PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan.** En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Calcula *a* y *b* sabiendo que $\lim_{x\to 0}\dfrac{a\,sen(x)+x\ln(x+1)+bx^2}{x^3+x^2}=2$ (donde *ln* denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea $f:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^x\left(cos(x)\ +\ sen(x)\right)$.

a) Halla los extremos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(2 puntos)**

b) Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=\dfrac{3\pi}{2}$. **(0,5 puntos)**

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3-x$. Calcula el área total de los recintos limitados por la gráfica de la función *f* y la recta normal a dicha gráfica en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t=\sqrt{1+x}$).

PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS

CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

La suma de los seguidores en una determinada red social de Alberto, Begoña y Carlos es de 13000 personas. Aunque Carlos perdiera una tercera parte de sus seguidores, todavía seguiría teniendo el doble de seguidores que tiene Alberto. Por otro lado, los seguidores de Alberto más la quinta parte de los seguidores de Begoña, son tantos como la mitad de los de Carlos. Calcula cuantos seguidores tiene cada uno.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de la matriz A según los valores de *m*. **(1 punto)**

b) Para $m = 0$ resuelve la ecuación $AX = B$, si es posible. **(1,5 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(0,2,3), B(m,0,1)$ y $C(2,1,2)$.

a) Halla los valores de *m*, sabiendo que el área del triángulo es $\frac{\sqrt{18}}{2}$ unidades cuadradas. **(1,5 puntos)**

b) Para $m = 0$, calcula el coseno del ángulo en el vértice A de dicho triángulo. **(1 punto)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el punto $P(2,0,-4)$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 9\alpha + 3\beta \\ y = -1 + 2\alpha \\ z = 3 + 4\alpha + \beta \end{cases}$.

a) Halla el punto simétrico del punto *P* respecto del plano π. **(1,75 puntos)**

b) Calcula la distancia del punto *P* al plano π. **(0,75 puntos)**

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\,sen(x)+x\ln(x+1)+bx^2}{x^3+x^2}=2$ (donde *ln* denota la función logaritmo neperiano).

Calculamos el valor del límite en función del valor de "a" y "b".

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\,sen(x)+x\ln(x+1)+bx^2}{x^3+x^2}=\frac{a\,sen(0)+0\ln(0+1)+b\cdot 0^2}{0^3+0^2}=\frac{0}{0}=$$

$$=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos(x)+\ln(x+1)+x\dfrac{1}{x+1}+2bx}{3x^2+2x}=$$

$$=\frac{a\cos(0)+\ln(0+1)+0\dfrac{1}{0+1}+2b\cdot 0}{3\cdot 0^2+2\cdot 0}=\frac{a}{0}=\ldots$$

Como el límite debe valer 2 el valor de "a" debe ser 0, pues en caso contrario el límite sería ∞.

Seguimos calculando el límite suponiendo que $a = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{0\cdot\cos(x)+\ln(x+1)+x\dfrac{1}{x+1}+2bx}{3x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}+2bx}{3x^2+2x}=$$

$$=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1(x+1)-1\cdot x}{(x+1)^2}+2b}{6x+2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+2b}{6x+2}=\frac{\dfrac{1}{0+1}+\dfrac{1}{(0+1)^2}+2b}{6\cdot 0+2}=\frac{2+2b}{2}=1+b$$

Tenemos que con $a = 0$ nos queda $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\,sen(x)+x\ln(x+1)+bx^2}{x^3+x^2}=1+b$. Igualamos este resultado a 2 y determinamos el valor de b.

$$1+b=2\Rightarrow \boxed{b=2-1=1}$$

Los valores buscados son $a = 0$ y $b = 1$.

EJERCICIO 2 **(2.5 puntos)**

Sea $f:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^x\left(cos(x)\ +\ sen(x)\right)$.

a) Halla los extremos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(2 puntos)**

b) Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=\frac{3\pi}{2}$. **(0,5 puntos)**

a) Comprobamos si existe algún punto crítico de la función.

$$f'(x)=e^x\left(cos(x)+sen(x)\right)+e^x\left(-sen(x)+\cos(x)\right)=e^x\left(cos(x)+\cancel{sen(x)}-\cancel{sen(x)}+\cos(x)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=e^x\left(2\cos(x)\right) \\ f'(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow e^x\left(2\cos(x)\right)=0\Rightarrow\cos(x)=0\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Estos son dos puntos críticos que pueden ser máximos, mínimos relativos o puntos de inflexión de la función.

Valoramos la función en los extremos del dominio de definición y en dichos valores y averiguaremos cuales son los extremos absolutos de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=e^0\left(cos(0)+sen(0)\right)=1 \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\pi/2}\left(cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=e^{\pi/2}\simeq 4.81 \\ f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=e^{3\pi/2}\left(cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)+sen\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right)=-e^{3\pi/2}\simeq -111.31 \text{ ¡Mínimo!} \\ f(2\pi)=e^{2\pi}\left(cos(2\pi)+sen(2\pi)\right)=e^{2\pi}\simeq 535.49 \text{ ¡Máximo!} \end{array}\right\}$$

La función alcanza su mínimo absoluto en $x=\frac{3\pi}{2}$, siendo dicho valor mínimo $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-e^{3\pi/2}\simeq -111.31$.

La función alcanza su máximo absoluto en $x=2\pi$, siendo dicho valor máximo $f(2\pi)=e^{2\pi}\simeq 535.49$.

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=\frac{3\pi}{2}$ tiene la expresión $y-f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} y-f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-e^{3\pi/2} \\ f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=e^{3\pi/2}\left(2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y-\left(-e^{3\pi/2}\right)=0\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y=-e^{3\pi/2}}$$

Este resultado es lógico pues en $x=\frac{3\pi}{2}$ la función tiene un mínimo relativo y la recta tangente debe ser horizontal.

Como la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=\frac{3\pi}{2}$ debe ser perpendicular a la recta tangente (es horizontal) dicha recta normal debe ser vertical y tiene ecuación $x=\frac{3\pi}{2}$.

EJERCICIO 3 **(2.5 puntos)**

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3-x$. Calcula el área total de los recintos limitados por la gráfica de la función *f* y la recta normal a dicha gráfica en el punto de abscisa *x* = *0*.

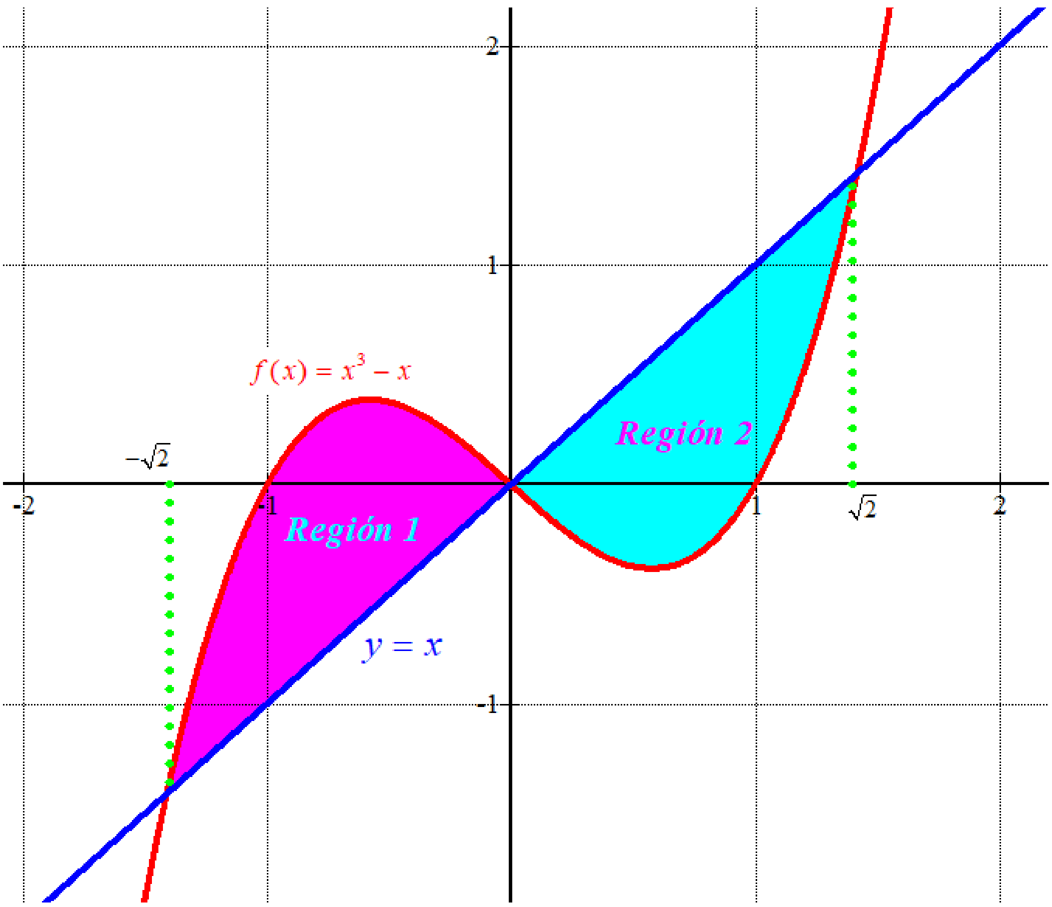
La ecuación de la recta normal a dicha gráfica en el punto de abscisa *x* = *0* tiene la expresión $y-f(0)=\frac{-1}{f'(0)}(x-0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-x\Rightarrow f(0)=0 \\ f'(x)=3x^2-1\Rightarrow f'(0)=3\cdot 0^2-1=-1 \\ y-f(0)=\dfrac{-1}{f'(0)}(x-0) \end{array}\right\}\Rightarrow y-0=\frac{-1}{-1}(x)\Rightarrow \boxed{y=x}$$

Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función y la recta normal.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-x \\ y=x \end{array}\right\}\Rightarrow x^3-x=x\Rightarrow x^3-2x=0\Rightarrow x\left(x^2-2\right)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\boxed{x=0} \\ x^2-2=0\Rightarrow\boxed{x=\pm\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

Como hay tres puntos de corte hay dos regiones: una entre $-\sqrt{2}$ y 0, la otra entre 0 y $\sqrt{2}$.



$$\text{Área de región } 1 = \int_{-\sqrt{2}}^{0} x^3 - x - x dx = \int_{-\sqrt{2}}^{0} x^3 - 2x dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^2 \right]_{-\sqrt{2}}^{0} =$$

$$= \left[\frac{0^4}{4} - 0^2 \right] - \left[\frac{\left(-\sqrt{2}\right)^4}{4} - \left(-\sqrt{2}\right)^2 \right] = -(1-2) = 1$$

$$\text{Área de región } 2 = \int_{0}^{\sqrt{2}} x - \left(x^3 - x\right) dx = \int_{0}^{\sqrt{2}} 2x - x^3 dx = \left[x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_{0}^{\sqrt{2}} =$$

$$= \left[\frac{\left(\sqrt{2}\right)^4}{4} - \left(\sqrt{2}\right)^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 0^2 \right] = 1 - 2 = 1$$

El área total es la suma de las áreas de la región 1 y 2. Área total = 2 unidades cuadradas.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t=\sqrt{1+x}$).

Calculamos la integral indefinida.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ t=\sqrt{1+x}\rightarrow t^2=1+x\\ t^2-1=x\rightarrow 2tdt=dx\end{array}\right\} = \int \frac{t^2-1}{\cancel{t}}2\cancel{t}dt = 2\int t^2-1dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right) = \frac{2t^3}{3}-2t=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ t=\sqrt{1+x}\end{array}\right\} = \boxed{\frac{2\left(\sqrt{1+x}\right)^3}{3}-2\sqrt{1+x}+K}$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \left[\frac{2\left(\sqrt{1+x}\right)^3}{3}-2\sqrt{1+x}\right]_0^3 =$$

$$=\left[\frac{2\left(\sqrt{1+3}\right)^3}{3}-2\sqrt{1+3}\right]-\left[\frac{2\left(\sqrt{1+0}\right)^3}{3}-2\sqrt{1+0}\right] = \frac{16}{3}-4-\frac{2}{3}+2 = \frac{14}{3}-2 = \boxed{\frac{8}{3}}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)
La suma de los seguidores en una determinada red social de Alberto, Begoña y Carlos es de 13000 personas. Aunque Carlos perdiera una tercera parte de sus seguidores, todavía seguiría teniendo el doble de seguidores que tiene Alberto. Por otro lado, los seguidores de Alberto más la quinta parte de los seguidores de Begoña, son tantos como la mitad de los de Carlos. Calcula cuantos seguidores tiene cada uno.

Llamamos x, y, z al número de seguidores de Alberto, Begoña y Carlos respectivamente.

“La suma de los seguidores en una determinada red social de Alberto, Begoña y Carlos es de 13000 personas” → $x+y+z=13000$

“Aunque Carlos perdiera una tercera parte de sus seguidores, todavía seguiría teniendo el doble de seguidores que tiene Alberto” → “las dos terceras partes de los seguidores de Carlos es el doble de seguidores de Alberto” → $\frac{2}{3}z=2x$

“Los seguidores de Alberto más la quinta parte de los seguidores de Begoña, son tantos como la mitad de los de Carlos” → $x+\frac{1}{5}y=\frac{1}{2}z$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=13000 \\ \frac{2}{3}z=2x \\ x+\frac{1}{5}y=\frac{1}{2}z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=13000 \\ 2z=6x \\ 10x+2y=5z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=13000 \\ z=3x \\ 10x+2y=5z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+3x=13000 \\ 10x+2y=15x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+y=13000 \\ 2y=5x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=13000-4x \\ 2y=5x \end{array}\right\} \Rightarrow 26000-8x=5x \Rightarrow 13x=26000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{26000}{13}=2000} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{y=13000-8000=5000} \\ \boxed{z=6000} \end{array}\right.$$

El número de seguidores de Alberto son 2000 personas, los seguidores de Begoña son 5000 y los de Carlos son 6000.

EJERCICIO 6 **(2.5 puntos)**

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de la matriz A según los valores de m. **(1 punto)**

b) Para $m = 0$ resuelve la ecuación $AX = B$, si es posible. **(1,5 puntos)**

a) El rango de la matriz A es 3, 2 o 1.

Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix}=3m^2+2+\cancel{3m}-\cancel{3m}-3-2m^2=m^2-1$$

$$|A|=0 \Rightarrow m^2-1=0 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow \boxed{m=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. Si $m \neq -1$ y $m \neq 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. Si $m=1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Obtenemos una matriz equivalente triangular utilizando el método de Gauss.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^{\text{a}} - \text{Fila 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^{\text{a}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^{\text{a}} - \text{Fila 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2.

CASO 3. Si $m=-1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Obtenemos una matriz equivalente triangular utilizando el método de Gauss.

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&3\\1&-1&2\\1&-1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }2^a+\text{Fila }1^a\\ \begin{array}{ccc}1&-1&2\\-1&1&3\\\hline 0&0&5\end{array}\to\text{Nueva Fila }2^a\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }3^a+\text{Fila }1^a\\ \begin{array}{ccc}1&-1&3\\-1&1&3\\\hline 0&0&6\end{array}\to\text{Nueva Fila }3^a\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&1&3\\0&0&5\\0&0&6\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}5.\text{Fila }3^a-6\cdot\text{Fila }2^a\\ \begin{array}{ccc}0&0&30\\0&0&-30\\\hline 0&0&0\end{array}\to\text{Nueva Fila }3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&1&3\\0&0&5\\0&0&0\end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2.

Resumiendo: Si $m\neq-1$ y $m\neq1$ el rango de A es 3 y si $m=-1$ o $m=1$ el rango de A es 2.

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

Comprobamos que existe la inversa de A y la calculamos.

Para $m=0$ la matriz A queda $A=\begin{pmatrix}0&1&3\\1&0&2\\1&0&3\end{pmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix}0&1&3\\1&0&2\\1&0&3\end{vmatrix}=0+2+0-0-3-0=-1\neq0$. Existe A^{-1}.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\3&2&3\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\2&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\3&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\3&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\3&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\3&2\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=-\begin{pmatrix}0&-3&2\\-1&-3&3\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&-2\\1&3&-3\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

Sustituimos en $X=A^{-1}B$ y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}0&3&-2\\1&3&-3\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\1&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2&-4\\2+3+3&2-6\\-1-1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{X=\begin{pmatrix}5&-4\\8&-4\\-2&2\end{pmatrix}}$$

$$3\times\boxed{3\quad\cdot\quad 3}\times2\longrightarrow3\times2$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(0,2,3), B(m,0,1)$ y $C(2,1,2)$.

a) Halla los valores de *m*, sabiendo que el área del triángulo es $\frac{\sqrt{18}}{2}$ unidades cuadradas. **(1,5 puntos)**

b) Para *m = 0*, calcula el coseno del ángulo en el vértice A de dicho triángulo. **(1 punto)**

a) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(m,0,1)-(0,2,3)=(m,-2,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(2,1,2)-(0,2,3)=(2,-1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ m & -2 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\cancel{2i}-4j-mk+4k+mj-\cancel{2i}=(m-4)j+(4-m)k=(0,m-4,4-m)$$

$$\acute{A}rea\ ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{0^2+(m-4)^2+(4-m)^2}}{2}=\frac{\sqrt{2(m-4)^2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}|m-4|$$

Igualamos esta área a $\frac{\sqrt{18}}{2}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}|m-4|=\frac{\sqrt{18}}{2}\Rightarrow\sqrt{2}|m-4|=\sqrt{18}\Rightarrow|m-4|=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{9}=3\Rightarrow\begin{cases} m-4=3\to\boxed{m=7}\\ m-4=-3\to\boxed{m=1}\end{cases}$$

b) Para *m = 0* el punto B queda $B(0,0,1)$.

Para obtener el ángulo en el vértice A utilizamos el producto escalar de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,0,1)-(0,2,3)=(0,-2,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(2,-1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}\Rightarrow$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{(0,-2,-2)(2,-1,-1)}{\sqrt{0^2+(-2)^2+(-2)^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{2+2}{\sqrt{8}\sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{48}}=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

El coseno del ángulo en el vértice A vale $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

EJERCICIO 8 **(2.5 puntos)**

Considera el punto $P(2,0,-4)$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 9\alpha + 3\beta \\ y = -1 + 2\alpha \\ z = 3 + 4\alpha + \beta \end{cases}$.

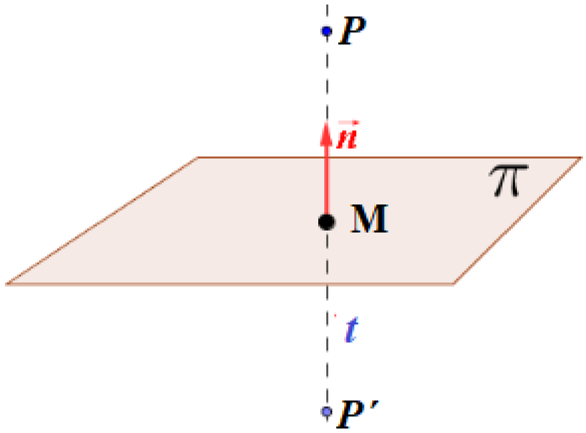
a) Halla el punto simétrico del punto P respecto del plano π. **(1,75 puntos)**

b) Calcula la distancia del punto P al plano π. **(0,75 puntos)**

a) Hallamos la ecuación implícita del plano.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 9\alpha + 3\beta \\ y = -1 + 2\alpha \\ z = 3 + 4\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} P(0,-1,3) \in \pi \\ \vec{u} = (9,2,4) \\ \vec{v} = (3,0,1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z-3 \\ 9 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 12y + 12 + 0 - 6z + 18 - 9y - 9 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + 3y - 6z + 21 = 0$$



Hallamos la ecuación de la recta t perpendicular al plano $\pi \equiv 2x + 3y - 6z + 21 = 0$ que pasa por el punto $P(2,0,-4)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(2,0,-4) \in t \\ \vec{v_t} = \vec{n} = (2,3,-6) \end{array}\right\} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\alpha \\ y = 3\alpha \\ z = -4 - 6\alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte M de la recta t y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} t \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\alpha \\ y = 3\alpha \\ z = -4 - 6\alpha \end{cases} \\ \pi \equiv 2x + 3y - 6z + 21 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2 + 2\alpha) + 3(3\alpha) - 6(-4 - 6\alpha) + 21 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 4\alpha + 9\alpha + 24 + 36\alpha + 21 = 0 \Rightarrow 49\alpha + 49 = 0 \Rightarrow 49\alpha = -49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2 = 0 \\ y = -3 \\ z = -4 + 6 = 2 \end{cases} \Rightarrow M(0,-3,2)$$

El punto simétrico P' se obtiene sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PM} = (0,-3,2)-(2,0,-4)=(-2,-3,6) \\ M=(0,-3,2) \end{array}\right\} \Rightarrow P' = (0,-3,2)+(-2,-3,6)=(-2,-6,8)$$

El punto simétrico del punto P respecto del plano π es $P'=(-2,-6,8)$.

b)

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x+3y-6z+21=0 \\ P(2,0,-4) \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi) = \frac{|4+0+24+21|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}} = \frac{49}{\sqrt{49}} = \frac{49}{7} = 7\ u$$

La distancia del punto P al plano π es de 7 unidades.

También podemos hallar esta distancia como el módulo del vector $\overrightarrow{PM}$.

$$d(P,\pi) = d(P,M) = \left|\overrightarrow{PM}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2+6^2} = \sqrt{49} = \boxed{7\ u}$$