



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2021-2022**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.
 - Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.
 - Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea f la función la función continua definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda x} - e^x - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \mu & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- Calcula λ y μ . **(1,25 puntos)**
- Para $\lambda = 2$, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$. **(1,25 puntos)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{(x+2)^3}$, para $x \neq -2$.

- Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . **(1,5 puntos)**
- Calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$. **(1 punto)**

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula $\int \frac{2x^3 + 2x^2 - 2x + 7}{x^2 + x - 2} dx$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = a|x|$, con $a > 0$.

Determina el valor de a para que el área total de los recintos limitados por las gráficas de ambas funciones sea de 9 unidades cuadradas.



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS
DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Discute el sistema según los valores de α . **(1,25 puntos)**
- Para $\alpha = 1$ resuelve el sistema y da una solución del mismo diferente de la solución trivial, si es posible. **(1,25 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el sistema:

$$\begin{cases} x - my - 2z = m \\ x + y + z = 2m \\ x + 2y + mz = 3m \end{cases}$$

- Discute el sistema según los valores de m . **(1,75 puntos)**
- Para $m = 1$ resuelve el sistema, si es posible. **(0,75 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Sea el plano $\pi \equiv 2x + y - 2z - 2 = 0$.

- Halla las ecuaciones de los planos paralelos a π que distan 2 unidades de dicho plano. **(1,5 puntos)**
- Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados. **(1 punto)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv x = 1 - y = z$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ 3x - y + z = -2 \end{cases}$.

- Estudia la posición relativa de r y s . **(1,5 puntos)**
- Calcula la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r . **(1 punto)**

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea f la función continua definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda x} - e^x - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \mu & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Calcula λ y μ . (1,25 puntos)

b) Para $\lambda = 2$, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$. (1,25 puntos)

a) La función debe ser continua en $x = 0$ y para ello debe cumplirse que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Calculamos el valor del límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda x} - e^x - x}{x^2} = \frac{e^0 - e^0 - 0}{0^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda e^{\lambda x} - e^x - 1}{2x} = \frac{\lambda e^0 - e^0 - 1}{2 \cdot 0} = \frac{\lambda - 1 - 1}{0} = \frac{\lambda - 2}{0} = \dots \end{aligned}$$

Existen dos posibilidades: $\lambda - 2 = 0$ o $\lambda - 2 \neq 0$.

Si $\lambda - 2 \neq 0$ entonces el límite anterior queda:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\lambda - 2}{0} = \infty$$

Pero entonces tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty \\ f(0) = \mu \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow \infty = \mu. \text{ Esto no es posible.}$$

Por lo que debe ser $\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$. Y seguimos calculando el límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x - x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - e^x - 1}{2x} = \frac{2-1-1}{0} = \frac{0}{0} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x} - e^x}{2} = \frac{4e^0 - e^0}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

El valor de λ es 2 y el límite vale $3/2$.

Aplicamos la continuidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2} \\ f(0) = \mu \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2} = \mu$$

Los valores buscados son $\lambda = 2$ y $\mu = \frac{3}{2}$

b) Para $\lambda = 2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - e^x - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \mu & \text{si } x = 0 \end{cases}$. En el entorno de $x = 1$ la

función es $f(x) = \frac{e^{2x} - e^x - x}{x^2}$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$ es $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^x - x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2e^{2x} - e^x - 1)x^2 - 2x(e^{2x} - e^x - x)}{x^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{(2e^2 - e^1 - 1) \cdot 1^2 - 2(e^2 - e^1 - 1)}{1^4} = \frac{2e^2 - e - 1 - 2e^2 + 2e + 2}{1} = e + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = \frac{e^2 - e^1 - 1}{1^2} = e^2 - e - 1 \\ f'(1) = e + 1 \\ y - f(1) = f'(1)(x-1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - (e^2 - e - 1) = (e + 1)(x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = (e + 1)x - e - 1 + e^2 - e - 1 \Rightarrow \boxed{y = (e + 1)x + e^2 - 2e - 2}$$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{(x+2)^3}$, para $x \neq -2$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f . **(1,5 puntos)**

b) Calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$. **(1 punto)**

a) El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-2\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{(x+2)^3} = \frac{(-2)^4 - 3(-2)^2 + 2}{(-2+2)^3} = \frac{16 - 12 + 2}{0} = \frac{6}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{(x+2)^3} = \{\text{Grado del denominador} < \text{grado del numerador}\} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4 - 3x^2 + 2}{(x+2)^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x(x+2)^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4}{x^4} - 3\frac{x^2}{x^4} + \frac{2}{x^4}}{\frac{x(x+2)^3}{x^4}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}}{\left(\frac{x}{x} + \frac{2}{x}\right)^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^3} = \frac{1 - 0 + 0}{(1 + 0)^3} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{(x+2)^3} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2 - x(x+2)^3}{(x+2)^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2 - x(x^3 + 8 + 6x^2 + 12x)}{(x+2)^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2 - x^4 - 8x - 6x^3 - 12x^2}{(x+2)^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^3 - 15x^2 + 2 - 8x}{(x+2)^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^3}{x^3} = -6$$

La asíntota oblicua es $y = x - 6$

b) La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es

$$y - f(0) = \frac{-1}{f'(0)}(x - 0).$$

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{(x+2)^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x+2)^3 - 3(x+2)^2(x^4 - 3x^2 + 2)}{(x+2)^6}$$

$$f'(0) = \frac{(4 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0)(0+2)^3 - 3(0+2)^2(0^4 - 3 \cdot 0^2 + 2)}{(0+2)^6} = \frac{-24}{64} = -\frac{3}{8}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = \frac{0^4 - 3 \cdot 0^2 + 2}{(0+2)^3} = \frac{1}{4} \\ f'(0) = -\frac{3}{8} \\ y - f(0) = \frac{-1}{f'(0)}(x - 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{4} = \frac{-1}{-\frac{3}{8}}x \Rightarrow y - \frac{1}{4} = \frac{8}{3}x \Rightarrow \boxed{y = \frac{8}{3}x + \frac{1}{4}}$$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula $\int \frac{2x^3 + 2x^2 - 2x + 7}{x^2 + x - 2} dx$.

$$\int \frac{2x^3 + 2x^2 - 2x + 7}{x^2 + x - 2} dx = \int \frac{2x^3 + 2x^2 - 4x}{x^2 + x - 2} + \frac{2x + 7}{x^2 + x - 2} dx = \int \frac{2x(x^2 + x - 2)}{x^2 + x - 2} + \frac{2x + 7}{x^2 + x - 2} dx =$$

$$= \int 2x + \frac{2x + 7}{x^2 + x - 2} dx = x^2 + \int \frac{2x + 7}{x^2 + x - 2} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1 + 3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1 - 3}{2} = -2 = x \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$$

$$\frac{2x + 7}{x^2 + x - 2} = \frac{2x + 7}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} \Rightarrow \frac{2x + 7}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{A(x + 2) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 7 = A(x + 2) + B(x - 1) \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow 3 = -3B \rightarrow B = -1 \\ x = 1 \rightarrow 9 = 3A \rightarrow A = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{x^2 + x - 2} = \frac{3}{x - 1} - \frac{1}{x + 2}$$

$$\dots = x^2 + \int \frac{3}{x - 1} dx - \int \frac{1}{x + 2} dx = x^2 + 3 \int \frac{1}{x - 1} dx - \int \frac{1}{x + 2} dx = \boxed{x^2 + 3 \ln|x - 1| - \ln|x + 2| + K}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = a|x|$, con $a > 0$.

Determina el valor de a para que el área total de los recintos limitados por las gráficas de ambas funciones sea de 9 unidades cuadradas.

Hallo los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = a|x| \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = a|x| \Rightarrow \begin{cases} x^2 = ax \rightarrow x^2 - ax = 0 \rightarrow x(x-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - a = 0 \Rightarrow x = a \end{cases} \\ x^2 = -ax \rightarrow x^2 + ax = 0 \rightarrow x(x+a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + a = 0 \Rightarrow x = -a \end{cases} \end{cases}$$

Como a es positivo tenemos dos regiones: una entre $-a$ y 0 y otra entre 0 y a .

Calculamos el área de cada una de estas regiones.

$$\begin{aligned} \text{Área región 1} &= \left| \int_{-a}^0 x^2 - (-ax) dx \right| = \left| \int_{-a}^0 x^2 + ax dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} + a \frac{x^2}{2} \right]_{-a}^0 \right| = \\ &= \left| \left[\frac{0^3}{3} + a \frac{0^2}{2} \right] - \left[\frac{(-a)^3}{3} + a \frac{(-a)^2}{2} \right] \right| = \left| \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right| = \left| \frac{2a^3 - 3a^3}{6} \right| = \left| \frac{-a^3}{6} \right| = \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área región 2} &= \left| \int_0^a x^2 - ax dx \right| = \left| \int_0^a x^2 - ax dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - a \frac{x^2}{2} \right]_0^a \right| = \\ &= \left| \left[\frac{a^3}{3} - a \frac{a^2}{2} \right] - \left[\frac{0^3}{3} - a \frac{0^2}{2} \right] \right| = \left| \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right| = \left| \frac{2a^3 - 3a^3}{6} \right| = \left| \frac{-a^3}{6} \right| = \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

El área total es la suma de las dos áreas parciales.

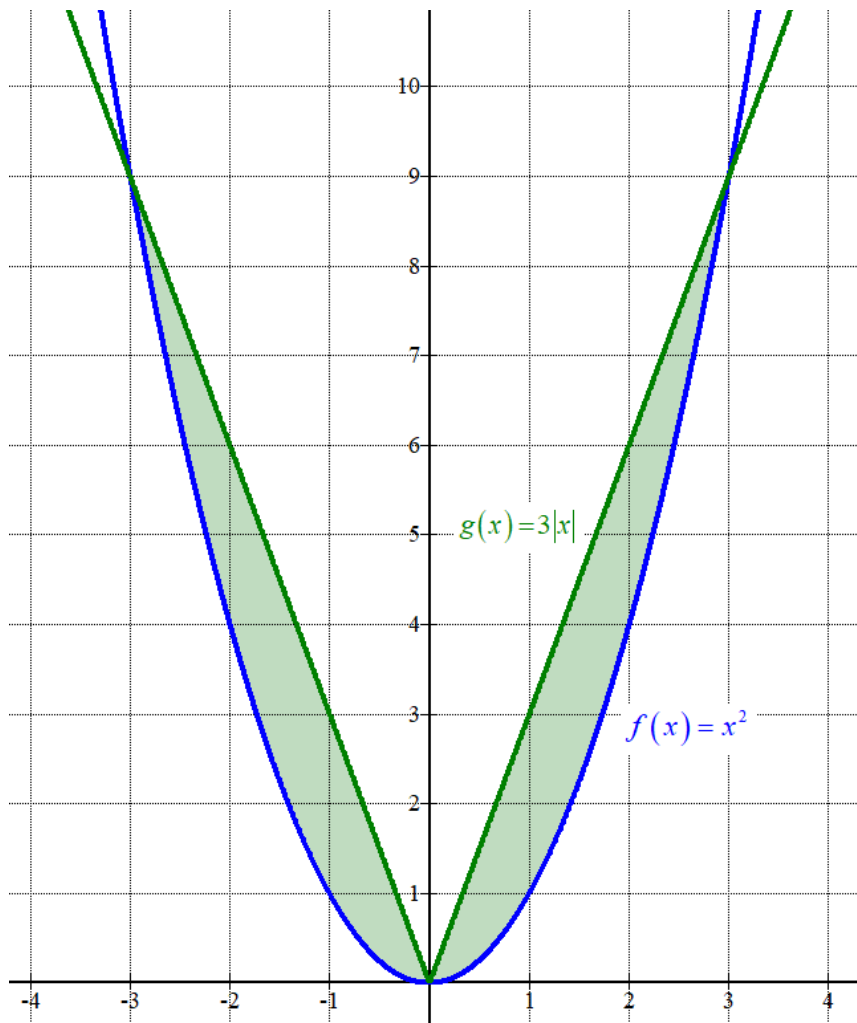
$$\text{Área total} = \frac{a^3}{6} + \frac{a^3}{6} = \frac{2a^3}{6} = \boxed{\frac{a^3}{3}}$$

El área total tiene un valor de $\frac{a^3}{3}$.

Como buscamos que el área valga 9 obtenemos el valor de “a”.

$$\frac{a^3}{3} = 9 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = \sqrt[3]{27} = 3$$

El valor buscado es $a = 3$.



BLOQUE B**EJERCICIO 5 (2.5 puntos)**

Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de α . **(1,25 puntos)**

b) Para $\alpha = 1$ resuelve el sistema y da una solución del mismo diferente de la solución trivial, si es posible. **(1,25 puntos)**

a) El sistema es $AX = 0$, siendo A la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, X es la matriz

de las incógnitas $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y 0 es la matriz columna nula $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha^2 + \alpha + 0 + \alpha - \alpha^2 - 0 = -2\alpha^2 + 2\alpha$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2\alpha^2 + 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha(-\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\alpha + 1 = 0 \rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

CASO 1. Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$

En este caso $|A| \neq 0$ y existe la inversa de A.

La solución del sistema $AX = 0$ es $X = A^{-1} \cdot 0 = 0$. El sistema tiene solución única y dicha solución es la trivial $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$

CASO 2. $\alpha = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y el sistema no tiene solución única.

Resolvemos el sistema que nos queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} y + z = 0 \\ z = y \end{matrix} \right\} \Rightarrow y + y = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 0} \Rightarrow \text{Solución: } x = t, y = z = 0$$

El sistema tiene infinitas soluciones: $x = t, y = z = 0$.

CASO 3. $\alpha = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y el sistema no tiene solución única.

Resolvemos el sistema que nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z + y + z = 0 \\ -z - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \text{Soluciones: } x = -t, y = 0; z = t$$

El sistema tiene infinitas soluciones: $x = -t, y = 0; z = t$.

Resumiendo: Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ el sistema tiene una única solución y si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones.

b) Para $\alpha = 1$ ya hemos resuelto el sistema en el apartado anterior y sus soluciones son $x = -t, y = 0; z = t$.

Una solución distinta de la trivial se obtiene dando a t un valor distinto de cero. Por ejemplo tomamos $t = 1$ y una solución no trivial es $x = -1, y = 0; z = 1$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el sistema:

$$\begin{cases} x - my - 2z = m \\ x + y + z = 2m \\ x + 2y + mz = 3m \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores de m . **(1,75 puntos)**
 b) Para $m = 1$ resuelve el sistema, si es posible. **(0,75 puntos)**

a) La matriz de coeficientes A y la matriz ampliada A/B asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -m & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & -m & -2 & m \\ 1 & 1 & 1 & 2m \\ 1 & 2 & m & 3m \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -m & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = m - m - 4 + 2 + m^2 - 2 = m^2 - 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \sqrt{4} = \pm 2$$

Existen tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. Si $m \neq 2$ y $m \neq -2$

En este caso $|A| \neq 0$ y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

CASO 2. Si $m = 2$

En este caso $|A| = 0$ y el rango de A no es 3. Será 2 o 1.

Averiguamos el rango de A y el de A/B utilizando el método de Gauss para triangular.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \\ -1 \quad 2 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 1}^a \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 6 \\ -1 \quad 2 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila 3}^a - 4 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad 12 \quad 12 \quad 12 \\ 0 \quad -12 \quad -12 \quad -8 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad -2 \quad -2 \quad 2}^{A/B} \\ 0 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. El sistema no tiene solución.

CASO 3. Si $m = -2$

En este caso $|A| = 0$ y el rango de A no es 3. Será 2 o 1.

Averiguamos el rango de A y el de A/B utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad -4 \\ -1 \quad -2 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 3 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 1}^a \\ 1 \quad 2 \quad -2 \quad -6 \\ -1 \quad -2 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 2 \quad -2 \quad -2}^{A/B} \\ 0 \quad -1 \quad 3 \quad -2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad -4}_A \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. El sistema no tiene solución.

b) Para $m = 1$ estamos en el caso 1 y el sistema tiene solución única.

$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = -1 \\ \hline 2y + 3z = 1 \rightarrow \text{Nueva Ecuación 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 1}^a \\ x + 2y + z = 3 \\ -x + y + 2z = -1 \\ \hline 3y + 3z = 2 \rightarrow \text{Nueva Ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 2y + 3z = 1 \\ 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación 3}^a - 3 \cdot \text{Ecuación 2}^a \\ 6y + 6z = 4 \\ -6y - 9z = -3 \\ \hline -3z = 1 \rightarrow \text{Nueva Ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 2y + 3z = 1 \\ -3z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 2y + 3z = 1 \\ \boxed{z = -\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 2\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 \\ 2y + 3\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + \frac{2}{3} = 1 \\ 2y - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 - \frac{2}{3} \\ 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = \frac{1}{3} \\ y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}}$$

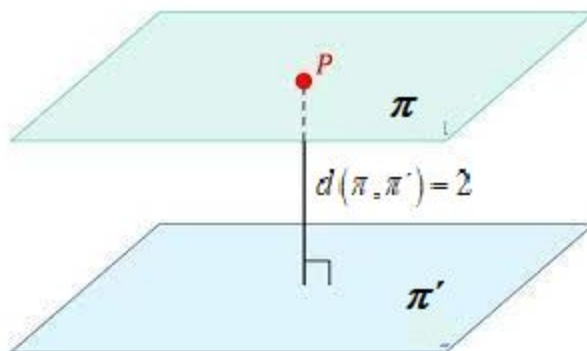
La solución del sistema es $x = \frac{4}{3}$; $y = 1$; $z = \frac{-1}{3}$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Sea el plano $\pi \equiv 2x + y - 2z - 2 = 0$.

- a) Halla las ecuaciones de los planos paralelos a π que distan 2 unidades de dicho plano. **(1,5 puntos)**
 b) Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados. **(1 punto)**

- a) Un plano π' paralelo a $\pi \equiv 2x + y - 2z - 2 = 0$ tiene ecuación $\pi' \equiv 2x + y - 2z + D = 0$.
 La distancia entre los planos es la distancia entre un punto P del plano π y el plano π' .

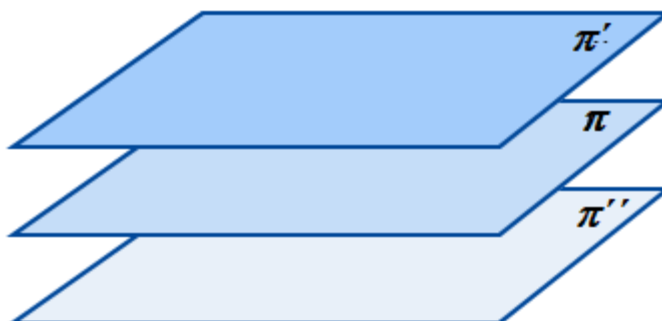


$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y - 2z - 2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 0 - 2z - 2 = 0 \Rightarrow -2z = 2 \Rightarrow z = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow P(0, 0, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv 2x + y - 2z + D = 0 \\ P(0, 0, -1) \in \pi \\ d(\pi, \pi') = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi, \pi') = d(P, \pi') = \frac{|0 + 0 + 2 + D|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|2 + D|}{\sqrt{9}} = 2 \Rightarrow \frac{|2 + D|}{3} = 2 \Rightarrow |2 + D| = 6 \Rightarrow \begin{cases} 2 + D = 6 \Rightarrow D = 4 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv 2x + y - 2z + 4 = 0} \\ 2 + D = -6 \Rightarrow D = -8 \Rightarrow \boxed{\pi'' \equiv 2x + y - 2z - 8 = 0} \end{cases}$$

Existen dos planos que cumplen las condiciones pedidas: $\pi' \equiv 2x + y - 2z + 4 = 0$ y $\pi'' \equiv 2x + y - 2z - 8 = 0$.



- b) Hallamos los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y - 2z - 2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 0 - 2z - 2 = 0 \Rightarrow 2z = -2 \Rightarrow z = -1 \Rightarrow A(0, 0, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y - 2z - 2 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + y - 2 \cdot 0 - 2 = 0 \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0, 2, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y - 2z - 2 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 0 - 2 \cdot 0 - 2 = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow C(1, 0, 0)$$

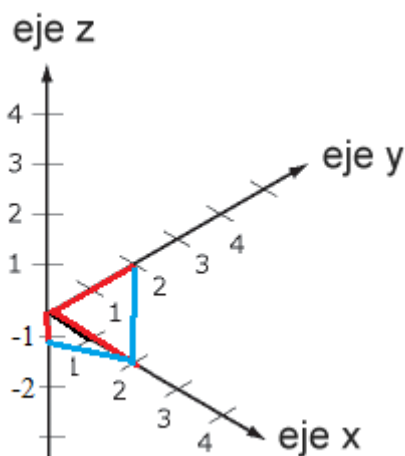
El tetraedro tiene vértices $O(0, 0, 0)$, $A(0, 0, -1)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(1, 0, 0)$.

El volumen de dicho tetraedro es la sexta parte del producto mixto de los vectores que unen el punto O con el resto de puntos (A , B y C).

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (0, 0, -1) - (0, 0, 0) = (0, 0, -1) \\ \overrightarrow{OB} = (0, 2, 0) - (0, 0, 0) = (0, 2, 0) \\ \overrightarrow{OC} = (1, 0, 0) - (0, 0, 0) = (1, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{Volumen } OABC = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} u^3$$

El volumen del tetraedro es $\frac{1}{3} u^3$.



EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv x = 1 - y = z$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ 3x - y + z = -2 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de r y s . **(1,5 puntos)**

b) Calcula la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r . **(1 punto)**

a) Obtenemos los vectores directores de las rectas.

$$r \equiv x = 1 - y = z \Rightarrow r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(0,1,0) \\ \vec{u}_r = (1, -1, 1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ 3x - y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ z = -2 - 3x + y \end{cases} \Rightarrow x + y - 3(-2 - 3x + y) = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y + 6 + 9x - 3y = 4 \Rightarrow 10x - 2y = -2 \Rightarrow 5x - y = -1 \Rightarrow 5x + 1 = y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = -2 - 3x + 5x + 1 \Rightarrow z = -1 + 2x \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 5t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} Q_s(0,1,-1) \\ \vec{v}_s = (1, 5, 2) \end{cases}$$

Los vectores directores $\vec{u}_r = (1, -1, 1)$ y $\vec{v}_s = (1, 5, 2)$ no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan.

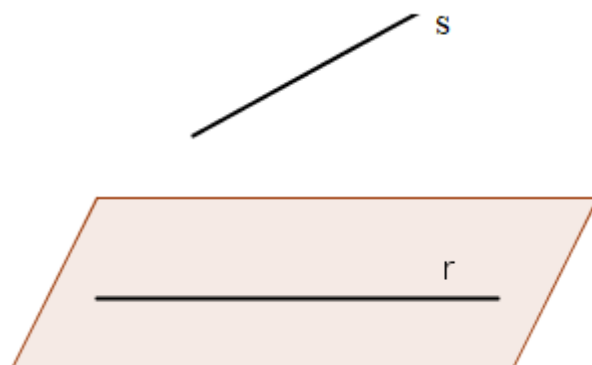
$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1, -1, 1) \\ \vec{v}_s = (1, 5, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{5} \neq \frac{1}{2}$$

Averiguamos si se cortan o cruzan comprobando si el producto mixto $\left[\overrightarrow{P_r Q_s}, \vec{u}_r, \vec{v}_s \right]$ es nulo

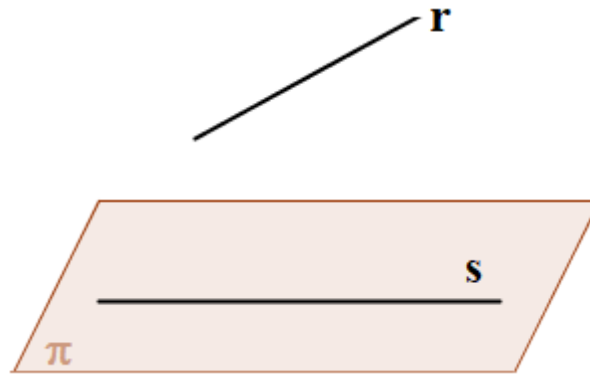
o no.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, 1, -1) - (0, 1, 0) = (0, 0, -1) \\ \vec{u}_r = (1, -1, 1) \\ \vec{v}_s = (1, 5, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{P_r Q_s}, \vec{u}_r, \vec{v}_s \right] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -5 - 1 = -6 \neq 0$$

Las rectas r y s se cruzan.



b) Nos piden hallar la ecuación del plano π del dibujo.



Este plano tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene el punto Q_s de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} Q_s(0,1,-1) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (1,-1,1) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (1,5,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + y - \cancel{1} + 5z + 5 + z + \cancel{1} - 2y + 2 - 5x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv -7x - y + 6z + 7 = 0}$$

La ecuación del plano pedido es $\pi \equiv -7x - y + 6z + 7 = 0$.