RESUMEN DE LO BÁSICO DE GEOMETRÍA

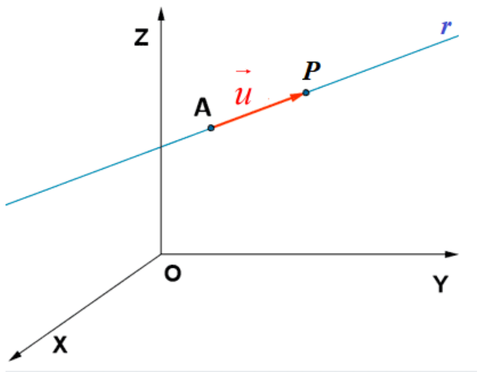
Coordenadas o componentes de un vector

Sean dos puntos $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ del espacio. Entonces las **coordenadas** o **componentes** del vector $\overrightarrow{AB}$ son: $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$. Dos vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ son **equivalentes** $\left(\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\right)$ si tienen las mismas coordenadas o componentes. Al conjunto de todos los vectores con las mismas coordenadas lo llamaremos **vector libre** y lo denotaremos genéricamente mediante $\vec{u}$.

El **vector nulo** es aquel que tiene coordenadas (0,0,0). Si $\vec{u}$ tiene coordenadas (u_1,u_2,u_3), entonces el **vector opuesto**, $-\vec{u}$, tiene coordenadas $(-u_1,-u_2,-u_3)$.

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores con coordenadas (u_1,u_2,u_3) y (v_1,v_2,v_3), respectivamente, entonces el **vector suma** $\vec{u}+\vec{v}$ tiene coordenadas $(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$ y dado un número $\lambda\in$ el **producto de un número por el vector** $\vec{u}$, $\lambda\vec{u}$ tiene coordenadas $(\lambda u_1,\lambda u_2,\lambda u_3)$.

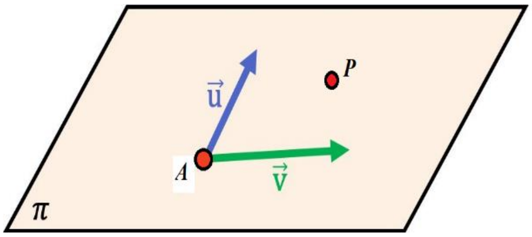
Vector director de una recta y ecuaciones de la recta



Dada una recta *r* se llama vector director de la recta *r* a un vector libre $\vec{u}$ que tenga la dirección de la recta *r*. Supongamos que de una recta *r* conocemos un punto $A(a_1,a_2,a_3)$ y un vector director $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$. Supongamos también que $P(x,y,z)$ es un punto cualquiera de dicha recta. Entonces:

- **Ecuación vectorial de la recta**: $\overrightarrow{AP}=\lambda\vec{u}\Rightarrow(x-a_1,y-a_2,z-a_3)=\lambda(u_1,u_2,u_3)$ **(1)**
- **Ecuaciones paramétricas de la recta:** de **(1)** se deduce que $\begin{cases}x-a_1=\lambda u_1\\ y-a_2=\lambda u_2\\ z-a_3=\lambda u_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=a_1+\lambda u_1\\ y=a_2+\lambda u_2\\ z=a_3+\lambda u_3\end{cases}$ **(2)**
- **Ecuaciones continuas de la recta:** eliminando el parámetro de **(2)** tenemos que $\dfrac{x-a_1}{u_1}=\dfrac{y-a_2}{u_2}=\dfrac{z-a_3}{u_3}$
- **Ecuación de una recta conociendo dos puntos:** si conocemos dos puntos $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ → $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$, y entonces la ecuación es $\begin{cases}x=a_1+\lambda(b_1-a_1)\\ y=a_2+\lambda(b_2-a_2)\\ z=a_3+\lambda(b_3-a_3)\end{cases}$

Ecuaciones de un plano



Un plano π queda definido si conocemos un punto $A(a_1,a_2,a_3)$ perteneciente a él y dos vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ de dirección diferente contenidos en él. Tomando un punto $P(x,y,z)$ cualquiera del plano, el vector $\overrightarrow{AP}$ deberá ser combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, deberán existir unos escalares λ y μ tales que:

- **Ecuación vectorial del plano:**
  $\overrightarrow{AP}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \Rightarrow (x-a_1,y-a_2,z-a_3)=\lambda(u_1,u_2,u_3)+\mu(v_1,v_2,v_3)$ **(3)**
- **Ecuaciones paramétricas del plano**: de **(3)** tenemos $\begin{cases} x-a_1=\lambda u_1+\mu b_1 \\ y-a_2=\lambda u_2+\mu b_2 \\ z-a_3=\lambda u_3+\mu b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a_1+\lambda u_1+\mu b_1 \\ y=a_2+\lambda u_2+\mu b_2 \\ z=a_3+\lambda u_3+\mu b_3 \end{cases}$ **(4)**
- **Ecuación implícita, general o cartesiana de un plano**:
  $$\left.\begin{array}{l} A(a_1,a_2,a_3)\in\pi \\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3) \\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0.$$
  Desarrollando este determinante se obtiene la ecuación implícita, general o cartesiana del plano: $Ax+By+Cz+D=0$.

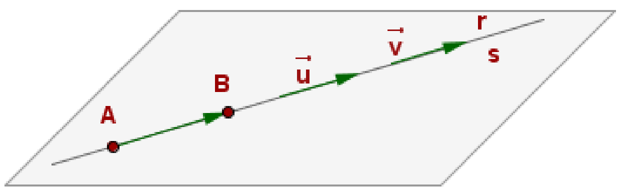
Posiciones relativas de dos rectas

Sea r determinada por el punto $A(a_1,a_2,a_3)$ y el vector director $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y s determinada por $B(b_1,b_2,b_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, decimos que las rectas son **Coincidentes** si tienen todos sus puntos comunes, **Paralelas** si no tienen ningún punto en común, y además existe un plano que contiene a ambas rectas, **Secantes** si tienen un punto en común y que **Se cruzan** si no tienen ningún punto en común y no existe ningún plano que contenga a ambas rectas.

Rectas coincidentes

Deben cumplirse dos condiciones:

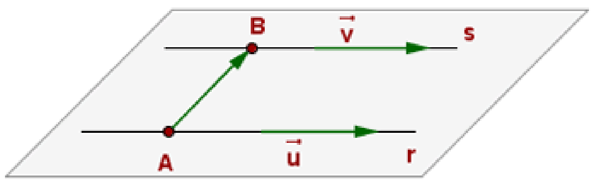
1. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección y por tanto, tienen coordenadas proporcionales.
2. El punto A de la recta r **debe** pertenecer a la recta s.



Rectas paralelas

Deben cumplirse dos condiciones:

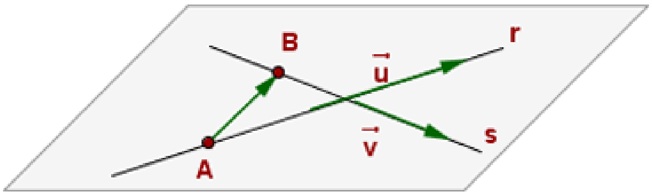
1. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección y por tanto, tienen coordenadas proporcionales.



2. El punto A de la recta r **no** puede pertenecer a la recta s.

Rectas secantes (se cortan y coinciden en un único punto)

Deben cumplirse dos condiciones:

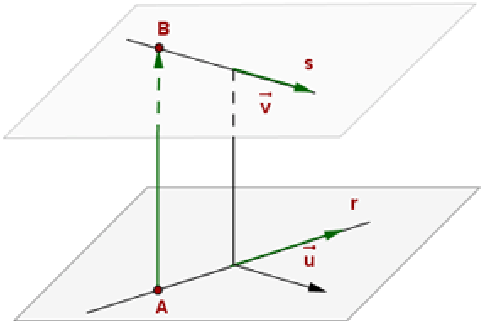


1. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ **no** tienen la misma dirección y por tanto, no tienen coordenadas proporcionales.
2. El producto mixto de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ es nulo: $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

.

Rectas que se cruzan (no coinciden en ningún punto, pero no son paralelas)

Deben cumplirse dos condiciones:



1. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ **no** tienen la misma dirección y por tanto, no tienen coordenadas proporcionales.
2. El producto mixto de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ es **no** nulo: $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

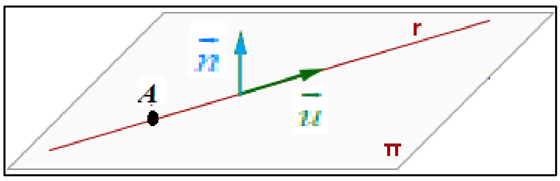
Posiciones relativas de una recta y un plano

Sea la recta $r:\begin{cases} A(a_1,a_2,a_3)\in r \\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a_1+\lambda u_1 \\ y=a_2+\lambda u_2 \\ z=a_3+\lambda u_3 \end{cases}$ y el plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow \vec{n}=(A,B,C)$.

Se dice que una **recta está contenida en el plano** si todos los puntos de la recta pertenecen al plano, **una recta y un plano son paralelos** si no tienen ningún punto en común y **una recta y un plano son secantes** si tienen un único punto en común.

Recta contenida en el plano

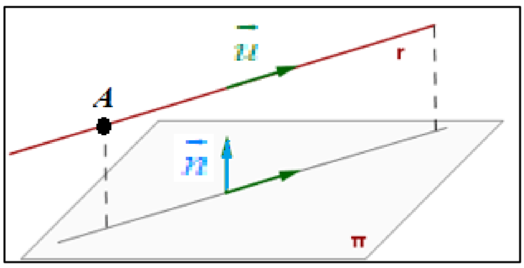
Deben cumplirse dos condiciones:



1. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares (su producto escalar es nulo)
2. El punto A de la recta r pertenece al plano π.

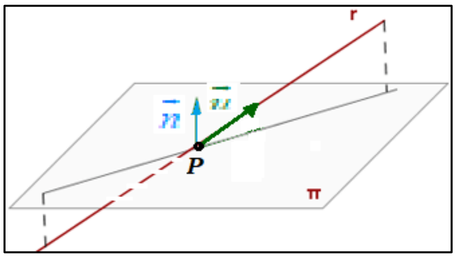
Recta y plano paralelos

Deben cumplirse dos condiciones:



1. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares (su producto escalar es nulo)
2. El punto A de la recta r **no** pertenece al plano π.

Recta y plano secantes

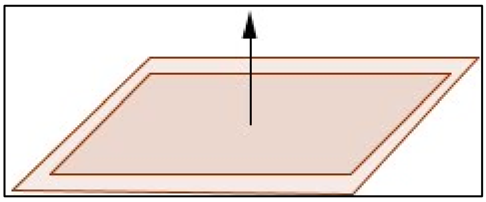


Debe cumplirse que $\vec{u}$ y $\vec{n}$ **no** sean perpendiculares (su producto escalar no es nulo)

Posiciones relativas de dos planos

Dos planos $\pi: Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow \vec{n}=(A,B,C)$ y $\pi': A'x+B'y+C'z+D'=0 \Rightarrow \vec{n'}=(A',B',C')$ en el espacio pueden adoptar una de las siguientes posiciones relativas: **Planos coincidentes,** son los que tienen todos sus puntos comunes. **Planos paralelos,** son los que no tienen ningún punto en común. **Planos secantes,** son los que tienen una recta común.

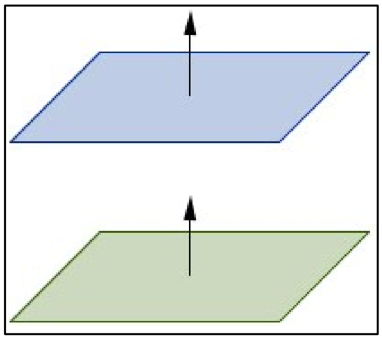
Planos coincidentes



Los vectores normales tienen la misma dirección y sus coordenadas deben ser proporcionales. También un punto del plano π debe pertenecer al plano π´.

Debe cumplirse que $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}=\dfrac{D}{D'}$

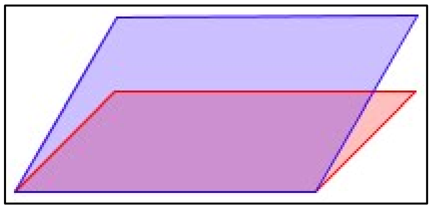
Planos paralelos



Los vectores normales tienen la misma dirección y sus coordenadas deben ser proporcionales y un punto del plano π **no** puede pertenecer al plano π´.

Debe cumplirse que $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}\neq\dfrac{D}{D'}$

Planos secantes



Los vectores normales tienen distinta dirección y sus coordenadas **no** son proporcionales.

Debe cumplirse que $\dfrac{A}{A'}\neq\dfrac{B}{B'} \; o \; \dfrac{B}{B'}\neq\dfrac{C}{C'}$

Ecuaciones implícitas de una recta

Según se ha visto en el apartado anterior, dos planos secantes se cortan en una recta. Por tanto, el sistema formado por las dos ecuaciones de los planos pueden considerarse como las ecuaciones de una recta.

Las ecuaciones implícitas de la recta son $r:\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$

Paso de ecuaciones implícitas a paramétricas

Veámoslo con un ejemplo.

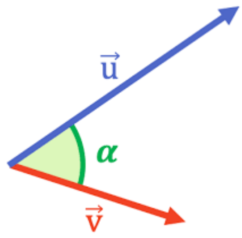
Sea la recta $r:\begin{cases} 3x-y-2z-6=0 \\ x+y+2z-2=0 \end{cases}$. Llamamos $z=\lambda \Rightarrow \begin{cases} 3x-y-2\lambda-6=0 \\ y=2-2\lambda-x \end{cases}$. Sustituimos en la primera ecuación y tenemos $3x-(2-2\lambda-x)-2\lambda-6=0 \Rightarrow 3x-2+2\lambda+x-2\lambda-6=0 \Rightarrow 4x-8=0$.

Despejamos “*x*” → $4x = 8 \Rightarrow \boxed{x = \frac{8}{4} = 2}$. Sustituimos en la expresión de “y” anterior y tenemos:

$y = 2 - 2\lambda - 2 \Rightarrow \boxed{y = -2\lambda}$. Tenemos las ecuaciones paramétricas $r: \begin{cases} x = 2 \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Producto escalar de dos vectores

Dado un vector libre $\vec{u}$ del espacio, se llama módulo de $\vec{u}$ a su longitud, y lo representaremos por $|\vec{u}|$. Se llama producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y se representa $\vec{u}\cdot\vec{v}$ a la expresión: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$, donde α es el menor ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

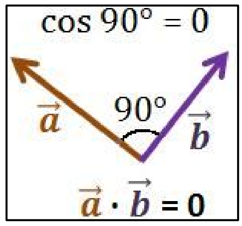


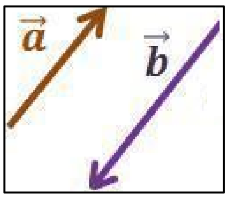
Si las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son, respectivamente, $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, entonces el producto escalar se puede expresar de la siguiente manera: $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3$.

Criterio de paralelismo y de perpendicularidad

Dos vectores son perpendiculares cuando forman un ángulo de 90º.

$$\vec{a} \text{ y } \vec{b} \text{ son perpendiculares } \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$





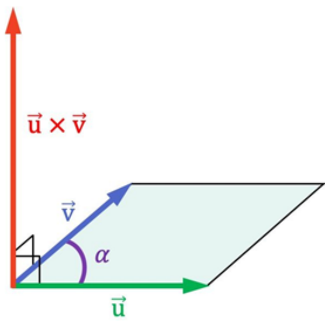
Cuando dos vectores $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ indican la misma dirección sus coordenadas son proporcionales:

$$\vec{a}\,||\,\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

Producto vectorial de dos vectores

Dados dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se llama producto vectorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ al vector que denotamos por $\vec{u}\times\vec{v}$ y que cumple las condiciones siguientes

- Tiene por módulo $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen\alpha$, donde α es el menor ángulo formado por los vectores.
- Tiene la dirección de la perpendicular al plano determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- Tiene el sentido de girar desde $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$ (regla del sacacorchos).



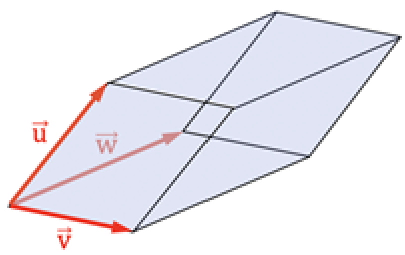
Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen coordenadas $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, entonces el producto vectorial se obtiene al desarrollar el determinante: $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$, donde $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ son, respectivamente los vectores (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1).

Producto mixto de tres vectores

Dados tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ su producto mixto es $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$.

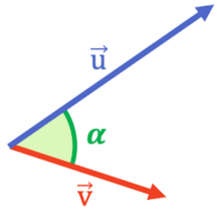
Si las coordenadas de los vectores son $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$, una forma de obtener su valor es con el valor del determinante:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$$



Ángulo de dos vectores

El coseno del ángulo formado por los vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ es:



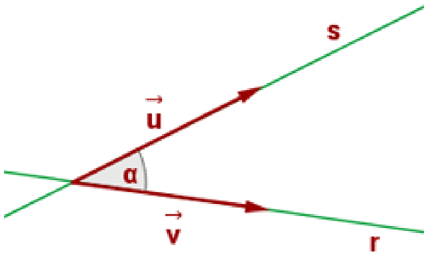
$$\cos\alpha=\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}\cdot\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}}$$

Se toma como ángulo α el menor de los formados por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ángulo de dos rectas

El ángulo α formado por dos rectas *r* y *s* es el mismo que el que forman sus vectores directores. Supongamos que éstos son, respectivamente, $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ $\Rightarrow$

$$\cos(r,s)=\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}\cdot\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}}.$$



Es posible que este valor salga positivo o negativo. En el primer caso el ángulo obtenido es agudo, y en el segundo es obtuso. Si queremos que el ángulo sea siempre agudo, entonces escribiremos:

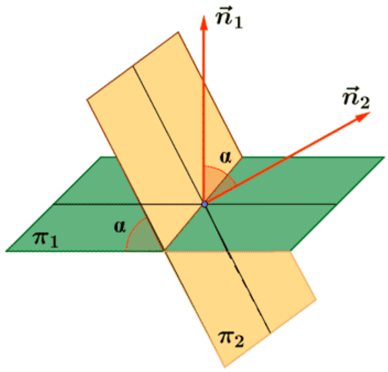
$$\cos(r,s)=\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{|u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3|}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}\cdot\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}}.$$

Ángulo de dos planos

Dados dos planos $\pi_1: Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi_2: A'x+B'y+C'z+D'=0$, el ángulo formado por ambos es el que forman sus vectores normales.

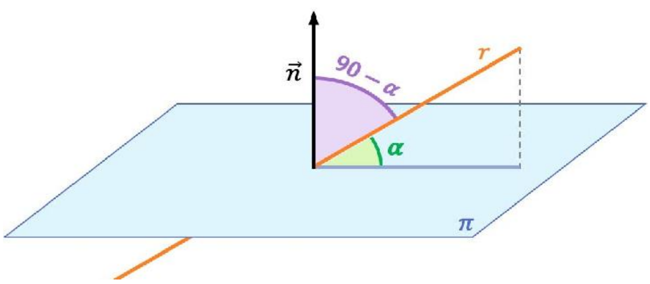
Si $\pi_1: Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow \vec{n_1}=(A,B,C)$ y

$\pi_2: A'x+B'y+C'z+D'=0 \Rightarrow \vec{n_2}=(A',B',C')$ por lo que:



$$\cos(\pi_1,\pi_2)=\cos(\vec{n_1},\vec{n_2})=\frac{|A\cdot A'+B\cdot B'+C\cdot C'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

Ángulo de recta y plano

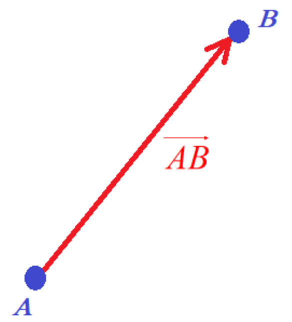


Dada una recta *r* y un plano π , el ángulo α formado por ambos se obtiene utilizando el ángulo β formado por el vector normal del plano y el director de la recta. El ángulo α = 90º – β.

Distancia entre dos puntos

Sean dos puntos $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ del espacio. Entonces las **coordenadas** o **componentes** del vector $\overrightarrow{AB}$ son:
$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$. La distancia entre los puntos es el módulo o longitud del vector $\overrightarrow{AB}$.

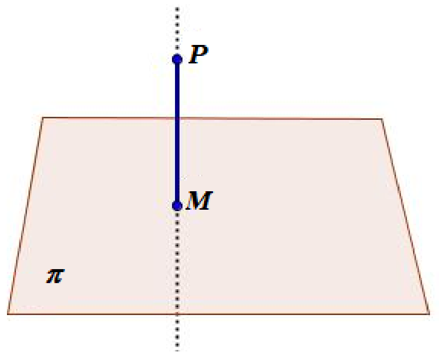
$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$



Distancia de un punto a un plano

Dados un punto $P(p_1,p_2,p_3)$ y un plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$, se llama distancia del punto P al plano π a la distancia de P a M, donde M es el punto de intersección de π con la recta que pasa por P y es perpendicular a π .
La distancia de P a π se puede obtener con la fórmula:

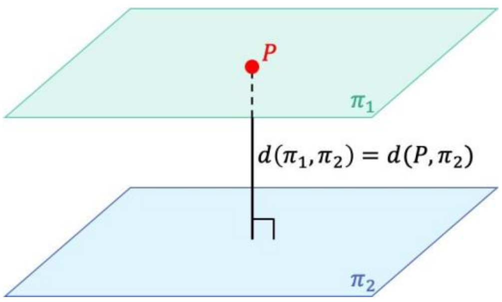
$$d(P,\pi)=\frac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



Distancia entre dos planos paralelos

Dados dos planos $\pi_1: Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi_2: A'x+B'y+C'z+D'=0$, se define la distancia entre ambos, $d(\pi_1,\pi_2)$, como la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro.

$$d(\pi_1,\pi_2)=d(P,\pi_2)=\frac{|A'p_1+B'p_2+C'p_3+D'|}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

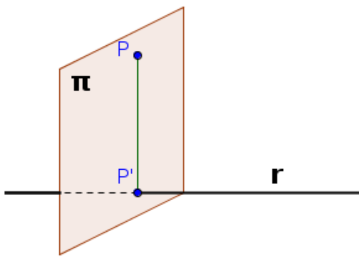


Distancia de un punto a una recta

Sin fórmula

Para determinar la distancia de un punto P a una recta *r*, $d(P,r)$, se determina el plano π perpendicular a la recta y que pasa por el punto P.
Determinamos el punto P´ de corte de recta y plano y se cumple que:

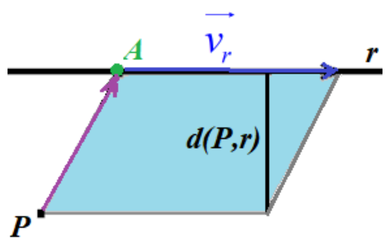
$$d(P,r)=d(P,P')=\left|\overrightarrow{PP'}\right|$$



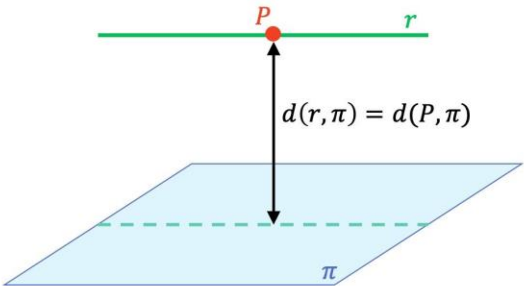
Con fórmula

Dado un punto $P(p_1,p_2,p_3)$ y una recta que pasa por $A(a_1,a_2,a_3)$ y tiene como vector director $\vec{v_r}=(u_1,u_2,u_3)$ la distancia de punto a recta se obtiene con la fórmula:

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{PA}\times\vec{v_r}\right|}{\left|\vec{v_r}\right|}$$



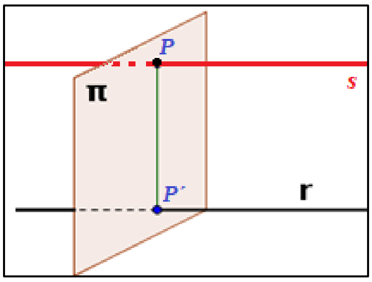
Distancia entre una recta y un plano paralelos



Se define esta distancia como la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. Así si la recta tiene ecuaciones continuas $r: \frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3}$ y el plano tiene ecuación implícita $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, entonces aplicando la fórmula de la distancia de un punto a un plano:

$$d(r,\pi) = d(P,\pi) = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia entre dos rectas paralelas

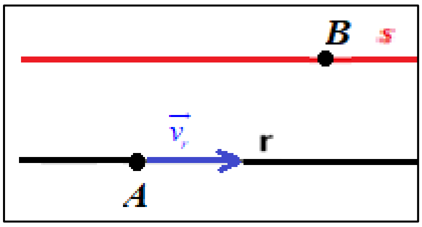


Sin fórmula

Se define esta distancia como la distancia de un punto de cualquiera de una recta a la otra. Determinamos el plano π perpendicular a ambas rectas y determinar los puntos P y P´ de corte de cada recta con el plano. La distancia entre ambas rectas es la distancia entre los puntos P y P´.

$$d(r,s) = d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right|$$

Con fórmula



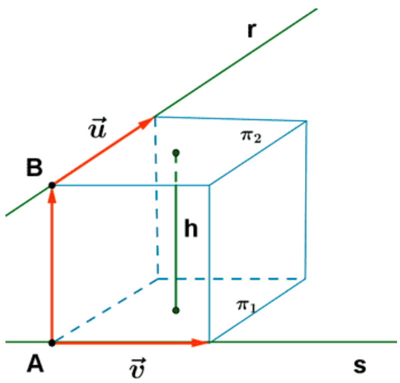
Si A es un punto y $\overrightarrow{v_r}$ un vector de la recta *r*. Siendo B un punto de la recta *s* la distancia se obtiene con la fórmula:

$$d(r,s) = d(B,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$$

Distancia entre dos rectas que se cruzan

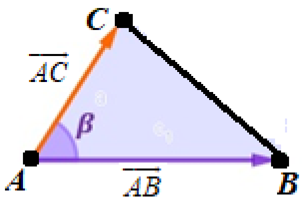
Para hallar la distancia entre dos rectas *r* y *s* que se cruzan, $d(r,s)$ utilizaremos la fórmula del volumen del paralelepípedo que forman los vectores directores de ambas rectas y el vector que une un punto A de la recta *s* con un punto B de la recta *r*. La distancia entre las rectas es la altura del paralelepípedo que se obtiene dividiendo el volumen del paralelepípedo ($\left[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right]$) entre el área de la base ($\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$).

$$d(r,s) = \frac{\left[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right]}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}$$



Área de un triángulo

Dados tres puntos del espacio $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ y $C(c_1,c_2,c_3)$, definen un triángulo de vértices A, B y C.



El área del triángulo ABC se obtiene con la fórmula:

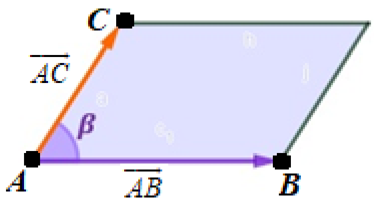
$$\acute{A}rea\ ABC = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}$$

Área de un paralelogramo

Dado un paralelogramo ABCD en el espacio, supongamos que las coordenadas de tres vértices son $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ y $C(c_1,c_2,c_3)$.

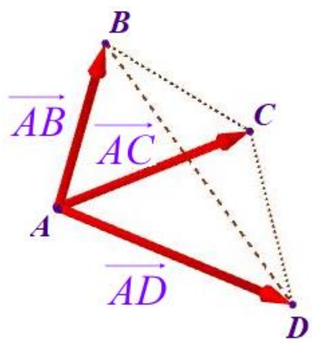
El área del paralelogramo ABCD se obtiene con la fórmula:

$$\acute{A}rea\ ABCD = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$



Volumen de un tetraedro

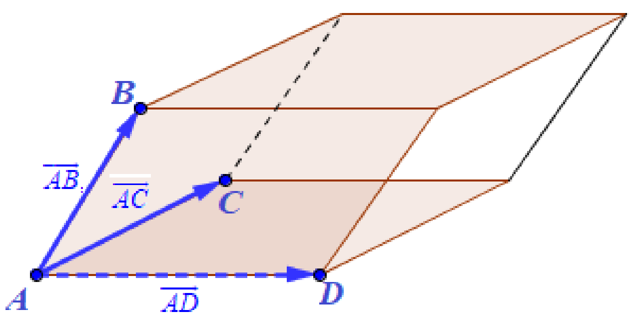
Sean $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$ y $D(d_1,d_2,d_3)$ cuatro puntos del espacio. Al unirlos entre sí de todas las maneras posibles, determinan un tetraedro cuyo volumen V es igual a la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]$.



$$Volumen\ tetraedro\ ABCD = \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right] = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{matrix}\right\|$$

Volumen de un paralelepípedo

Un paralelepípedo es un prisma cuyas bases son paralelogramos. El volumen de un paralelepípedo es igual al área de la base multiplicada por la altura. Podemos tomar como base cualquiera de las caras, y en este caso la altura será la distancia existente entre los planos que contienen a dos bases opuestas. Dados cuatro puntos del espacio $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$ y $D(d_1,d_2,d_3)$,



podemos realizar la construcción de la figura para obtener un paralelepípedo. Su volumen V es el valor absoluto del producto mixto.

$$Volumen\ paralelep\acute{\imath}pedo\ ABCD = \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right] = \left\|\begin{matrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{matrix}\right\|$$