GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2018	CONVOCATORIA: JUNIO 2018
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y-z=1-a \\ -x \quad +z=5 \\ -ax+y-z=1 \end{cases}$, donde ***a*** es un parámetro real. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**

a) Los valores del parámetro *a* para los cuales el sistema es compatible determinado (2 *puntos*).
b) Las soluciones del sistema cuando $a = 3$ (4 *puntos*).
c) Las soluciones del sistema para los valores de *a* que lo hacen compatible indeterminado (4 *puntos*).

Problema A.2. Dados los puntos $A(-1,2,\lambda)$, $B(2,3,5)$ y $C(3,5,3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:
a) El valor del parámetro λ para que el segmento *AC* sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices *A, B y C* (3 *puntos*).
b) El área del triángulo de vértices *A, B y C* cuando $\lambda = 6$ (4 *puntos*).
c) La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices *A*, *B y C* cuando $\lambda = 6$ (3 *puntos*).

Problema A.3. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ se pide obtener **razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**
a) El dominio y las asíntotas de la función *f(x)* (2 *puntos*).
b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f(x)* (4 *puntos*).
c) El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$ (4 *puntos*).

OPCIÓN B

Problema B.1. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2+2A=3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1}=aA+bI$ (3 *puntos*).

b) Los valores de α y β para los cuales $A^4=\alpha A+\beta I$ (4 *puntos*).

c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2 (3 *puntos*).

Problema B.2. Dados el punto *A(5, 7, 3)* y la recta $r:\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta s que corta a la recta r, pasa por el punto A, y es perpendicular a la recta r (4 *puntos*).

b) La distancia del punto A a la recta r (3 *puntos*).

c) La distancia del punto *B(1, 1, 1)* al plano π que pasa por (3, –1, 0) y es perpendicular a r (3 *puntos*).

Problema B.3. Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud x, se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud $100-x$, se construye un cuadrado. Se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La función de la variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0\le x\le 100$ (4 *puntos*).

b) El valor de la variable x en el intervalo [0,100] para el cual dicha función (suma de las àreas en función de x obtenida en el apartado a)) alcanza su mínimo valor (3 *puntos*).

c) El valor de la variable x en el intervalo [0,100] para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido (3 *puntos*).

Soluciones:

OPCIÓN A

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y - z = 1 - a \\ -x \quad + z = 5 \\ -ax + y - z = 1 \end{cases}$, donde ***a*** es un parámetro real. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**

a) Los valores del parámetro *a* para los cuales el sistema es compatible determinado (2 *puntos*).
b) Las soluciones del sistema cuando *a* = 3 (4 *puntos*).
c) Las soluciones del sistema para los valores de *a* que lo hacen compatible indeterminado (4 *puntos*).

La matriz de coeficientes A y la matriz ampliada asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -1 \end{pmatrix}; \ A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1-a \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ -a & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -1 \end{vmatrix} = -a + 1 - 1 = -a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

a) Si el valor de "a" es distinto de cero el determinante de A no se anula y su rango es 3, el rango de A/B también es 3 y como son también 3 el número de incógnitas tenemos un sistema compatible determinado.

b) Cuando *a = 3* el sistema es compatible determinado (apartado anterior). Lo resolvemos.

$$\begin{cases} y - z = -2 \\ -x \quad + z = 5 \\ -3x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z - 2 \\ z - 5 = x \\ -3x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow -3(z-5) + (z-2) - z = 1 \Rightarrow -3z + 15 + z - 2 - z = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3z = -12 \Rightarrow \boxed{z = 4} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 4 - 2 = 2} \\ \boxed{x = z - 5 = -1} \end{cases} \Rightarrow \textit{Solución}: \boxed{x = -1; \ y = 2; \ z = 4}$$

c) Como el determinante de A se anula para *a = 0*, comprobamos si el sistema es compatible indeterminado para *a = 0*. Para ello lo resolvemos.

El sistema queda: $\begin{cases} y-z=1 \\ -x \quad +z=5 \\ y-z=1 \end{cases}$.

$$\begin{cases} y-z=1 \\ -x \quad +z=5 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1+z \\ -x=5-z \\ y=1+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1+z \\ x=-5+z \end{cases} \Rightarrow Solución: \boxed{\left.\begin{matrix} x=-5+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}; \text{siendo } \lambda \in \mathbb{R}}$$

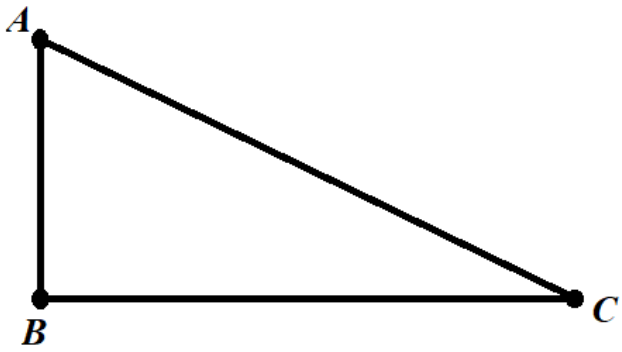
Problema A.2. Dados los puntos $A(-1,2,\lambda)$, $B(2,3,5)$ y $C(3,5,3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor del parámetro λ para que el segmento *AC* sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices *A, B y C* (3 *puntos*).

b) El área del triángulo de vértices *A, B y C* cuando $\lambda = 6$ (4 *puntos*).

c) La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices *A, B y C* cuando $\lambda = 6$ (3 *puntos*).

a)

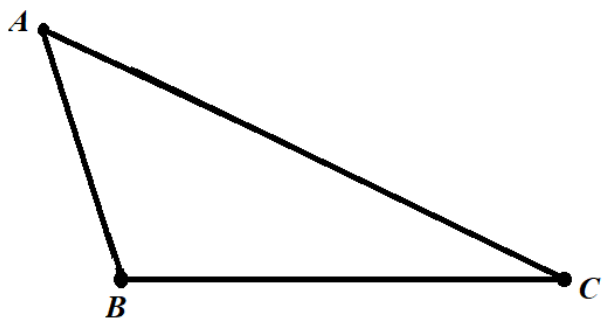


Para que AC sea la la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices *A, B y C* el ángulo B debe ser de 90º. Los lados AB y BC deben ser perpendiculares y por tanto el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BA} = (-1,2,\lambda)-(2,3,5) = (-3,-1,\lambda-5) \\ \overrightarrow{BC} = (3,5,3)-(2,3,5) = (1,2,-2) \\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow (-3,-1,\lambda-5)(1,2,-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3-2-2\lambda+10 = 0 \Rightarrow -2\lambda = -5 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{5}{2}}$$

b) Cuando $\lambda = 6$ el triángulo no es rectángulo y debemos calcular su área usando el producto vectorial.



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BA} = (-3,-1,6-5) = (-3,-1,1) \\ \overrightarrow{BC} = (1,2,-2)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2i + j - 6k + k - 6j - 2i$$

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC} = 0i - 5j - 5k = (0,-5,-5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \acute{A}rea\ ABC = \frac{\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{0^2+(-5)^2+(-5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}u^2}$$

c) Cuando $\lambda = 6$ los puntos son: $A(-1,2,6)$, $B(2,3,5)$ y $C(3,5,3)$
La ecuación del plano π que contiene al triángulo de vértices *A*, *B y C* debe tener como vectores directores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, y contener un punto cualquiera de los tres.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{BA} = (-3,-1,6-5) = (-3,-1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{BC} = (1,2,-2) \\ A(-1,2,6)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x+1) + y - 2 - 6(z-6) + z - 6 - 6(y-2) - 2(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2x} + \cancel{2} + y - \cancel{2} - 6z + 36 + z - 6 - 6y + 12 - \cancel{2x} - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y - 5z + 40 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : y + z - 8 = 0}$$

Problema A.3. Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$ se pide obtener **razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:**

a) El dominio y las asíntotas de la función *f(x)* (2 *puntos*).

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f(x)* (4 *puntos*).

c) El área limitada por la curva *y = f(x)*, el eje de abscisas y las rectas *x = 2* y *x = 3* (4 *puntos*).

a) El dominio son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$$f(x)=\frac{1}{x^2-x}\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x\left(x-1\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\left\{0,1\right\}$.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical.

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{\infty}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

No existe pues existe asíntota horizontal.

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f'(x)=\frac{0\left(x^2-x\right)-\left(2x-1\right)}{\left(x^2-x\right)^2}=\frac{1-2x}{\left(x^2-x\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-2x}{\left(x^2-x\right)^2}=0\Rightarrow 1-2x=0\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Estudiamos el crecimiento antes, entre y después de este valor y los valores excluidos del dominio.

En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f\,'(-1)=\dfrac{1+2}{\left((-1)^2+1\right)^2}=\dfrac{3}{4}>0$. La función crece en $(-\infty,0)$.

En el intervalo $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ tomamos *x = 1/4* y la derivada vale $f\,'\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{128}{9}>0$.

La función crece en $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ tomamos *x = 3/4* y la derivada vale $f\,'\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1-\dfrac{3}{2}}{\left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{-128}{9}<0$.

La función decrece en $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f\,'(2)=\dfrac{1-4}{\left(2^2-2\right)^2}=\dfrac{-3}{4}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

Resumiendo: La función crece en $(-\infty,0)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ y decrece en $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$

c) La gráfica de la función no corta el eje de abscisas.

$$f(x)=\frac{1}{x^2-x}=0\Rightarrow 1=0\Rightarrow \text{¡}\mathit{No\ es\ posible}\text{!}$$

El valor del área pedida es la integral definida de la función entre 2 y 3

$$\acute{A}rea=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\frac{1}{x^2-x}dx$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int\frac{1}{x^2-x}dx=\ldots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}\Rightarrow\frac{1}{x(x-1)}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=A(x-1)+Bx\Rightarrow\begin{cases}x=1\to 1=B\\ x=0\to 1=-A\to A=-1\end{cases}\to\frac{1}{x^2-x}=\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}$$

$$\ldots=\int\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}dx=\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{1}{x-1}dx=-\ln x+\ln(x-1)+K$$

Pasamos a calcular la integral definida.

$$Área = \int_2^3 \frac{1}{x^2 - x}\,dx = \left[-\ln x + \ln(x-1)\right]_2^3 = \left[-\ln 3 + \ln(3-1)\right] - \left[-\ln 2 + \ln(2-1)\right] \simeq \boxed{0.287\,u^2}$$

OPCIÓN B

Problema B.1. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2+2A=3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1}=aA+bI$ (3 *puntos*).

b) Los valores de α y β para los cuales $A^4=\alpha A+\beta I$ (4 *puntos*).

c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2 (3 *puntos*).

a)

$$A^2+2A=3I \Rightarrow A\left(A+2I\right)=3I \Rightarrow A\left(\frac{1}{3}\left(A+2I\right)\right)=I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}I\right)=I \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}I \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{2}{3} \end{cases}}$$

b)

$$A^2+2A=3I \Rightarrow A^2=-2A+3I \Rightarrow A^4=A^2\cdot A^2=\left(-2A+3I\right)\left(-2A+3I\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^4=4A^2-6AI-6IA+9I^2=4A^2-12A+9I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^4=4\left(-2A+3I\right)-12A+9I=-8A+12I-12A+9I=-20A+21I \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha=-20 \\ \beta=21 \end{cases}}$$

c)

$$\left|2B^{-1}\right|=\left\{\begin{matrix} B^{-1} \text{ es cuadrada de orden 3} \\ \left|2B^{-1}\right|=2^3\left|B^{-1}\right| \end{matrix}\right\}=2^3\left|B^{-1}\right|=\left\{\left|B^{-1}\right|=\frac{1}{|B|}\right\}=8\frac{1}{|B|}=\left\{|B|=2\right\}=8\frac{1}{2}=4$$

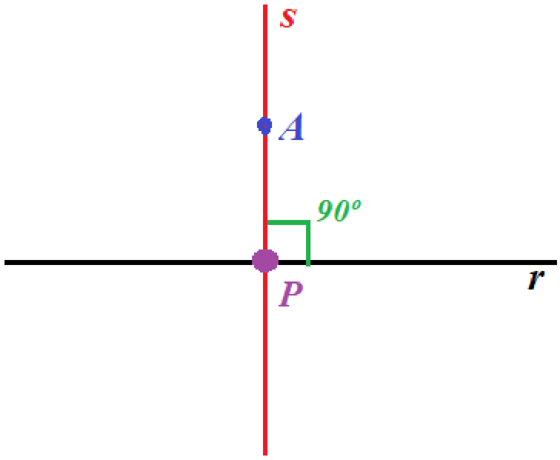
Problema B.2. Dados el punto A(5, 7, 3) y la recta $r:\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta *s* que corta a la recta *r*, pasa por el punto A, y es perpendicular a la recta *r* (4 *puntos*).

b) La distancia del punto *A* a la recta *r* (3 *puntos*).

c) La distancia del punto *B(1, 1, 1)* al plano π que pasa por (3, –1, 0) y es perpendicular a *r* (3 *puntos*).

a) La situación es la planteada en el dibujo.



Hallamos el plano π´ perpendicular a la recta *r* que pasa por A.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\vec{v_r}=(-1,3,2)\\ A(5,7,3)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi':-x+3y+2z+D=0\\ A(5,7,3)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow -5+21+6+D=0\Rightarrow D=-22\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi':-x+3y+2z-22=0$$

Hallamos el punto *P* de corte del plano π´ y la recta *r*.

$$r:\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}\Rightarrow r:\begin{cases}P_r(3,-1,0)\\ \vec{v_r}=(-1,3,2)\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=3-\lambda\\ y=-1+3\lambda\\ z=2\lambda\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi':-x+3y+2z-22=0\\ r:\begin{cases}x=3-\lambda\\ y=-1+3\lambda\\ z=2\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow -(3-\lambda)+3(-1+3\lambda)+4\lambda-22=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3+\lambda-3+9\lambda+4\lambda-22=0\Rightarrow 14\lambda-28=0\Rightarrow \lambda=2\Rightarrow\begin{cases}x=3-2=1\\ y=-1+6=5\\ z=2\lambda=4\end{cases}\Rightarrow \boxed{P(1,5,4)}$$

La recta *s* pasa por el punto *A* y *P*. Hallamos su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} A(5,7,3)\in s \\ P(1,5,4)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A(5,7,3)\in s \\ \vec{v_s} = \overrightarrow{AP} = (1,5,4)-(5,7,3) = (-4,-2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s: \frac{x-5}{-4} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z-3}{1}}$$

b) La distancia del punto *A* a la recta *r* es la distancia de *A* a *P*, es decir, el módulo del vector $\overrightarrow{AP} = (-4,-2,1)$.

$$d(A,r) = d(A,P) = \left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{21}u}$$

c) Hallamos la ecuación del plano π que pasa por (3, –1, 0) y es perpendicular a *r.* Al ser perpendicular a la recta tiene como vector normal el director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v_r} = (-1,3,2) \\ (3,-1,0)\in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi: -x+3y+2z+D=0 \\ (3,-1,0)\in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow -3-3+0+D=0 \Rightarrow D=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: -x+3y+2z+6=0$$

Aplicamos la fórmula de distancia de un punto al plano para calcular $d(B,\pi)$.

$$\left.\begin{array}{l} B(1,1,1) \\ \pi: -x+3y+2z+6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(B,\pi) = \frac{|-1+3+2+6|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{5\sqrt{14}}{7}u}$$

Problema B.3. Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud x, se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud $100 - x$, se construye un cuadrado. Se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

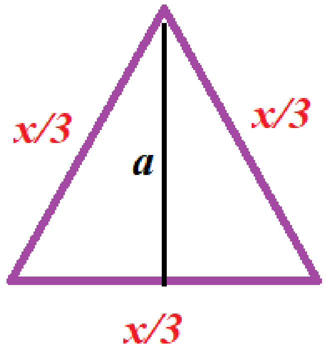
a) La función de la variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \le x \le 100$ (4 *puntos*).

b) El valor de la variable x en el intervalo [0,100] para el cual dicha función (suma de las áreas en función de x obtenida en el apartado a)) alcanza su mínimo valor (3 *puntos*).

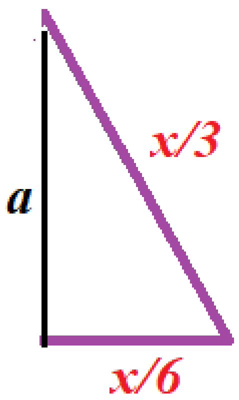
c) El valor de la variable x en el intervalo [0,100] para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido (3 *puntos*).

a)

El triángulo equilátero debe tener de perímetro x, por lo tanto, cada uno de sus lados iguales miden $x/3$. Hallamos su altura para poder hallar su área.



Tomamos el triángulo rectángulo que se obtiene con la mitad del triángulo equilátero y aplicamos el teorema de Pitágoras.



$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{6}\right)^2 + a^2 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{36} = a^2 \Rightarrow \frac{4x^2 - x^2}{36} = a^2 \Rightarrow \frac{3x^2}{36} = a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{12} = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{x^2}{12}} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{12}}x$$

Hallamos el área del triángulo equilátero.

$$\text{Área triángulo} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{\frac{x}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}x}{2} = \frac{1}{6\sqrt{12}}x^2 = \frac{1}{6 \cdot 2\sqrt{3}}x^2 = \frac{1}{12 \cdot \sqrt{3}}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2$$

El cuadrado tiene como perímetro $100 - x$, por lo que su lado mide $\frac{100-x}{4}$ y su área es:

$$\text{Área cuadrado} = \left(\frac{100-x}{4}\right)^2 = \left(25 - \frac{x}{4}\right)^2$$

La función suma de las dos áreas es:

$$f(x) = \text{Área cuadrado} + \text{Área triángulo} = \left(25 - \frac{x}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}x^2$$

$$f(x) = 625 + \frac{x^2}{16} - \frac{50}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{36}x^2$$

$$\boxed{f(x) = \left(\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}\right)x^2 - \frac{25}{2}x + 625; \text{ siendo } 0 \le x \le 100}$$

b) Hallamos la derivada y la igualamos a cero, en busca de sus puntos críticos.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2\left(\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}\right)x - \frac{25}{2} = \left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right)x - \frac{25}{2} \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right)x - \frac{25}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right)x = \frac{25}{2} \Rightarrow x = \frac{\frac{25}{2}}{\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}} = \frac{25}{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{9}} = \frac{25}{\frac{9 + 4\sqrt{3}}{36}} = \boxed{\frac{900}{9 + 4\sqrt{3}} \simeq 56.5\ cm}$$

Hemos encontrado un punto crítico, sustituimos en la derivada segunda y comprobamos que es un mínimo.

$$f''(x) = \left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right) \Rightarrow f''(56.5) = \left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right) > 0$$

La suma de las áreas es mínima para $x = \frac{900}{9 + 4\sqrt{3}} \simeq 56.5\ cm$

c) Solo existe un punto crítico de la función y es un mínimo. Por tanto, el máximo valor se alcanza en los extremos del intervalo de definición [0, 100].
Valoramos la función en los dos extremos y vemos donde alcanza dicho valor máximo.

$$f(0) = \left(\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}\right) \cdot 0^2 - \frac{25}{2} \cdot 0 + 625 = \boxed{625\,cm^2}$$

$$f(100) = \left(\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}\right) \cdot 100^2 - \frac{25}{2} \cdot 100 + 625 \simeq \boxed{481.125\,cm^2}$$

El valor máximo de la suma de áreas se consigue con *x = 0*, es decir utilizando todo el alambre para construir el cuadrado.