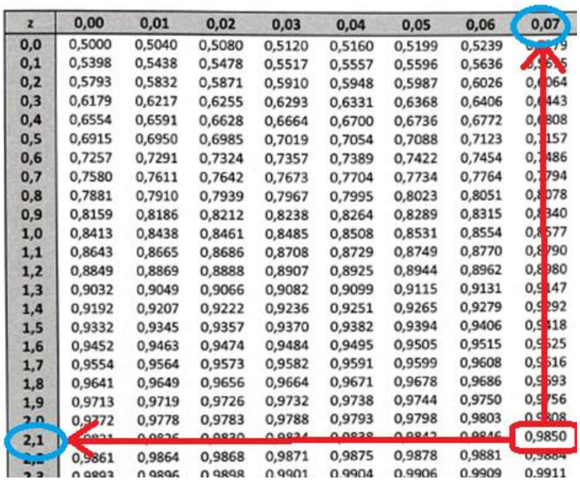
X = N(μ,3.1)

La media muestral es:

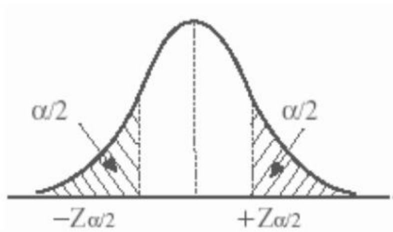
$$\bar{x} = \frac{30.6+30+31.3+29.7+32.3+32+32.8+31.5+31.2+30.5}{10} = 31.19\,meses$$

Con un nivel de confianza del 97%

1 – ∝ = 0,97 → ∝ = 0,03 →∝/2 = 0'015 →1 – ∝/2 = 0,985 → $z_{\alpha/2}$ **= 2.17**



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	[illegible]
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	[illegible]
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	[illegible]
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	[illegible]
2,1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9850
[illegible]	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	[illegible]
[illegible]	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911



Tamaño de muestra *n = 10*. Media muestral $\bar{x} = 31.19\,meses$

Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{3.1}{\sqrt{10}} = 2.127$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(31.19 - 2.127, 31.19 + 2.127\right) = \left(29.063,\ 33.317\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos que $z_{\alpha/2}$ **= 2.17**

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.15 = 2.17 \cdot \frac{3.1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{0.15}{2.17} = \frac{3.1}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{n} = \frac{3.1 \cdot 2.17}{0.15} \Rightarrow n = \left(\frac{3.1 \cdot 2.17}{0.15}\right)^2 = 2011.22$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 2012 móviles.