COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2018	CONVOCATORIA: JULIO 2018
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-1)y + z = 0 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}$, donde ***a*** es un parámetro real. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible (5 *puntos*).
b) Las soluciones del sistema cuando $a = 1$ (3 *puntos*).
c) La solución del sistema cuando $a = 0$ (2 *puntos*).

Problema A.2. Se tiene el plano $\pi : x - y + z - 3 = 0$, la recta $s : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $A(1,1,1)$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:
a) La recta que pasa por A, corta a la recta s y es paralela al plano π (4 *puntos*).
b) El plano que pasa por A, es perpendicular al plano π y paralelo a la recta s (3 *puntos*).
c) Discute si el punto *(3,2,1)* está en la recta paralela a s que pasa por *(5,3,1)* (3 *puntos*).

Problema A.3. Consideremos la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx\cos(\pi x)$ que depende de los parámetros *a, b, c*. Obtener **razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**
a) La relación entre los coeficientes *a, b, c* sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$ (2 puntos).
b) La relación que deben verificar los coeficientes *a, b, c* para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$. (4 puntos).
c) $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$ (4 puntos).

OPCIÓN B

Problema B.1. Resolver los siguientes apartados, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dadas A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$ (4 *puntos*).

b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ cumpla que $B^2 = B$ pero $AB \neq A$ y $BA \neq B$ (2 *puntos*).

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (4 *puntos*).

Problema B.2. Dada la recta $r: \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y - z = 8 \end{cases}$ se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r (3 *puntos*).

b) La ecuación del plano π que es paralelo a r y pasa por los puntos (5, 0, 1) y (4, 1, 0) (4 *puntos*).

c) La distancia entre la recta r y el plano π obtenido en el apartado anterior (3 *puntos*).

Problema B.3. Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo R de 600 cm^2 de área de manera que:

Por encima y por debajo de R deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y a derecha de R deben tener una anchura de 2 cm cada uno.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R (3 puntos).

b) El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima (5 puntos).

c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima (2 puntos).

Soluciones:

OPCIÓN A

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+\quad y \quad =1 \\ (a-1)y+z=0 \\ x \ + \ ay+(a-1)z=a \end{cases}$, donde ***a*** es un parámetro real. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**

a) Los valores del parámetro *a* para los cuales el sistema es compatible (5 *puntos*).
b) Las soluciones del sistema cuando *a* = 1 (3 *puntos*).
c) La solución del sistema cuando *a = 0* (2 *puntos*).

Estudiamos el sistema y después respondemos a lo planteado en el ejercicio.
La matriz de coeficientes y ampliada del sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix};\ A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a-1 & a \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}=(a-1)^2+1+0-0-0-a=a^2+1-2a+1-a=a^2-3a+2$$

$$|A|=0\Rightarrow a^2-3a+2=0\Rightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases} \frac{3+1}{2}=\boxed{2=a} \\ \frac{3-1}{2}=\boxed{1=a} \end{cases}$$

Estudiamos las tres situaciones diferentes que se nos plantean.

CASO 1. $a\neq1$ *y* $a\neq2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3, será 2 o 1.
Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de A y de A/B.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a \ - \ \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & 0 \end{matrix}}^{A/B}\right)$$

El rango de A y de A/B es 2 y el número de incógnitas es 3. El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $a=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3, será 2 o 1.

Utilizamos el método de Gauss para estudiar el rango de A y de A/B.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&2&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3}^{\text{a}}\ -\ \text{Fila 1}^{\text{a}}\\ 1\quad 2\quad 1\quad 2\\ -1\quad -1\quad 0\quad -1\\ \hline 0\quad 1\quad 1\quad 1\to\text{Nueva fila 3}^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3}^{\text{a}}\ -\ \text{Fila 2}^{\text{a}}\\ 0\quad 1\quad 1\quad 1\\ 0\quad -1\quad -1\quad 0\\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad 1\to\text{Nueva fila 3}^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\begin{matrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\\underbrace{0\quad 0\quad 0}_{A}&1\end{matrix}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2, el de A/B es 3. Al ser los rangos distintos el sistema es incompatible.

a) El sistema es compatible cuando $a\neq 2$

b) Para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos a partir del sistema que se obtiene con la matriz equivalente obtenida anteriormente.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\overbrace{\begin{matrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\\\underbrace{0\quad 0\quad 0}_{A}&0\end{matrix}}^{A/B}\right)\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y=1\\z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=1-y\\z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\left.\begin{array}{l}x=1-\lambda\\y=\lambda\\z=0\end{array}\right\}}$$

c) Cuando $a = 0$ el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

$$\begin{cases}x+\ \ y=1\\-y+z=0\\x\ \ -z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\z=y\\x\ \ -z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\x-y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\x=y\end{cases}\Rightarrow y+y=1\Rightarrow\boxed{y=\frac{1}{2}}\Rightarrow\boxed{x=\frac{1}{2}}\Rightarrow\boxed{z=\frac{1}{2}}$$

La solución es $x=\frac{1}{2};\ y=\frac{1}{2};\ z=\frac{1}{2}$

Problema A.2. Se tiene el plano $\pi: x-y+z-3=0$, la recta $s:\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ y el punto $A(1,1,1)$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta que pasa por *A*, corta a la recta *s* y es paralela al plano π (4 *puntos*).

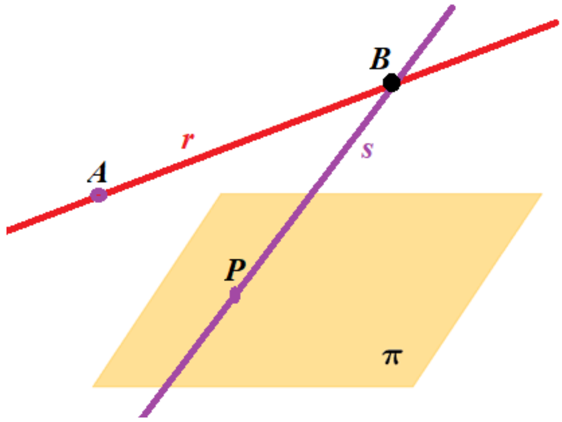
b) El plano que pasa por *A*, es perpendicular al plano π y paralelo a la recta *s* (3 *puntos*).

c) Discute si el punto *(3,2,1)* está en la recta paralela a *s* que pasa por *(5,3,1)* (3 *puntos*).

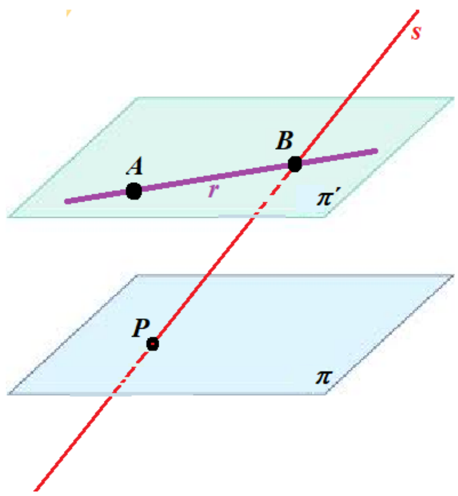
a) Estudiamos la posición relativa de la recta *s* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x-y+z-3=0 \\ s:\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi: x-y+z-3=0 \\ s:\begin{cases} x=2y \\ z=0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2y-y+0-3=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow x=6 \Rightarrow P(6,3,0)$$

El plano π y la recta *s* se cortan en el punto P(6, 3, 0).



Buscamos una recta *r* paralela al plano y que corte a la recta *s*. Además, pasa por el punto A. Hallamos el plano π´ paralelo a π y que pasa por A. Dicho plano contiene la recta *r*.



$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \pi: x-y+z-3=0 \\ \pi' // \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi': x-y+z+D=0 \\ \\ A(1,1,1) \in \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow 1-1+1+D=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow \pi': x-y+z-1=0$$

Hallamos el punto *B* de corte de la recta *s* con el plano π´.

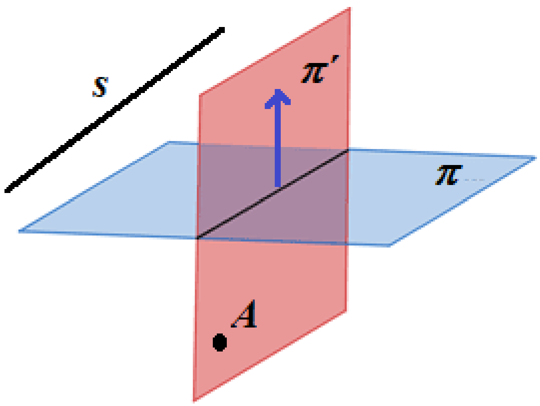
$$\left.\begin{array}{l}\pi':x-y+z-1=0\\ s:\begin{cases}x-2y=0\\ z=0\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi':x-y+z-1=0\\ s:\begin{cases}x=2y\\ z=0\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 2y-y+0-1=0\Rightarrow y-1=0\Rightarrow y=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2\Rightarrow B(2,1,0)$$

La recta *r* pedida debe pasar por los puntos A y B.

$$\left.\begin{array}{l}A(1,1,1)\in r\\ B(2,1,0)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}A(1,1,1)\in r\\ \vec{v_r}=\overrightarrow{AB}=(2,1,0)-(1,1,1)=(1,0,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{r:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=1\\ z=1-\lambda\end{cases}}$$

b) El plano π´ perpendicular al plano π tiene como uno de sus vectores directores el normal del plano π.
El plano π´ es paralelo a la recta *s* y otro vector director del plano es el director de la recta *s*.



$$\pi:x-y+z-3=0\Rightarrow\vec{n}=(1,-1,1)$$

$$s:\begin{cases}x-2y=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}x=2y\\ z=0\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}x=2\lambda\\ y=\lambda\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\vec{v_s}=(2,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}A(1,1,1)\in\pi'\\ \vec{u}=\vec{n}=(1,-1,1)\\ \vec{v}=\vec{v_s}=(2,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\pi':\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow 0+2y-2+z-1+2z-2-0-x+1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\pi':-x+2y+3z-4=0}$$

c) Hallamos la recta *t* paralela a *s* que pasa por *(5,3,1)*.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u_t}=\vec{v_s}=(2,1,0)\\ (5,3,1)\in t\end{array}\right\}\Rightarrow t:\begin{cases}x=5+2\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=1\end{cases}$$

Comprobamos si el punto (3, 2, 1) pertenece a la recta *t*.

$$\left.\begin{array}{l} t:\begin{cases} x=5+2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1 \end{cases} \\ ¿(3,2,1)\in t? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 3=5+2\lambda \\ 2=3+\lambda \\ 1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2=2\lambda \\ -1=\lambda \\ 1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1=\lambda \\ -1=\lambda \\ 1=1 \end{cases}$$

La recta *t*.pasa por el punto (3, 2, 1).

Problema A.3. Consideremos la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx\cos(\pi x)$ que depende de los parámetros *a, b, c*. Obtener **razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**

a) La relación entre los coeficientes *a, b, c* sabiendo que *f(x)* toma el valor 22 cuando *x = 1* (2 puntos).

b) La relación que deben verificar los coeficientes *a, b, c* para que sea horizontal la recta tangente a la curva *y = f(x)* en el punto *P* de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto *P* es *x = 1*. (4 puntos).

c) $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$ (4 puntos).

a) Si *f(x)* toma el valor 22 cuando *x = 1* se debe cumplir que *f(1) = 22* .

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx^2+cx\cos(\pi x) \\ f(1)=22 \end{array}\right\} \Rightarrow 22=a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1\cos(\pi) \Rightarrow \boxed{22=a+b-c}$$

b) Si es horizontal la recta tangente a la curva *y = f(x)* en *x = 1* debe cumplirse que su pendiente es 0 y por tanto debe ser $f'(1)=0$.

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx\cos(\pi x) \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c\cos(\pi x)+cx(-sen(\pi x))\pi$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=3ax^2+2bx+c\cos(\pi x)-\pi cxsen(\pi x) \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c\cos(\pi)-\pi csen(\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{0=3a+2b-c}$$

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int x\cos(\pi x)\,dx=\left\{\begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u=x \to du=dx \\ dv=\cos(\pi x)dx \Rightarrow v=\int\cos(\pi x)dx=\frac{1}{\pi}sen(\pi x) \end{array}\right\}=$$

$$=x\cdot\frac{1}{\pi}sen(\pi x)-\int\frac{1}{\pi}sen(\pi x)dx=\frac{x}{\pi}sen(\pi x)-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\pi}(-\cos(\pi x))=\frac{x}{\pi}sen(\pi x)+\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)+K$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx=\left[\frac{x}{\pi}sen(\pi x)+\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}sen(\pi)+\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi)\right]-\left[\frac{0}{\pi}sen(0)+\frac{1}{\pi^2}\cos(0)\right]=-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{\pi^2}=\boxed{\frac{-2}{\pi^2}}$$

OPCIÓN B

Problema B.1. Resolver los siguientes apartados, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dadas A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$ (4 *puntos*).

b) Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz $B=\begin{bmatrix}a & 0\\ 1 & b\end{bmatrix}$ cumpla que $B^2 = B$ pero $AB \neq A$ y $BA \neq B$ (2 *puntos*).

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix}x & 1 & 0\\ y & 2 & 1\\ z & 3 & 2\end{vmatrix}=3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes

$\begin{vmatrix}2x & 1 & 0\\ 2y & 2 & 1\\ 2z & 3 & 2\end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix}x+1 & 1 & 0\\ y+3 & 2 & 1\\ z+5 & 3 & 2\end{vmatrix}$ (4 *puntos*).

a)

$$\left.\begin{array}{l}AB=A\\ BA=B\end{array}\right\}\Rightarrow A^2 = A\cdot A = AB\cdot A = A\cdot BA = A\cdot B = A$$

$$\left.\begin{array}{l}AB=A\\ BA=B\end{array}\right\}\Rightarrow B^2 = B\cdot B = BA\cdot B = B\cdot AB = B\cdot A = B$$

b) Averiguamos cuando se cumple $B^2 = B$

$$B^2 = B \Rightarrow \begin{bmatrix}a & 0\\ 1 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & 0\\ 1 & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 0\\ 1 & b\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a^2 & 0\\ a+b & b^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 0\\ 1 & b\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a^2=a\\ a+b=1\Rightarrow\\ b^2=b\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2-a=0\rightarrow a(a-1)=0\rightarrow\begin{cases}a=0\\ o\\ a=1\end{cases}\longrightarrow\\ a+b=1\longrightarrow\\ b^2-b=0\rightarrow b(b-1)=0\rightarrow\begin{cases}b=0\\ o\\ b=1\end{cases}\longrightarrow\end{cases}\begin{cases}\begin{cases}a=0\\ b=1\end{cases}\\ o\\ \begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}\end{cases}$$

Comprobamos si se cumple también $AB \neq A$ y $BA \neq B$.

$$a=0;\ b=1 \Rightarrow B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\neq A$$

$$BA=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\neq B$$

Para $a = 0$ y $b = 1$ se cumple todo lo pedido.

$$a=1;\ b=0 \Rightarrow B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=A$$

Para $a = 1$ y $b = 0$ no se cumple todo lo pedido.

La única solución es $a = 0$ y $b = 1$.

c) Calculamos el primer determinante.

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{Sacamos 2 como factor común} \\ \text{en la primera columna}\end{matrix}\right\}=2\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 3=\boxed{6}$$

Calculamos el segundo determinante.

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{Separamos la suma de la primera columna} \\ \text{en suma de dos determinantes}\end{matrix}\right\}=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{En el segundo determinante} \\ \text{La primera columna es la suma de las otras dos} \\ \text{por lo que el determinante vale 0}\end{matrix}\right\}=3+0=3$$

Problema B.2. Dada la recta $r:\begin{cases} x+y=3 \\ x+4y-z=8 \end{cases}$ se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta *r* (3 *puntos*).

b) La ecuación del plano π que es paralelo a *r* y pasa por los puntos (5, 0, 1) y (4, 1, 0) (4 *puntos*).

c) La distancia entre la recta *r* y el plano π obtenido en el apartado anterior (3 *puntos*).

a)

$$r:\begin{cases} x+y=3 \\ x+4y-z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-y \\ x+4y-z=8 \end{cases} \Rightarrow 3-y+4y-z=8 \Rightarrow 3y-z=5 \Rightarrow 3y-5=z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-5+3\lambda \end{cases}}$$

b) El plano π que es paralelo a *r* y pasa por los puntos (5, 0, 1) y (4, 1, 0) tiene como vectores directores el director de la recta *r* y el vector que une ambos puntos.

$$r:\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-5+3\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v_r}=(-1,1,3)$$

$$\overrightarrow{AB}=(5,0,1)-(4,1,0)=(1,-1,1)$$

$$\pi:\begin{cases} A(5,0,1)\in\pi \\ \vec{u}=(-1,1,3) \\ \vec{v}=(1,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x-5 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x-5+3y+z-1-z+1+y+3x-15=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+4y-20=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+y-5=0}$$

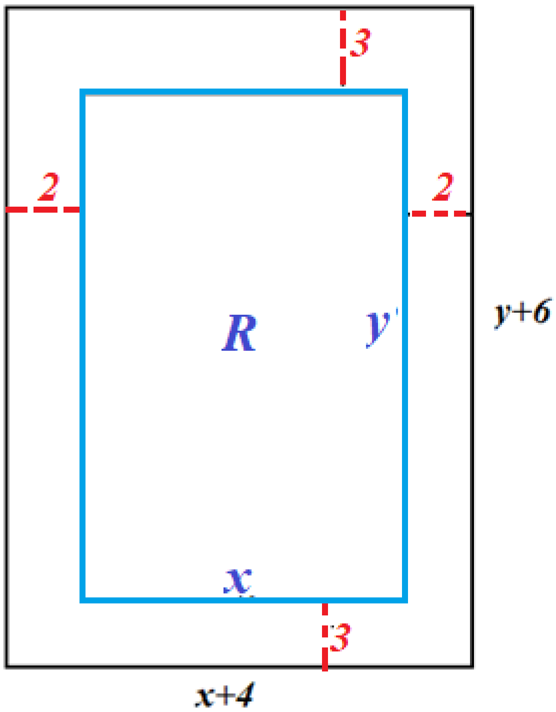
c) Como la recta *r* y el plano π son paralelos la distancia entre la recta y el plano es la distancia entre cualquier punto de la recta y el plano.

$$r:\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-5+3\lambda \end{cases} \Rightarrow P(3,0,-5)\in r$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x+y-5=0 \\ P(3,0,-5)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|3+0-5|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\boxed{\sqrt{2}\,u}$$

Problema B.3. Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo *R* de 600 cm^2 de área de manera que:
Por encima y por debajo de *R* deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y a derecha de *R* deben tener una anchura de 2 cm cada uno.
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:
a) El área de la cartulina en función de la base *x* del rectángulo *R* (3 puntos).
b) El valor de *x* para el cual el área de la cartulina es mínima (5 puntos).
c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima (2 puntos).

La situación planteada es la del dibujo.



a) El área del rectángulo R del dibujo es 600 → $xy = 600 \Rightarrow y = \dfrac{600}{x}$.

La cartulina es un rectángulo de base *x + 4* y de altura *y + 6*.

$$Área\,cartulina = (x+4)(y+6) = (x+4)\left(\frac{600}{x}+6\right) = (x+4)\left(\frac{600+6x}{x}\right) =$$

$$= \frac{(x+4)(600+6x)}{x} = \frac{600x+24x+2400+6x^2}{x} = \frac{6x^2+624x+2400}{x}$$

La función área de la cartulina es $A(x) = \dfrac{6x^2+624x+2400}{x}$

b) Usamos la derivada.

$$A'(x) = \frac{(12x+624)x-(6x^2+624x+2400)}{x^2} = \frac{12x^2+624x-6x^2-624x-2400}{x^2}$$

$$A'(x)=\frac{6x^2-2400}{x^2}$$

$$A'(x)=0 \Rightarrow \frac{6x^2-2400}{x^2}=0 \Rightarrow 6x^2-2400=0 \Rightarrow x^2-400=0 \Rightarrow x^2=400 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{400}=20}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este punto critico *x = 20* para comprobar si es un valor mínimo del área.

En el intervalo $(0,20)$ tomamos *x =10* y la derivada vale $A'(10)=\frac{600-2400}{100}=-18<0$. La función decrece en $(0,20)$.

En el intervalo $(20,600)$ tomamos *x =30* y la derivada vale $A'(30)=\frac{5400-2400}{900}=\frac{10}{9}>0$. La función crece en $(20,600)$.

La función cambia de decrecer a crecer en *x = 20*. La función presenta un mínimo. El área presenta un mínimo en *x = 20* cm.

c) Para *x = 20* tenemos que $y=\frac{600}{20}=30$.

La cartulina de área mínima tiene dimensiones: *x + 4 = 24* cm de ancho, *y + 6 = 36* cm de alto.