



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (3 puntos)

a) (1,5 puntos) Resuelva el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) (1,5 puntos) Sabiendo que el determinante de la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

es 4, es decir $|A| = 4$, determine el determinante de la matriz B que aparece a continuación:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3a+k & x+5 \\ 2 & 3b+k & y+5 \\ 2 & 3c+k & z+5 \end{pmatrix}$$

2. (1,5 puntos)

a) (0,5 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 1)$ y $\vec{w} = (0, 2, 1)$, determine el volumen del paralelepípedo que definen esos tres vectores.

b) (1 punto) Determine la posición relativa de las rectas r y s siguientes:

$$r: \frac{x+1}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z+2}{1} \quad s: \begin{cases} -x + y + 2z - 4 = 0 \\ x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

3. (4 puntos)

a) Considere la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$$

a.1.) (1 punto) Determine las asíntotas de la función $f(x)$.

a.2.) (1,5 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

b) (1,5 puntos) Calcule la siguiente integral:

$$\int \frac{9}{x^2 + x - 2} dx$$

4. (1,5 puntos) Se lanza 10 veces un dado equilibrado (es decir un dado donde todas sus caras tiene la misma probabilidad de aparecer).

a) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que salga un número par en todos los lanzamientos.

b) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que salga un número par exactamente en tres lanzamientos. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

OPCIÓN B**1. (3 puntos)****a) (1,5 puntos)** Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

encuentre la matriz X , de dimensión 3×3 , que resuelve la ecuación matricial:

$$AX + B = A^2$$

b) (1,5 puntos) Determine el rango de la matriz C siguiente según los diferentes valores del parámetro k :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix}$$

2. (1,5 puntos) Determine el valor de los parámetros m y n que hacen que la recta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases}$$

esté contenida en el plano:

$$\pi: mx + y + nz = 4$$

3. (4 puntos)**a) (1,5 puntos)** Calcule el límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^3 - x^2 - x + 2}{x^2} \right)^{\frac{3+x^2}{x}}$$

b) (1,5 puntos) De entre todos los triángulos rectángulos que tiene un área de 1 cm^2 , determine el que tiene la hipotenusa de longitud mínima y proporcione las longitudes de los tres lados de ese triángulo.**c) (1 punto)** Calcule el área limitada por la curva $f(x) = x^2 + x$ y la recta $g(x) = x + 4$.**4. (1,5 puntos)****a) (0,75 puntos)** En una clase de 20 alumnos, 10 estudian ruso, 12 practican algún deporte y tan solo 2 hacen ambas cosas. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, si estudia ruso, practique algún deporte?**b) (0,75 puntos)** Un tirador de pistola olímpica, tiene una probabilidad de 0,8 de hacer blanco. Si dispara 12 veces, ¿cuál es la probabilidad de que haga 10 o más blancos?. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

SOLUCIONES**OPCIÓN A****1. (3 puntos)****a) (1,5 puntos)** Resuelva el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) (1,5 puntos) Sabiendo que el determinante de la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

es 4, es decir $|A| = 4$, determine el determinante de la matriz B que aparece a continuación:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3a+k & x+5 \\ 2 & 3b+k & y+5 \\ 2 & 3c+k & z+5 \end{pmatrix}$$

a) Es un sistema de ecuaciones con la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Estudiamos su rango.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 8 + 18 - 6 - 16 - 12 = 0$$

Por lo que su rango no es 3. Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo, por ejemplo, el que resulta de quitar la fila y columna 3ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 8 = -4 \neq 0$.

El rango de A es 2.

Como la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & | & 0 \\ 2 & 2 & 2 & | & 0 \\ 1 & 3 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$ el rango también es 2.

Rango de $A =$ Rango de $A/B = 2 < 3 = \text{N}^\circ$ de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado, determinamos la expresión de sus infinitas soluciones.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{aligned} \left. \begin{cases} \text{Ecuación 1}^\text{a} = \text{Ecuación 2}^\text{a} + \text{Ecuación 3}^\text{a} \\ \text{Eliminamos ecuación 1}^\text{a} \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -y - z \\ x + 3y + 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -y - z + 3y + 2z = 0 \Rightarrow 2y + z = 0 \Rightarrow \boxed{z = -2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -y + 2y = y}$$

Las soluciones del sistema son: $x = t$; $y = t$; $z = -2t$, siendo $t \in \mathbb{R}$.

b) Sabemos que $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 4$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3a+k & x+5 \\ 2 & 3b+k & y+5 \\ 2 & 3c+k & z+5 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Separo en suma de dos determinantes} \\ \text{utilizando la suma de la 2ª columna} \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3a & x+5 \\ 2 & 3b & y+5 \\ 2 & 3c & z+5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & k & x+5 \\ 2 & k & y+5 \\ 2 & k & z+5 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{En el 2º determinante} \\ \text{las columnas 1ª y 2ª} \\ \text{son proporcionales y} \\ \text{su determinante es 0} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 2 & 3a & x+5 \\ 2 & 3b & y+5 \\ 2 & 3c & z+5 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Separo en suma de dos determinantes} \\ \text{utilizando la suma de la 3ª columna} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 2 & 3a & x \\ 2 & 3b & y \\ 2 & 3c & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3a & 5 \\ 2 & 3b & 5 \\ 2 & 3c & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{En el 2º determinante} \\ \text{las columnas 1ª y 3ª} \\ \text{son proporcionales y} \\ \text{su determinante es 0} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 2 & 3a & x \\ 2 & 3b & y \\ 2 & 3c & z \end{vmatrix} + 0 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Saco factor común} \\ \text{3 en 2ª columna} \end{array} \right\} =$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 2 & a & x \\ 2 & b & y \\ 2 & c & z \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Saco factor común} \\ \text{2 en 1ª columna} \end{array} \right\} = 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & a & x \\ 1 & b & y \\ 1 & c & z \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Determinante de } A = \\ \text{= Determinante de } A^T \end{array} \right\} =$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6 \cdot |A| = 6 \cdot 4 = \boxed{24}$$

2. (1,5 puntos)

a) (0,5 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 1)$ y $\vec{w} = (0, 2, 1)$, determine el volumen del paralelepípedo que definen esos tres vectores.

b) (1 punto) Determine la posición relativa de las rectas r y s siguientes:

$$r: \frac{x+1}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z+2}{1} \quad s: \begin{cases} -x + y + 2z - 4 = 0 \\ x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

a) El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 4 - 0 - 4 - 2 = -1 \Rightarrow \boxed{\text{Volumen} = 1 \text{ u}^3}$$

b) Pasamos la ecuación de la recta s a paramétricas para obtener un punto y un vector de esta recta.

$$\begin{aligned} s: \begin{cases} -x + y + 2z - 4 = 0 \\ x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = y + 2z - 4 \\ x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow y + 2z - 4 + 2y + z - 5 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3y + 3z - 9 = 0 \Rightarrow y + z - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 3 - z} \Rightarrow \boxed{x = 3 - z + 2z - 4 = -1 + z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow s: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \end{aligned}$$

La recta s tiene como vector director $\vec{v}_s = (1, -1, 1)$ y pasa por el punto $P_s(-1, 3, 0)$

La recta $r: \frac{x+1}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z+2}{1}$ tiene como vector director $\vec{v}_r = (4, 6, 1)$ y pasa por el punto $Q_r(-1, 0, -2)$.

Las rectas son paralelas o se cortan o se cruzan.

Las rectas no son paralelas pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (4, 6, 1) \\ \vec{v}_s = (1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{1} \neq \frac{6}{-1} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow r \text{ y } s \text{ no son paralelas}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Estudiamos el valor nulo o no del producto mixto de los vectores $\vec{v}_r = (4, 6, 1)$, $\vec{v}_s = (1, -1, 1)$ y $\overrightarrow{Q_r P_s}$.

$$\left. \begin{array}{l} P_s(-1, 3, 0) \\ Q_r(-1, 0, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{Q_r P_s} = (-1, 3, 0) - (-1, 0, -2) = (0, 3, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{Q_r P_s} = (0, 3, 2) \\ \vec{v}_r = (4, 6, 1) \\ \vec{v}_s = (1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{Q_r P_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 3 - 8 - 12 - 12 - 0 = -29 \neq 0$$

Como este producto mixto es no nulo las rectas r y s se cruzan (tienen dirección distinta y no se coinciden en ningún punto)

3. (4 puntos)**a)** Considere la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$$

a.1.) (1 punto) Determine las asíntotas de la función $f(x)$.a.2.) (1.5 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.**b)** (1.5 puntos) Calcule la siguiente integral:

$$\int \frac{9}{x^2 + x - 2} dx$$

a.1.) Asíntota vertical. $x = a$ El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \frac{1^2 - 3 + 3}{1 - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

 $x = 1$ es asíntota vertical de la función.**Asíntota horizontal.** $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 3 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x + 3}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x} = -2$$

 $y = x - 2$ es asíntota oblicua de la función.**a.2.)** Utilizamos la derivada primer para obtener la variación de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 3)(x - 1) - 1 \cdot (x^2 - 3x + 3)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - \cancel{3x} + 3 - x^2 + \cancel{3x} - 3}{(x - 1)^2}$$

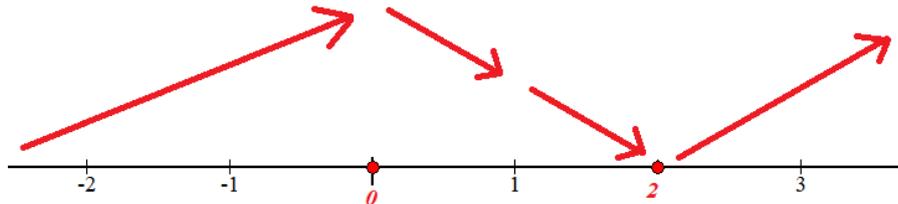
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Existen dos puntos críticos: $x = 0$ y $x = 2$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores. Añadimos el valor $x = 1$ excluido del dominio.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1)}{(-1-1)^2} = \frac{3}{4} > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$
- En $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{0.5^2 - 1}{(0.5-1)^2} = \frac{-0.75}{0.25} < 0$. La función decrece en $(0, 1)$
- En $(1, 2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5) = \frac{1.5^2 - 3}{(1.5-1)^2} = \frac{-0.75}{0.25} < 0$. La función decrece en $(1, 2)$
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{3^2 - 6}{(3-1)^2} = \frac{3}{4} > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 0$. Como $f(0) = \frac{0^2 - 0 + 3}{0 - 1} = -3$ las coordenadas del máximo son $(0, -3)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 2$. Como $f(2) = \frac{2^2 - 6 + 3}{2 - 1} = 1$ las coordenadas del mínimo son $(2, 1)$.

b) Descomponemos la fracción $\frac{9}{x^2 + x - 2}$ en fracciones simples.

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

$$\frac{9}{x^2 + x - 2} = \frac{9}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$\Rightarrow 9 = A(x-1) + B(x+2) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow 9 = A(0) + B(1+2) \rightarrow 9 = 3B \rightarrow B=3 \\ x=-2 \rightarrow 9 = A(-2-1) + B(0) \rightarrow 9 = -3A \Rightarrow A=-3 \end{cases}$$

$$\frac{9}{x^2 + x - 2} = \frac{-3}{x+2} + \frac{3}{x-1}$$

Calculamos la integral pedida.

$$\int \frac{9}{x^2 + x - 2} dx = \int \frac{-3}{x+2} + \frac{3}{x-1} dx = -3 \int \frac{1}{x+2} dx + 3 \int \frac{1}{x-1} dx = \boxed{-3 \ln|x+2| + 3 \ln|x-1| + K}$$

4. (1,5 puntos) Se lanza 10 veces un dado equilibrado (es decir un dado donde todas sus caras tiene la misma probabilidad de aparecer).

a) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que salga un número par en todos los lanzamientos.

b) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que salga un número par exactamente en tres lanzamientos. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

Se trata de una distribución binomial. Sea A el suceso “sale número par en el lanzamiento de un dado” y \bar{A} su suceso contrario “sale impar al lanzar el dado”.

Se tiene: $P(A) = p = 0.5$; $P(\bar{A}) = q = 0.5$

$X = N^\circ$ de veces que sale número par en 10 lanzamientos de un dado equilibrado.

$$X = B(10, 0.5)$$

a)

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} 0.5^{10} \cdot 0.5^0 = 0.5^{10} = \boxed{\frac{1}{1024}}$$

b)

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} 0.5^3 \cdot 0.5^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} 0.5^{10} = \frac{120}{1024} = \boxed{\frac{15}{128}}$$

OPCIÓN B**1. (3 puntos)****a) (1,5 puntos)** Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

encuentre la matriz X , de dimensión 3×3 , que resuelve la ecuación matricial:

$$AX + B = A^2$$

b) (1,5 puntos) Determine el rango de la matriz C siguiente según los diferentes valores del parámetro k :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix}$$

a) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX + B = A^2 \Rightarrow AX = A^2 - B \Rightarrow X = A^{-1}A^2 - A^{-1}B = A^{-1}AA - A^{-1}B \Rightarrow \{A^{-1}A = Id\} \Rightarrow X = A - A^{-1}B$$

Comprobamos que existe la inversa de A y la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 0 = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Sustituimos el valor de las matrices en la ecuación matricial.

$$X = A - A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) El rango de C es 3 o menor.

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & k \\ k & k & 1 \end{vmatrix} = 4 + k^2 + 12k - 6k - 4 - 2k^2 = -k^2 + 6k$$

$$|C| = 0 \Rightarrow -k^2 + 6k = 0 \Rightarrow k(-k + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ 0 \\ k = 6 \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq 6$

En este caso el determinante de C es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $k = 0$

En este caso el determinante de C es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Observamos que la columna 1ª y 2ª son proporcionales.

Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo, por ejemplo, el que resulta de quitar la fila y columna 1ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

El rango de C es 2.

CASO 3. $k = 6$

En este caso el determinante de C es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. Buscamos un menor de orden 2 con determinante no

nulo, por ejemplo, el que resulta de quitar la fila y columna 1ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 36 = -34 \neq 0$.

El rango de C es 2.

Resumiendo: El rango de C es 3 si $k \neq 0$ y $k \neq 6$ y el rango es 2 si $k = 0$ o $k = 6$.

2. (1,5 puntos) Determine el valor de los parámetros m y n que hacen que la recta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases}$$

esté contenida en el plano:

$$\pi: mx + y + nz = 4$$

Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 - x - y \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow 2x + 3y + 2 - x - y = 3 \Rightarrow x + 2y = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1 - 2y} \Rightarrow$$

$$z = 2 - (1 - 2y) - y = 2 - 1 + 2y - y \Rightarrow \boxed{z = 1 + y} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, \text{ siendo } t \in \mathbb{R}$$

Como la recta está contenida en el plano el punto $P(1,0,1)$ que pertenece a la recta debe pertenecer al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P(1,0,1) \in \pi \\ \pi: mx + y + nz = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow m + 0 + n = 4 \Rightarrow \boxed{m + n = 4}$$

Además, el vector director de la recta $\vec{v}_r = (-2, 1, 1)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (m, 1, n)$ deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar es cero.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (-2, 1, 1)(m, 1, n) = 0 \Rightarrow -2m + 1 + n = 0 \Rightarrow \boxed{2m - n = 1}$$

Juntamos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2m - n = 1 \\ m + n = 4 \\ \hline 3m = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{m = \frac{5}{3}} \Rightarrow \frac{5}{3} + n = 4 \Rightarrow \boxed{n = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3}}$$

Los valores buscados son $m = \frac{5}{3}$; $n = \frac{7}{3}$

3. (4 puntos)

a) (1.5 puntos) Calcule el límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^3 - x^2 - x + 2}{x^2} \right)^{\frac{3+x^2}{x}}$$

b) (1,5 puntos) De entre todos los triángulos rectángulos que tiene un área de 1 cm^2 , determine el que tiene la hipotenusa de longitud mínima y proporcione las longitudes de los tres lados de ese triángulo.

c) (1 punto) Calcule el área limitada por la curva $f(x) = x^2 + x$ y la recta $g(x) = x + 4$.

a)

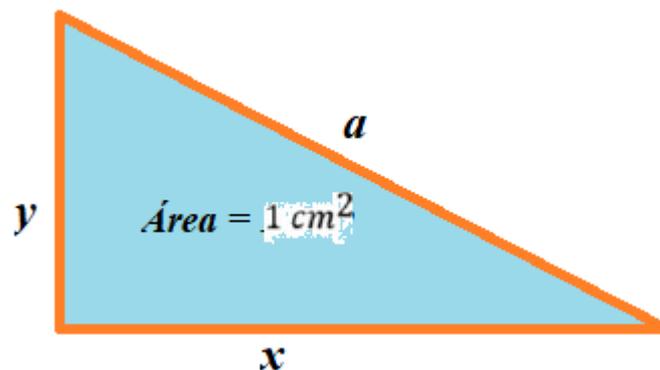
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^3 - x^2 - x + 2}{x^2} \right)^{\frac{3+x^2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x}{x^2} - \frac{x^3 - x^2 - x + 2}{x^2} \right)^{\frac{3+x^2}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cancel{x^3} + x - \cancel{x^3} + x^2 + x - 2}{x^2} \right)^{\frac{3+x^2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 2}{x^2} \right)^{\frac{3+x^2}{x}} = 1^{+\infty} =$$

$$= \text{Indeterminación (n}^\circ \text{ e)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3+x^2}{x} \left(\frac{x^2 + 2x - 2}{x^2} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3+x^2}{x} \left(\frac{\cancel{x^2} + 2x - 2 - \cancel{x^2}}{x^2} \right)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3+x^2}{x} \left(\frac{2x-2}{x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x-6+2x^3-2x^2}{x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3-2x^2+6x-6}{x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3}} = \boxed{e^2}$$

b) Consideramos un triángulo rectángulo de hipotenusa “a” y catetos “x” e “y”.



Como el área es 1 entonces $\text{área} = 1 = \frac{x \cdot y}{2} \Rightarrow x \cdot y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$.

Además, por el teorema de Pitágoras tenemos que $a^2 = x^2 + y^2$. Unimos las dos condiciones y tenemos la longitud de la hipotenusa en función del valor del cateto “x”.

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{2}{x} \\ a^2 = x^2 + y^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 = x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = \frac{x^4 + 4}{x^2} \Rightarrow a(x) = \sqrt{\frac{x^4 + 4}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^4 + 4}}{x}$$

Buscamos el máximo de esta función $a(x)$.

$$a(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 4}}{x} \Rightarrow a'(x) = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 4}} \cdot x - \sqrt{x^4 + 4}}{x^2} = \frac{2x^4 - \sqrt{x^4 + 4}}{x^2} = \frac{2x^4 - (\sqrt{x^4 + 4})^2}{x^2}$$

$$a'(x) = \frac{2x^4 - (x^4 + 4)}{x^2 \sqrt{x^4 + 4}} = \frac{2x^4 - x^4 - 4}{x^2 \sqrt{x^4 + 4}} = \frac{x^4 - 4}{x^2 \sqrt{x^4 + 4}}$$

$$a'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^4 - 4}{x^2 \sqrt{x^4 + 4}} = 0 \Rightarrow x^4 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{4} = \pm \sqrt{2}$$

De los dos puntos críticos obtenidos solo consideramos el valor positivo $x = \sqrt{2}$.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = \sqrt{2}$.

- En $(0, \sqrt{2})$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $a'(1) = \frac{1^4 - 4}{1^2 \sqrt{1^4 + 4}} = -\frac{3}{\sqrt{5}} < 0$. La función decrece en $(0, \sqrt{2})$.
- En $(\sqrt{2}, \infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $a'(2) = \frac{2^4 - 4}{2^2 \sqrt{2^4 + 4}} = \frac{12}{4\sqrt{20}} > 0$. La función crece en $(\sqrt{2}, \infty)$.

La función presenta un mínimo en $x = \sqrt{2}$.

El valor mínimo de la hipotenusa es $a(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{(\sqrt{2})^4 + 4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$ y el del otro cateto es

$$y = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

El triángulo rectángulo de área 1 cm^2 con longitud de hipotenusa mínima tiene las medidas: Hipotenusa de 2 cm y los catetos son iguales y de longitud $\sqrt{2} \text{ cm}$.

c) Averiguamos los puntos de corte de las gráficas de las funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + x = x + 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

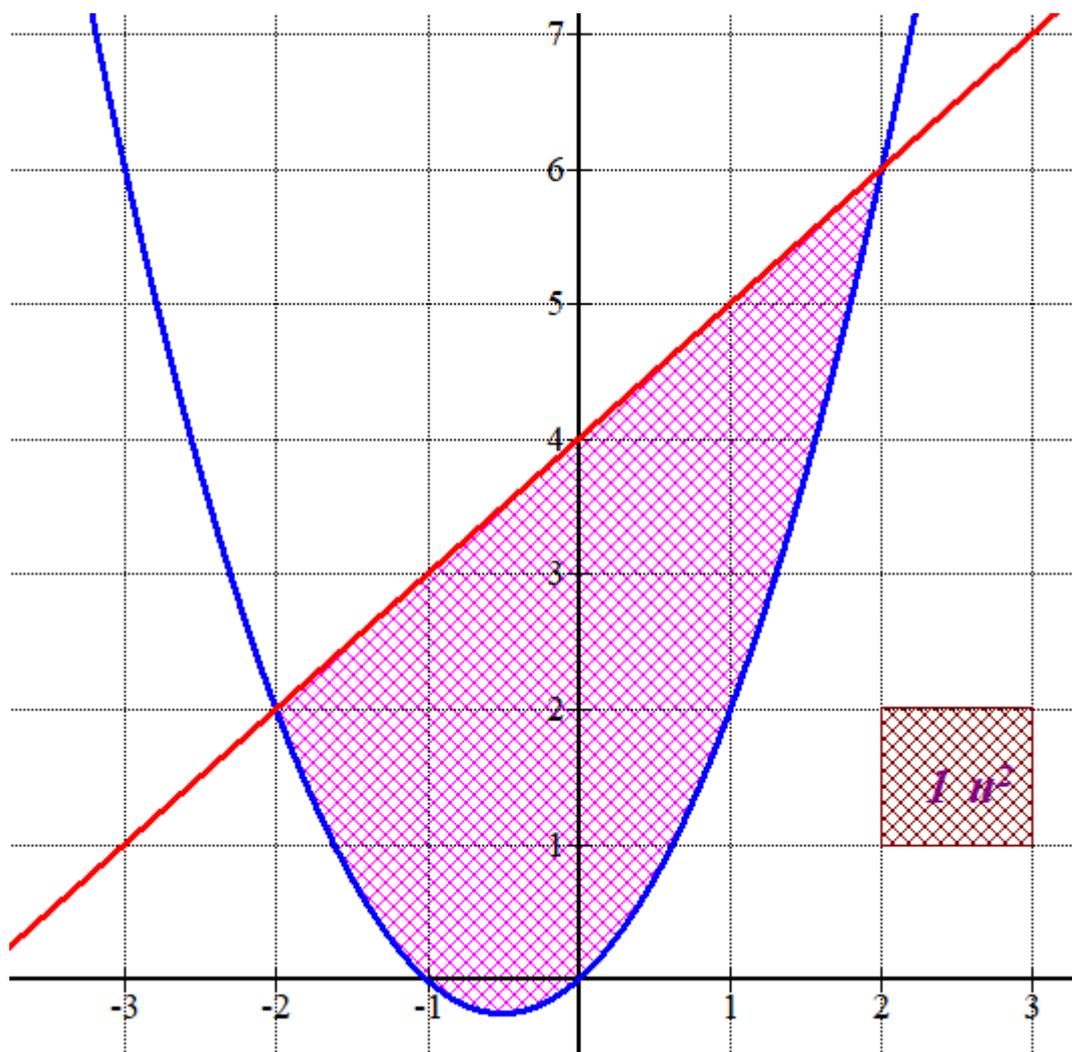
El área encerrada entre las gráficas de las funciones es el valor absoluto de la integral definida de la diferencia entre las dos funciones de $x = -2$ hasta $x = 2$:

$$\int_{-2}^2 g(x) - f(x) dx = \int_{-2}^2 x^2 + x - (x+4) dx = \int_{-2}^2 x^2 - 4 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^2 =$$

$$= \left[\frac{2^3}{3} - 8 \right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} + 8 \right] = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} - 16 = -\frac{32}{3}$$

$$\text{Área} = \left| -\frac{32}{3} \right| = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.66 u^2}$$

No pide dibujar el recinto pero lo hacemos para comprobar la bondad de la solución



4. (1,5 puntos)

a) (0,75 puntos) En una clase de 20 alumnos, 10 estudian ruso, 12 practican algún deporte y tan solo 2 hacen ambas cosas. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, si estudia ruso, practique algún deporte?

b) (0,75 puntos) Un tirador de pistola olímpica, tiene una probabilidad de 0,8 de hacer blanco. Si dispara 12 veces, ¿cuál es la probabilidad de que haga 10 o más blancos?. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

a) Realizamos una tabla de contingencia con los datos del problema.

	Practican deporte	No practican deporte	
Estudian ruso	2		10
No estudian ruso			
	12		20

Completamos la tabla

	Practican deporte	No practican deporte	
Estudian ruso	2	8	10
No estudian ruso	10	0	10
	12	8	20

Hay 10 alumnos que practican ruso y de ellos solo 2 practican deporte, por lo que la probabilidad pedida es $\frac{2}{10} = 0.2$!!!!No era necesaria la tabla de contingencia!!!

b) Se trata de una situación dicotómica (hace blanco / no hace blanco) que da lugar a una distribución binomial.

En nuestro caso, se repite la experiencia 12 veces ($n = 12$), la probabilidad de hacer blanco (éxito) es $p = 0.8$ y la del suceso contrario o fracaso es $q = 0.2$.

X es la variable que cuenta el número de blancos. $X = B(12, 0.8)$

Nos piden calcular $P(X \geq 10)$.

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 10) &= P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) = \\
 &= \binom{12}{10} 0.8^{10} \cdot 0.2^2 + \binom{12}{11} 0.8^{11} \cdot 0.2^1 + \binom{12}{12} 0.8^{12} \cdot 0.2^0 = \\
 &= \frac{12 \cdot 11}{2} 0.8^{10} \cdot 0.2^2 + \frac{12}{1} 0.8^{11} \cdot 0.2 + 0.8^{12} = \\
 &= 66 \cdot 0.8^{10} \cdot 0.2^2 + 12 \cdot 0.8^{11} \cdot 0.2 + 0.8^{12} = \boxed{0.5583}
 \end{aligned}$$