PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA. CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)
c) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
d) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
e) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(**2.5 puntos**) Una fábrica de juguetes educativos produce juegos de ajedrez y dominó. Para fabricar un ajedrez se necesitan 2 kg de madera y 4 horas de trabajo, mientras que para fabricar un dominó se necesita 1 kg de madera y 1 hora de trabajo. Para que la producción sea rentable hay que hacer al día al menos 3 juegos y emplear como máximo 7 kg de madera y 9 horas de trabajo. Cada ajedrez se vende por 40 € y cada dominó por 15 €. ¿Cuántos juegos de ajedrez y dominó deben fabricarse diariamente para que la ganancia obtenida sea máxima? ¿Cuál será esa ganancia?

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}\ D=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

a) (**1.5 puntos**) Resuelva la siguiente ecuación matricial $A^t - X\cdot A = 3I_3$.

b) (**1 punto**) ¿Existe algún valor del parámetro a para el que se verifique $C^t\cdot D = B$? En caso afirmativo, calcule dicho valor.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Una empresa de fumigación sabe que los beneficios, en miles de euros, que obtiene en función de las hectáreas que le encargan fumigar mensualmente viene dada por la expresión

$$B(x) = -x^2 + 16x - 48$$

Además, por problemas de personal, la empresa no puede fumigar más de 10 hectáreas al mes.
a) (**0.75 puntos**) ¿Cuántas hectáreas tiene que fumigar al mes para que la empresa tenga beneficios?
b) (**0.75 puntos**) ¿Cuántas hectáreas tiene que fumigar para obtener el máximo beneficio mensual? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?
c) (**1 punto**) Si un mes ha obtenido un beneficio de 7000€, ¿cuántas hectáreas ha fumigado?

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) (**1 punto**) ¿Para qué valores de a y b la función es continua y derivable en $x=1$?
b) (**0.75 puntos**) Para $a=-3$ y $b=4$, calcule los extremos relativos de f.
c) (**0.75 puntos**) Para $a=-2$ y $b=3$, calcule el valor de la integral $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Juan realiza el siguiente juego: Lanza dos dados simultáneamente y si la suma es 2 o mayor que 7, gana y termina el juego. En caso contrario, tiene una segunda y última oportunidad lanzando de nuevo los dos dados y ganaría si la suma es mayor que 9.
a) (**1 punto**) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan gane lanzando una sola vez los dados?
b) (**1 punto**) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan gane en la segunda oportunidad?
c) (**0.5 puntos**) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan gane?

EJERCICIO 6

Una encuesta realizada a los clientes de un banco muestra que el 60% de sus clientes tiene un ordenador, el 50% tiene una tablet y el 20% posee un ordenador y una tablet. Se elige al azar un cliente de ese banco.
a) Calcule la probabilidad de que:
   i) (**0.5 puntos**) Tenga un ordenador o una tablet.
   ii) (**0.75 puntos**) No tenga tablet si no tiene ordenador.
   iii) (**0.75 puntos**) Tenga ordenador y no tenga tablet.
b) (**0.5 puntos**) ¿Son los sucesos "Tener un ordenador" y "Tener una tablet" incompatibles? ¿Son sucesos independientes?

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Se desea estimar la proporción de personas mayores de 45 años de una determinada ciudad que tienen presbicia (vista cansada). Para ello, se toma una muestra aleatoria de 540 personas mayores de 45 años, obteniéndose que 378 tienen presbicia.
a) (**1.5 puntos**) Obtenga un intervalo, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción poblacional de personas mayores de 45 años con presbicia en dicha ciudad.
b) (**1 punto**) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuántas personas se deberán seleccionar como mínimo para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 3%?

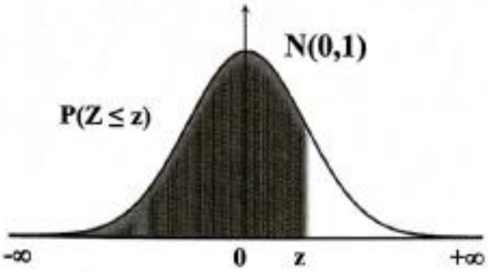
EJERCICIO 8

El peso en gramos de las tortugas terrestres de una reserva natural sigue una ley Normal de varianza $121g^2$. Para estimar el peso medio de las tortugas de la reserva, se toma una muestra de 10 tortugas, obteniéndose los siguientes datos:

980 1002 950 985 1100 1085 895 1000 912 1006

a) (**1.5 puntos**) Halle un intervalo de confianza para el peso medio de las tortugas con un nivel de confianza del 97%.
b) (**1 punto**) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para asegurar con un nivel de confianza del 94% que el error máximo cometido sea de 5g?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0,1), esté por debajo del valor z.

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(**2.5 puntos**) Una fábrica de juguetes educativos produce juegos de ajedrez y dominó. Para fabricar un ajedrez se necesitan 2 kg de madera y 4 horas de trabajo, mientras que para fabricar un dominó se necesita 1 kg de madera y 1 hora de trabajo. Para que la producción sea rentable hay que hacer al día al menos 3 juegos y emplear como máximo 7 kg de madera y 9 horas de trabajo. Cada ajedrez se vende por 40 € y cada dominó por 15 €. ¿Cuántos juegos de ajedrez y dominó deben fabricarse diariamente para que la ganancia obtenida sea máxima? ¿Cuál será esa ganancia?

Llamamos x = número de juegos de ajedrez, y = número de juegos de dominó.

La función a maximizar es la ganancia con las ventas: $G(x,y)=40x+15y$

Realizamos una tabla con los datos.

	Kg de madera	Horas de trabajo
Nº juegos de ajedrez (x)	2x	4x
Nº juegos de dominó (y)	y	y
TOTAL	$2x+y$	$4x+y$

Las restricciones son:

"Hay que hacer al día al menos 3 juegos" → $x+y\geq 3$

"Emplear como máximo 7 kg de madera y 9 horas de trabajo" → $2x+y\leq 7;\ 4x+y\leq 9$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y\leq 7 \\ 4x+y\leq 9 \\ x+y\geq 3 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+y=7$

x	$y=7-2x$
0	7
1	5

$4x+y=9$

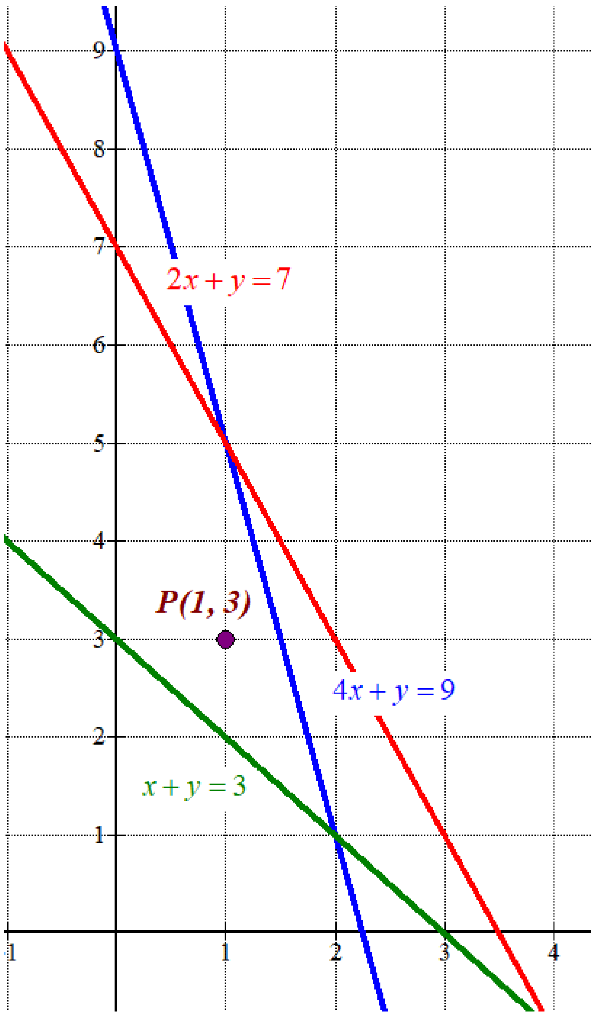
x	$y=9-4x$
0	9
1	5

$x+y=3$

x	$y=3-x$
0	3
3	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

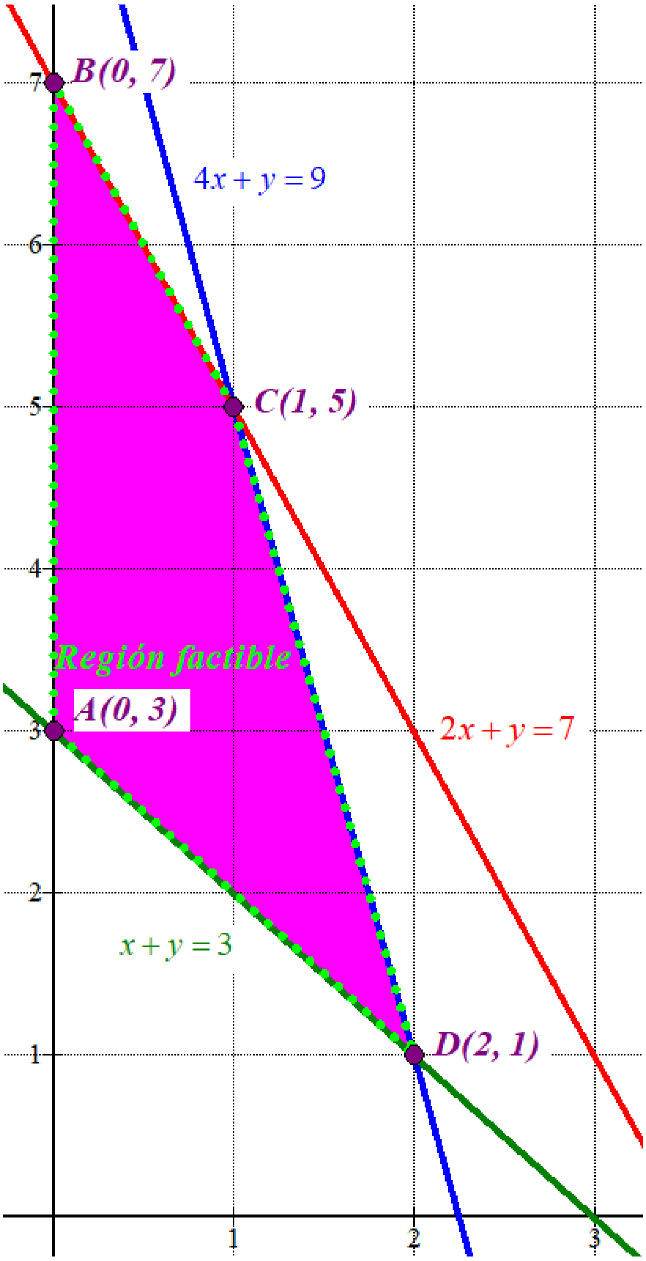


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+y\leq 7 \\ 4x+y\leq 9 \\ x+y\geq 3 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de la recta azul y la roja, y por encima de la recta verde.

Comprobamos que el punto *P(1, 3)* perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2+3\leq 7 \\ 4+3\leq 9 \\ 1+3\geq 3 \\ 1\geq 0;\ 3\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función objetivo $G(x,y)=40x+15y$ en cada vértice.

A(0, 3) → $G(0,3)=45$

B(0, 7) → $G(0,7)=105$

C(1, 5) → $G(1,5)=40+75=115$ ¡*Máximo*!

D(2, 1) → $G(2,1)=80+15=95$

Las ventas más altas se consiguen fabricando y vendiendo cada día 1 juego de ajedrez y 5 de dominó. Estas ventas máximas son de un importe de 115 €

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}7&-6&-2\\3&1&4\\-5&0&-4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&2&3\\5&3&4\\-4&0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&-3&0\end{pmatrix}\ D=\begin{pmatrix}a^2&0&-1\\1&-1&a\end{pmatrix}$$

a) (**1.5 puntos**) Resuelva la siguiente ecuación matricial $A^t - X\cdot A = 3I_3$.

b) (**1 punto**) ¿Existe algún valor del parámetro a para el que se verifique $C^t\cdot D = B$? En caso afirmativo, calcule dicho valor.

a) Despejamos X en la ecuación matricial $A^t - X\cdot A = 3I_3$.

$$A^t - X\cdot A = 3I_3 \Rightarrow -X\cdot A = 3I_3 - A^t \Rightarrow X\cdot A = -3I_3 + A^t \Rightarrow X = \left(-3I_3 + A^t\right)A^{-1}$$

Comprobamos que A es invertible y calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix}7&-6&-2\\3&1&4\\-5&0&-4\end{vmatrix} = -28+120+0-10-72-0 = 10 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix}7&3&-5\\-6&1&0\\-2&4&-4\end{pmatrix}}{10} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\4&-4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-6&0\\-2&-4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-6&1\\-2&4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3&-5\\4&-4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}7&-5\\-2&-4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}7&3\\-2&4\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}3&-5\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}7&-5\\-6&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}7&3\\-6&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-4&-24&-22\\-8&-38&-34\\5&30&25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/5&-12/5&-11/5\\-4/5&-19/5&-17/5\\1/2&3&5/2\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación y determinamos la expresión de X.

$$-3I_3 + A^t = -3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7&3&-5\\-6&1&0\\-2&4&-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&3&-5\\-6&-2&0\\-2&4&-7\end{pmatrix}$$

$$X = \left(-3I_3 + A^t\right)A^{-1} = \begin{pmatrix}4&3&-5\\-6&-2&0\\-2&4&-7\end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-4&-24&-22\\-8&-38&-34\\5&30&25\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-16-24-25 & -96-114-150 & -88-102-125\\ 24+8 & 144+76 & 132+68\\ 8-32-35 & 48-152-210 & 44-136-175\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-65 & -360 & -315\\ 32 & 220 & 200\\ -59 & -314 & -267\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13/2 & -36 & -63/2\\ 16/5 & 22 & 20\\ -59/10 & -157/5 & -267/10\end{pmatrix}}$$

b)

$$C^t\cdot D=B\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 4\\ -4 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$3\times\boxed{2\quad\cdot\quad 2}\times 3\longrightarrow 3\times 3$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a^2-2 & 2 & -1-2a\\ 2a^2-3 & 3 & -2-3a\\ -a^2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 4\\ -4 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2-2=2\\ 2=2\\ -1-2a=3\\ 2a^2-3=5\\ 3=3\\ -2-3a=4\\ -a^2=-4\\ 0=0\\ 1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=4\\ -2a=4\\ 2a^2=8\\ -3a=6\\ a^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=4\to a=\sqrt{4}=\pm 2\\ \boxed{a=\dfrac{4}{-2}=-2}\\ 2a^2=8\to a^2=4\\ a=\dfrac{6}{-3}=-2\end{cases}$$

Para $a = -2$ se cumple que $C^t\cdot D=B$.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Una empresa de fumigación sabe que los beneficios, en miles de euros, que obtiene en función de las hectáreas que le encargan fumigar mensualmente viene dada por la expresión

$$B(x) = -x^2 + 16x - 48$$

Además, por problemas de personal, la empresa no puede fumigar más de 10 hectáreas al mes.

a) (**0.75 puntos**) ¿Cuántas hectáreas tiene que fumigar al mes para que la empresa tenga beneficios?

b) (**0.75 puntos**) ¿Cuántas hectáreas tiene que fumigar para obtener el máximo beneficio mensual? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

c) (**1 punto**) Si un mes ha obtenido un beneficio de 7000€, ¿cuántas hectáreas ha fumigado?

La función es $B(x) = -x^2 + 16x - 48$, con $0 \le x \le 10$.

a) Averiguamos cuando los beneficios son nulos.

$$B(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 16x - 48 = 0 \Rightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 48}}{-2} = \frac{-16 \pm 8}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-16+8}{-2} = 4 \\ \dfrac{-16-8}{-2} = 12 \end{cases}$$

El intervalo de definición de la función es entre 0 y 10 hectáreas. Averiguamos el signo de la función entre 0 y 4, y entre 4 y 10

En (0, 4) tomamos *x = 1* y la función beneficios vale $B(1) = -1^2 + 16 - 48 = -31 < 0$. Entre 0 y 4 hectáreas la empresa tiene perdidas.

En (4, 10) tomamos *x = 5* y la función beneficios vale $B(5) = -5^2 + 80 - 48 = 7 > 0$. Entre 4 y 10 hectáreas la empresa tiene beneficios.

La empresa tiene beneficios fumigando al mes más de 4 hectáreas.

b) Utilizamos la derivada.

$$\left.\begin{array}{l} B'(x) = -2x + 16 \\ B'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x + 16 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 8}$$

En *x = 8* hay un punto crítico de la función. Averiguamos si es mínimo o máximo.

$$B''(x) = -2 \Rightarrow B''(8) = -2 < 0$$

Al ser la derivada segunda negativa en el punto crítico la función tiene un máximo.

Como $B(8) = -8^2 + 16 \cdot 8 - 48 = 16$ el beneficio máximo es de 16000 €.

c) Igualamos la función *B(x)* a 7 y averiguamos el valor de *x*.

$$B(x) = 7 \Rightarrow -x^2 + 16x - 48 = 7 \Rightarrow -x^2 + 16x - 55 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 55}}{-2} = \frac{-16 \pm 6}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-16+6}{-2} = 5 \in [0,10] \\ \dfrac{-16-6}{-2} = 16 \notin [0,10] \end{cases}$$

Obtiene 7000 € de beneficio cuando fumiga 5 hectáreas.

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) (**1 punto**) ¿Para qué valores de a y b la función es continua y derivable en $x=1$?
b) (**0.75 puntos**) Para $a=-3$ y $b=4$, calcule los extremos relativos de f.
c) (**0.75 puntos**) Para $a=-2$ y $b=3$, calcule el valor de la integral $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$.

a) Para que la función sea continua en $x = 1$ debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} ax^2+bx+1=a\cdot 1^2+b\cdot 1+1=a+b+1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{x}=\dfrac{2}{1}=2 \\ f(1)=a+b+1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow a+b+1=2 \Rightarrow \boxed{a=1-b}$$

La derivada de la función en $\mathbb{R}-\{1\}$ es $f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & si \quad x<1 \\ \dfrac{-2}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$.

Para que sea derivable en $x = 1$ deben de coincidir las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2ax+b=2a+b \\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2}{x^2}=\dfrac{-2}{1}=-2 \\ f'(1^-)=f'(1^+) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{2a+b=-2}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a=1-b \\ 2a+b=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1-b)+b=-2 \Rightarrow 2-2b+b=-2 \Rightarrow 2-b=-2 \Rightarrow \boxed{b=4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a=1-4=-3}$$

Los valores buscados son $a = -3$ y $b = 4$.

b) Para $a=-3$ y $b=4$ la función es continua y derivable.
Utilizamos la derivada para hallar sus puntos críticos.

$$f'(x)=\begin{cases} -6x+4 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{-2}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} -6x+4=0 \rightarrow x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} & si \quad x\leq 1 \\ \frac{-2}{x^2}=0 \rightarrow ¡\text{Im } posible! & si \quad x>1 \end{cases}$$

El único punto crítico es $x=\frac{2}{3}$, pero añadimos el valor $x = 1$ (cambio de definición).

En el intervalo $(-\infty, 2/3)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=0+4=4>0$. La función crece en $(-\infty, 2/3)$.

En el intervalo $(2/3, 1)$ tomamos $x = 0.8$ y la derivada vale $f'(0.8)=-4.8+4=-0.8<0$. La función decrece en $(2/3, 1)$.

En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{-2}{4}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en $x=\frac{2}{3}$.

c) Para $a=-2$ y $b=3$ la función es $f(x)=\begin{cases} -2x^2+3x+1 & si \quad x\leq 1 \\ \frac{2}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$.

Calculamos el valor de la integral $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$. Como está integral es de –1 a 3 obtenemos su valor como la suma de dos integrales definidas, debido al cambio de definición de la función en dicho intervalo (–1, 3).

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} -2x^2+3x+1dx + \int_{1}^{3} \frac{2}{x}dx =$$

$$=\left[-2\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1}+\left[2\ln x\right]_1^3=$$

$$=\left[-2\frac{1^3}{3}+3\frac{1^2}{2}+1\right]-\left[-2\frac{(-1)^3}{3}+3\frac{(-1)^2}{2}-1\right]+\left[2\ln 3\right]-\left[2\ln 1\right]=$$

$$=-\frac{2}{3}+\cancel{\frac{3}{2}}+1-\frac{2}{3}-\cancel{\frac{3}{2}}+1+2\ln 3=-\frac{4}{3}+2+\ln 9=\boxed{\frac{2}{3}+\ln 9\simeq 2.86}$$

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Juan realiza el siguiente juego: Lanza dos dados simultáneamente y si la suma es 2 o mayor que 7, gana y termina el juego. En caso contrario, tiene una segunda y última oportunidad lanzando de nuevo los dos dados y ganaría si la suma es mayor que 9.

a) (**1 punto**) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan gane lanzando una sola vez los dados?

b) (**1 punto**) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan gane en la segunda oportunidad?

c) (**0.5 puntos**) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan gane?

Llamamos A al suceso "sacar suma 2 o mayor que 7 al lanzar dos dados" y B a "sacar suma mayor que 9 al lanzar dos dados".

Al lanzar dos dados hay 36 resultados posibles: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, …..,56, 61, 62, 63, 64, 65, 66.

Estos resultados pueden sumar desde 2 hasta 12.
De todos ellos suman 2: 11.
Suman 8: 26,35,44, 53 y 62.
Suman 9: 36, 45, 54, 63
Suman 10: 46, 55, 64.
Suman 11: 56, 65.
Suman 12: 66.

Para que se realice el suceso A los dados deben sumar 2, 8, 9, 10, 11 o 12.

Aplicando la regla de Laplace: $P(A)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$

Para que se realice el suceso B los dados deben sumar 10, 11 o 12.

Aplicando la regla de Laplace: $P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

a) Juan gana en la primera tirada cuando se cumpla el suceso A.

$$P(\text{Juan gana en primera tirada})=P(A)=\boxed{\frac{4}{9}\simeq 0.44}$$

b) Para que Juan gane en la segunda tirada debe no cumplirse A y luego cumplirse B.

$$P(\text{Juan gana en segunda tirada})=P\left(A^C\cap B\right)=\{\text{Sucesos independintes}\}=$$

$$=P\left(A^C\right)P(B)=\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{6}=\boxed{\frac{5}{54}\simeq 0.093}$$

c) Para que Juan gane debe hacerlo en la primera tirada o en la segunda.

$$P(\text{Juan gane})=P\left(\text{Juan gana en 1ª tirada }\cup\text{Juan gana en 2ª tirada}\right)=$$

$$=P(A)+P\left(A^C\cap B\right)=\frac{4}{9}+\frac{5}{54}=\boxed{\frac{29}{54}\simeq 0.537}$$

EJERCICIO 6

Una encuesta realizada a los clientes de un banco muestra que el 60% de sus clientes tiene un ordenador, el 50% tiene una tablet y el 20% posee un ordenador y una tablet. Se elige al azar un cliente de ese banco.

a) Calcule la probabilidad de que:

i) (**0.5 puntos**) Tenga un ordenador o una tablet.

ii) (**0.75 puntos**) No tenga tablet si no tiene ordenador.

iii) (**0.75 puntos**) Tenga ordenador y no tenga tablet.

b) (**0.5 puntos**) ¿Son los sucesos "Tener un ordenador" y "Tener una tablet" incompatibles? ¿Son sucesos independientes?

a) Realizamos una tabla de contingencia.

	Tiene ordenador	No tiene ordenador	
Tiene tablet	**20**		**50**
No tiene tablet			
	60		**100**

Completamos la tabla.

	Tiene ordenador	No tiene ordenador	
Tiene tablet	**20**	**30**	**50**
No tiene tablet	**40**	**10**	**50**
	60	**40**	**100**

Con estos datos respondemos a las preguntas.

i. $P(Ordenador\ o\ tablet) = 1 - P(No\ tiene\ ordenador\ ni\ tablet) = 1 - \frac{10}{100} = \boxed{\frac{90}{100} = 0.9}$

ii. $P(No\ tablet / No\ ordenador) = \frac{P(No\ tablet\ y\ No\ ordenador)}{P(No\ ordenador)} = \frac{10}{40} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}$

iii. $P(Ordenador\ y\ no\ tablet) = \boxed{\frac{40}{100} = 0.4}$

b) Para que sean incompatibles deben tener intersección vacía y por tanto la probabilidad de la intersección vacía, pero $P(Ordenador\ y\ tablet) = \frac{20}{100} = 0.2 \neq 0$. No son compatibles.

Para que sean independientes debe cumplirse que $P(Ordenador\ y\ tablet) = P(Ordenador)P(tablet)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(Ordenador\ y\ tablet) = \frac{20}{100} \\ P(Ordenador)P(tablet) = \frac{60}{100} \cdot \frac{50}{100} = \frac{30}{100} \end{array}\right\} \text{No son iguales y no son independientes.}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Se desea estimar la proporción de personas mayores de 45 años de una determinada ciudad que tienen presbicia (vista cansada). Para ello, se toma una muestra aleatoria de 540 personas mayores de 45 años, obteniéndose que 378 tienen presbicia.

a) (**1.5 puntos**) Obtenga un intervalo, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción poblacional de personas mayores de 45 años con presbicia en dicha ciudad.

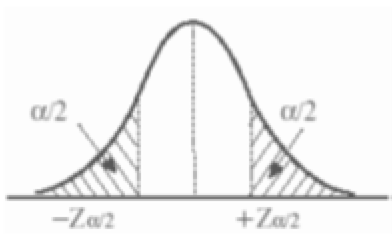
b) (**1 punto**) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuántas personas se deberán seleccionar como mínimo para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 3%?

n = 540. $pr = \frac{378}{540} = 0.7$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.7 = 0.3$

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	[illegible]
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	[illegible]
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	[illegible]
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	[illegible]
2,1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9850
[illegible]	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	[illegible]
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{540}} = 0.043$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.7 - 0.043,\quad 0.7 + 0.043) = (0.657,\ 0.743)$$

b) ¿n?

Con un nivel de confianza del 97% tenemos $z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.03 = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{n}} \Rightarrow \frac{0.03}{2.17} = \sqrt{\frac{0.21}{n}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{0.03}{2.17}\right)^2 = \frac{0.21}{n} \Rightarrow n = \frac{0.21}{\left(\frac{0.03}{2.17}\right)^2} = 1098.74$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 1099 personas mayores de 45 años.

EJERCICIO 8

El peso en gramos de las tortugas terrestres de una reserva natural sigue una ley Normal de varianza 121 g^2. Para estimar el peso medio de las tortugas de la reserva, se toma una muestra de 10 tortugas, obteniéndose los siguientes datos:

980 1002 950 985 1100 1085 895 1000 912 1006

a) (**1.5 puntos**) Halle un intervalo de confianza para el peso medio de las tortugas con un nivel de confianza del 97%.

b) (**1 punto**) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para asegurar con un nivel de confianza del 94% que el error máximo cometido sea de 5g?

a) X = El peso en gramos de las tortugas terrestres de una reserva natural

Como la desviación típica es la raíz de la varianza tenemos que $\sigma = \sqrt{121} = 11$ gramos

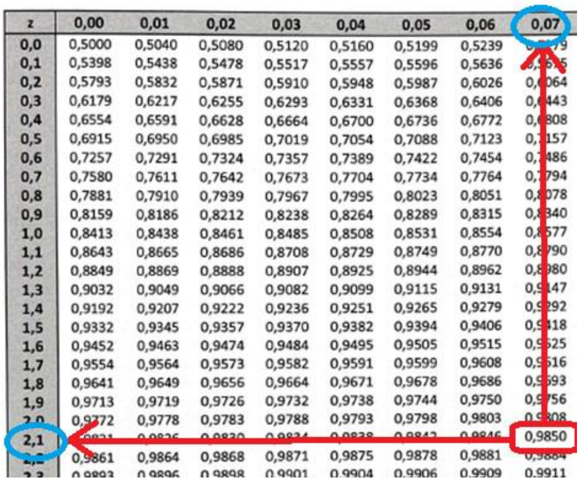
X = N(μ,11)

La media muestral es:

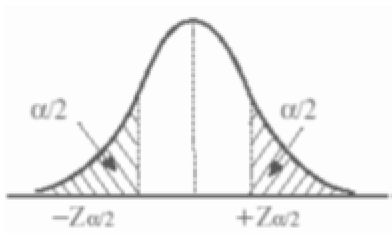
$$\bar{x} = \frac{980+1002+950+985+1100+1085+895+1000+912+1006}{10} = 991.5\,gramos$$

Con un nivel de confianza del 97%

1 – ∝ = 0,97 → ∝ = 0,03 →∝/2 = 0’015 →1 – ∝/2 = 0,985 → $z_{\alpha/2}$ **= 2.17**



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850
[illegible]	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911



Tamaño de muestra n = 10. Media muestral $\bar{x} = 991.5\,gramos$

Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{11}{\sqrt{10}} = 7.548$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(991.5 - 7.548,\ 991.5 + 7.548\right) = \left(983.952,\ 999.048\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 94%

1 – ∝ = 0,94 → ∝ = 0,06 →∝/2 = 0’03 →1 – ∝/2 = 0,97 → $z_{\alpha/2}$ **= 1.88**

$-\infty$ 0 z $+\infty$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	[illegible]
1,8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0,9699}$
[illegible]	[illegible]	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5 = 1.88 \cdot \frac{11}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{5}{1.88} = \frac{11}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{n} = \frac{11 \cdot 1.88}{5} \Rightarrow n = \left(\frac{11 \cdot 1.88}{5} \right)^2 = 17.11$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 18 tortugas.