UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2017
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos.
Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.
Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Calcula razonadamente el área de la región determinada por la curva $f(x)=(x-1)(x+2)$, las rectas $x = -3$, $x = 2$ y el eje de abscisas. Esboza dicha región. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f(x)* en el punto de abscisa $x = 2$. **(1 punto)**

2A. a) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función sea continua en $x = 0$.

$$f(x)=\begin{cases} \left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} & si \quad x<0 \\ 6x+k & si \quad x\geq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Enuncia el teorema de Bolzano y comprueba si la ecuación $cos\, x = 2-x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2\pi]$. **(1 punto)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} ax+y+z&=1 \\ x+ay+z&=0 \\ x+y+az&=0 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 0$. **(1 punto)**

4A. Dados los planos $\alpha \equiv -x+2y+z+2=0$ y $\beta \equiv -2y+z=0$
a) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de intersección del plano α con los tres ejes coordenados. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto *P(0,–1,3)*. **(1 punto)**

5A. a) En una empresa hay tres robots A, B y C dedicados a soldar componentes electrónicos en placas de circuito impreso. El 25% de los componentes son soldados por el robot A, el 20% por el B y el 55% por el C. Se sabe que la probabilidad de que una placa tenga un defecto de soldadura es de 0,03 si ha sido soldado por el robot A, 0,04 por el robot B y 0,02 por el robot C.
a1) Elegida una placa al azar, calcula razonadamente la probabilidad de que tenga un defecto de soldadura. **(0,75 puntos)**
a2) Se escoge al azar una placa y resulta tener un defecto de soldadura, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido soldada por el robot C. **(0,5 puntos)**
b) Lanzamos cinco veces una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara es 0,6. Calcula razonadamente la probabilidad de:
b1) Obtener exactamente tres caras. **(0,75 puntos)**
b2) Obtener más de tres caras. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2017
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material. **(2,5 puntos)**

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2}dx$ **b)** $\int x^2 \ln x dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: ln denota logaritmo neperiano.

3B. Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&3&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente A^{-1}. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz *X* que verifica que $A\cdot X+B=C^2$. **(1,5 puntos)**

4B. a) Halla razonadamente el valor de $a\in\mathbb{R}$ para el cual el plano $\alpha\equiv x-y-az+5=0$ es paralelo a la recta

$$r\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{2}$$ **(1,25 puntos)**

b) Calcula razonadamente la distancia del punto *P(1, 2, 3)* a la recta $r\equiv\frac{x-3}{2}=y-1=z$ **(1,25 puntos)**

5B. a) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que la segunda bola extraída sea blanca. **(0,75 puntos)**

a2) Si la segunda bola extraída ha sido blanca, que la primera fuera roja. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos. **(0,75 puntos)**

b2) El tiempo de duración que no es superado por el 33% de las llamadas. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

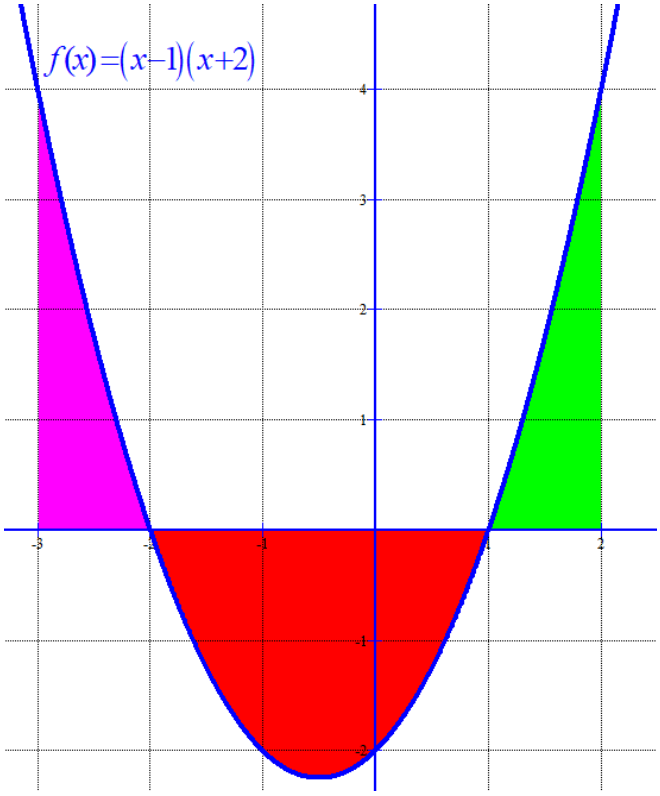
SOLUCIONES

PROPUESTA A

1A. a) Calcula razonadamente el área de la región determinada por la curva $f(x)=(x-1)(x+2)$, las rectas $x=-3$, $x=2$ y el eje de abscisas. Esboza dicha región. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$. **(1 punto)**

a) La función $f(x)=(x-1)(x+2)=x^2+2x-2-x=x^2+x-2$ es una parábola. Tenemos sus puntos de corte con los ejes $x=1$ y $x=2$. Representamos su gráfica con una tabla de valores.

x	$y=(x-1)(x+2)$
–3	4
–2	3
–1	–2
0	–2
1	0



El área se calcula con 3 integrales definidas obteniendo el área de la región rosa, roja y verde y después sumamos dichas áreas para obtener el área total.

$$\int_{-3}^{-2} x^2+x-2dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-3}^{-2}=\left[\frac{(-3)^3}{3}+\frac{(-3)^2}{2}-2(-3)\right]-\left[\frac{(-2)^3}{3}+\frac{(-2)^2}{2}-2(-2)\right]=\frac{11}{6}$$

Área de zona rosa vale 11/6 u^2

$$\int_{-2}^{1} x^2+x-2dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{1}=\left[\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}-2\right]-\left[\frac{(-2)^3}{3}+\frac{(-2)^2}{2}-2(-2)\right]=-\frac{27}{6}$$

Área de zona roja vale 27/6 u^2

$$\int_{1}^{2} x^2+x-2dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{1}^{2}=\left[\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}-4\right]-\left[\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}-2\right]=\frac{11}{6}$$

Área de zona verde vale 11/6 u^2.

El área total es $\frac{11}{6}+\frac{27}{6}+\frac{11}{6}=\boxed{\frac{49}{6}=8.16\,u^2}$

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=x^2+x-2$ en $x = 2$ tiene la ecuación $y-f(2)=f\,'(2)\left(x-2\right)$. Terminamos de calcular dicha expresión.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2+x-2 \rightarrow f(2)=2^2+2-2=4 \\ f\,'(x)=2x+1 \rightarrow f\,'(2)=4+1=5 \\ y-f(2)=f\,'(2)\left(x-2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y-4=5\left(x-2\right) \Rightarrow \boxed{y=5x-6}$$

2A. a) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función sea continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} & si \quad x < 0 \\ 6x + k & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$ **(1,5 puntos)**

b) Enuncia el teorema de Bolzano y comprueba si la ecuación $cos\ x = 2 - x$ tiene alguna solución real en el intervalo [0, 2π]. **(1 punto)**

a) Para que sea continua en $x = 0$ deben ser iguales sus límites laterales.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} = \left(\frac{0+1}{0+1}\right)^{1/0} = 1^{-\infty} = \text{Indeterminación} = e^{\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x+1}{2x+1}-1\right)\frac{1}{x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x+1-2x-1}{2x+1}\right)\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-x}{2x+1}\right)\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{2x+1}} = e^{\frac{-1}{1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{1}{e} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 6x + k = k \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{e}}$$

b) El T. de Bolzano dice que si una función es continua en *(a,b)* y el signo de *f(a)* es distinto del signo de *f(b)* entonces existe, al menos, un punto $c \in (a,b)$ tal que *f(c) = 0***.**

Tomamos la función $f(x) = -2 + x + cos\ x$ y consideramos el intervalo [0, 2π].
En dicho intervalo la función es continua y en los extremos del intervalo se cumple que $f(0) = -2 + 0 + cos 0 = -1 < 0$ y $f(2\pi) = -2 + 2\pi + cos 2\pi = -2 + 2\pi + 1 = 5,28 > 0$.
Podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe $c \in (0, 2\pi)$ tal que *f(c) = 0.*

$$f(c) = -2 + c + cos\ \mathrm{c} = 0 \Rightarrow \boxed{\cos c = 2 - c}$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+az=0 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor *a* = *0*. **(1 punto)**

a) Consideramos su matriz de coeficientes y averiguamos cuando se anula su determinante.

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3+1+1-a-a-a=a^3-3a+2$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^3-3a+2=0 \Rightarrow \ldots$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow a^3-3a+2=(a-1)(a^2+a-2)$$

$$a^2+a-2=0 \Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} \dfrac{-1-3}{2}=-2 \\ \dfrac{-1+3}{2}=1 \end{cases}$$

$$a^3-3a+2=(a-1)^2(a+2)$$

$\ldots \Rightarrow a=1;\ a=-2$ son los valores que anulan el determinante.

Consideramos tres casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (única solución).

CASO 2. $a=1$

En este caso el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} x & +y & +z & =0 \\ -x & -y & -z & =-1 \\ \hline & & 0 & =-1 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 0=-1 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\} \text{ ¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema plantea una ecuación que es una igualdad imposible. El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución)

CASO 3. $a=-2$

En este caso el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l}-2x+y+z=1\\ x-2y+z=0\\ x+y-2z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 1ª + 2 · Ecuación 2ª}\\ \begin{array}{rrrl}-2x & +y & +z & =1\\ 2x & -4y & +2z & =0\\ \hline & -3y & +3z & =1\rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª}\end{array}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 1ª + 2 · Ecuación 3ª}\\ \begin{array}{rrrl}-2x & +y & +z & =1\\ 2x & +2y & -4z & =0\\ \hline & 3y & -3z & =1\rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª}\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=1\\ -3y+3z=1\\ 3y-3z=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª}\\ \begin{array}{rrl}3y & -3z & =1\\ -3y & +3z & =1\\ \hline & 0 & =2\rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª}\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=1\\ -3y+3z=1\\ 0=2\end{array}\right\}\text{ ¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución)

CONCLUSIÓN: Para $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado y para *a = 1* o *a = –2* es incompatible.

b) Para el valor *a = 0* el sistema es compatible determinado.
Sustituimos este valor en el sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}y+z=1\\ x+z=0\\ x+y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y=1-z\\ x+z=0\\ x+y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+z=0\\ x+1-z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+z=0\\ x-z=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-z\\ x-z=-1\end{array}\right\}\Rightarrow -z-z=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2z=-1\Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{2}}\Rightarrow\boxed{x=-\frac{1}{2}}\Rightarrow\boxed{y=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}}$$

La solución del sistema es $x=-\frac{1}{2};\quad y=\frac{1}{2};\quad z=\frac{1}{2}$

4A. Dados los planos $\alpha \equiv -x+2y+z+2=0$ y $\beta \equiv -2y+z=0$

a) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de intersección del plano α con los tres ejes coordenados. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto *P(0,–1,3)*. **(1 punto)**

a) Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv -x+2y+z+2=0 \\ EJE\ Z \to x=0, y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -0+0+z+2=0 \Rightarrow z=-2 \Rightarrow A(0,0,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv -x+2y+z+2=0 \\ EJE\ Y \to x=0, z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -0+2y+2=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow B(0,-1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv -x+2y+z+2=0 \\ EJE\ X \to y=0, z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x+2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow C(2,0,0)$$

Tenemos cuatro puntos que forman un tetraedro OABC.
Hallamos su volumen como la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los vectores que lo definen $\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\ y\ \overrightarrow{OC}$.

$$\left[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$Volumen = \left|\frac{\left[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right]}{6}\right| = \left|\frac{-4}{6}\right| = \boxed{\frac{2}{3} = 0.66\,u^3}$$

b) La recta paralela a los planos α y β cumple que su vector director es perpendicular a los vectores normales de los planos, por lo que el producto vectorial de los vectores normales de los planos nos sirve como vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv -x+2y+z+2=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = (-1,2,1) \\ \beta \equiv -2y+z=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_\beta} = (0,-2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_r} = 2i+2k+j+2i = 4i+j+2k = (4,1,2)$$

Obtenemos la ecuación de la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (4,1,2) \\ P(0,-1,3) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=4\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4\lambda \\ y+1=\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4(y+1) \\ z=3+2(y+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4y+4 \\ z=3+2y+2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x-4y-4=0 \\ -2y+z-5=0 \end{cases}}$$

5A. a) En una empresa hay tres robots A, B y C dedicados a soldar componentes electrónicos en placas de circuito impreso. El 25% de los componentes son soldados por el robot A, el 20% por el B y el 55% por el C. Se sabe que la probabilidad de que una placa tenga un defecto de soldadura es de 0,03 si ha sido soldado por el robot A, 0,04 por el robot B y 0,02 por el robot C.

a1) Elegida una placa al azar, calcula razonadamente la probabilidad de que tenga un defecto de soldadura. **(0,75 puntos)**

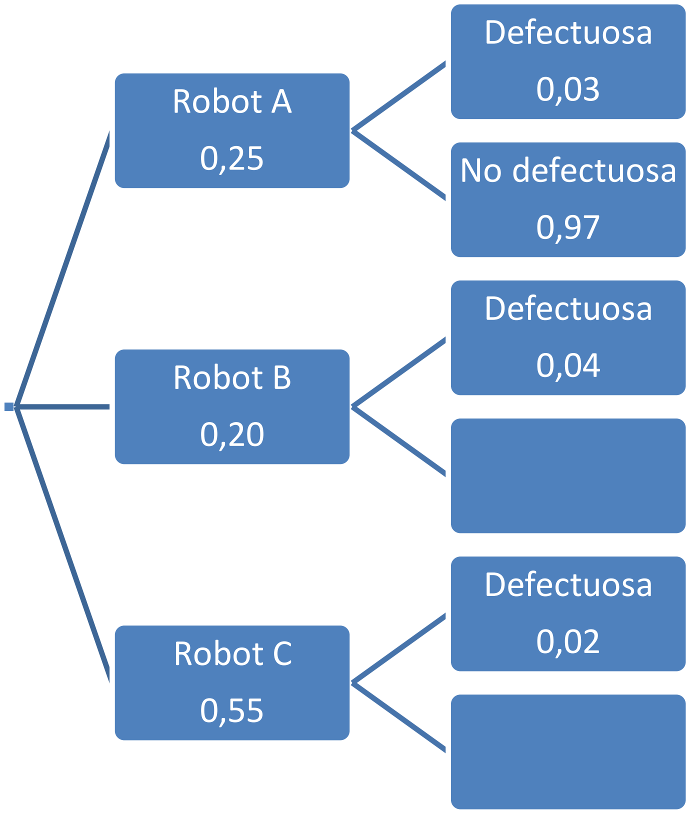
a2) Se escoge al azar una placa y resulta tener un defecto de soldadura, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido soldada por el robot C. **(0,5 puntos)**

b) Lanzamos cinco veces una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara es 0,6. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Obtener exactamente tres caras. **(0,75 puntos)**

b2) Obtener más de tres caras. **(0,5 puntos)**

a) Dibujamos un diagrama de árbol donde aparezcan todas las probabilidades asociadas al experimento.



a1) Observando el diagrama podemos calcular la probabilidad pedida.

$$P(\text{Defectuosa}) = 0.25 \cdot 0.03 + 0.20 \cdot 0.04 + 0.55 \cdot 0.02 = \boxed{0.0265}$$

a2) $$P(\text{Robot C / Defectuosa}) = \frac{P(\text{Robot C } \cap \text{ Defectuosa})}{P(\text{Defectuosa})} = \frac{0.55 \cdot 0.02}{0.265} = \boxed{\frac{22}{53} = 0.415}$$

b) Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de caras que salen en 5 lanzamientos de una moneda trucada.

Como en la tabla que nos ofrecen solo aparecen $p \leq 0.5$ y la probabilidad de salir cara es 0.6 cambiamos el "éxito" de la binomial a "sacar cruz = no sacar cara".

Hemos cambiado la variable aleatoria a X = Número de cruces que salen en 5 lanzamientos de una moneda trucada.

Se trata de una variable aleatoria binomial con parámetros *n = 5* y *p = 0.4*. X = B(5, 0.4).

b1) Transformamos el suceso sacar caras en sacar cruces, luego en valores de la variable y después buscamos la probabilidad en la tabla.

$$P(\text{Sacar 3 caras}) = P(\text{Sacar 2 cruces}) = P(X=2) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = \boxed{0.3456}$$

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	[illegible]	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	[illegible]	0,2059	0,1657	0,1563
	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

b2) Transformamos el suceso sacar caras en sacar cruces, luego en valores de la variable y después buscamos la probabilidad en la tabla.

$$P(\text{Sacar más de 3 caras}) = P(\text{4 caras o 5 caras}) = P(\text{1 cruz o 0 cruces}) =$$

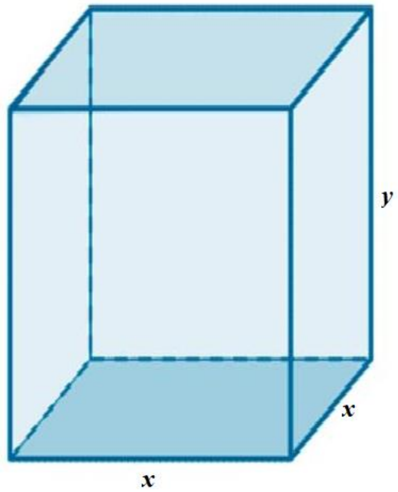
$$= P(X=1) + P(X=0) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = 0.2592 + 0.0778 = \boxed{0.3370}$$

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	[illegible]	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B

1B. Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material. **(2,5 puntos)**

Asignamos letras a las dimensiones de la piscina en el dibujo.



El volumen de la piscina es área de la base por la profundidad.

$$\left.\begin{array}{l} V = x^2 y \\ V = 32 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 y = 32 \Rightarrow y = \frac{32}{x^2}$$

La superficie de sus paredes y el suelo es lo que debemos hacer mínimo. Sumamos las cuatro paredes cuya superficie es $x \cdot y$ junto con la superficie de la base x^2.

$$S(x) = x^2 + 4xy = x^2 + 4x\frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}$$

Derivamos la función y la igualamos a cero, en busca de sus puntos críticos.

$$S(x) = x^2 + \frac{128}{x} = x^2 + 128x^{-1} \Rightarrow S'(x) = 2x - 128x^{-2} = 2x - \frac{128}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{128}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 128 = 0 \Rightarrow 2x^3 = 128 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Comprobamos si es un mínimo usando la segunda derivada.

$$S'(x) = 2x - 128x^{-2} \Rightarrow S''(x) = 2 + 256x^{-3} = 2 + \frac{256}{x^3}$$

$$S''(4) = 2 + \frac{256}{4^3} = 6 > 0$$

$x = 4$ es un mínimo, pues la segunda derivada es positiva. La superficie a usar es mínima cuando la base de la piscina es un cuadrado de lado 4 metros. Y la profundidad es de $y = \frac{32}{x^2} = \frac{32}{4^2} = 2 \text{ metros}$.

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2}dx$ **b)** $\int x^2 \ln x dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: ln denota logaritmo neperiano.

a) Realizamos la división que aparece en el integrando.

$$\frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2} = \begin{array}{rrrr|l} x^3 & +2x^2 & +x & -10 & x^2+x-2 \\ \cline{5-5} -x^3 & -x^2 & +2x & & x+1 \\ \cline{1-4} & x^2 & +3x & & \\ & -x^2 & -x & +2 & \\ \cline{1-4} & & 2x & -8 & \end{array} = x+1+\frac{2x-8}{x^2+x-2}$$

$$\int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2}dx = \int x+1dx + \int \frac{2x-8}{x^2+x-2}dx = \frac{x^2}{2}+x+\ldots$$

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2}=1 \\ \frac{-1-3}{2}=-2 \end{cases} \Rightarrow x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

$$\frac{2x-8}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

$$\frac{2x-8}{x^2+x-2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-8 = A(x+2)+B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \to -4-8=B(-3) \to B=4 \\ x=1 \to 2-8=3A \to A=-2 \end{cases}$$

$$\frac{2x-8}{x^2+x-2} = \frac{-2}{x-1}+\frac{4}{x+2}$$

$$.. = \frac{x^2}{2}+x+\int \frac{-2}{x-1}+\frac{4}{x+2}dx = \frac{x^2}{2}+x-2\int\frac{1}{x-1}dx+4\int\frac{1}{x+2}dx =$$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x-1|+4\ln|x+2|+K}$$

b) Utilizamos el método de integración por partes.

$$\int x^2 \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u=\ln x \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2dx \to v=\int x^2dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} = \boxed{\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}+K}$$

3B. Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&3&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente A^{-1}. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A\cdot X+B=C^2$. **(1,5 puntos)**

a) Calculamos su determinante para comprobar si tiene inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=0+0+0-0-1-0=-1\neq 0$$

El determinante es distinto de cero y tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

b) Despejamos X, usando que A tiene inversa y ya la tenemos calculada.

$$A\cdot X+B=C^2\Rightarrow A\cdot X=C^2-B\Rightarrow X=A^{-1}\left(C^2-B\right)$$

$$C^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&3&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&3&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1+3&0\\0&9&0\\-1-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&0\\0&9&0\\-2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$C^2-B=\begin{pmatrix}1&4&0\\0&9&0\\-2&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&-1\\0&10&0\\-3&-2&1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\left(C^2-B\right)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&-1\\0&10&0\\-3&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&10&0\\2+3&4+2&-1-1\\-3&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&10&0\\5&6&-2\\-3&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}0&10&0\\5&6&-2\\-3&-2&1\end{pmatrix}}$$

4B. a) Halla razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el plano $\alpha \equiv x - y - az + 5 = 0$ es paralelo a la recta

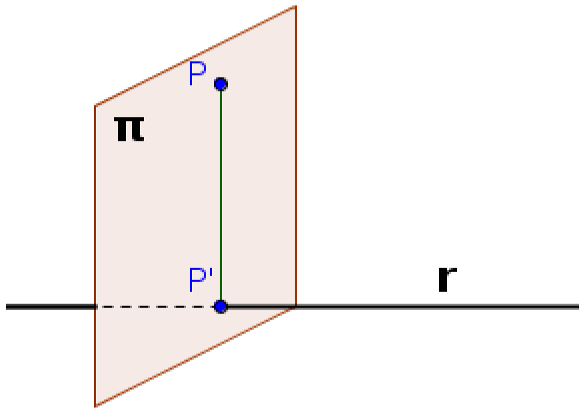
$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2}$$ **(1,25 puntos)**

b) Calcula razonadamente la distancia del punto *P(1, 2, 3)* a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y - 1 = z$ **(1,25 puntos)**

a) Si plano y recta son paralelos el vector normal del plano es perpendicular al vector director de la recta. Su producto escalar debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv x - y - az + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1,-1,-a) \\ r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2} \Rightarrow \vec{v_r} = (3,-5,2) \\ \vec{n} \cdot \vec{v_r} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,-1,-a)(3,-5,2) = 0 \Rightarrow 3 + 5 - 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{8}{2} = 4}$$

b) Hallamos el plano π perpendicular a la recta que pasa por el punto P. Determinamos el punto P´ de corte de recta y plano. La distancia de P a la recta *r* será el módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.



Hallamos el plano perpendicular a la recta. Tendrá como vector normal el director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = y - 1 = z \Rightarrow \vec{v_r} = (2,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v_r} = (2,1,1) \\ P(1,2,3) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y + z + D = 0 \\ P(1,2,3) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -7 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y + z - 7 = 0$$

Hallamos el punto de corte de recta y plano. Para ello pasamos las ecuaciones de la recta a paramétricas.

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv \dfrac{x-3}{2} = y-1 = z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 2x+y+z-7=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(3+2\lambda)+1+\lambda+\lambda-7=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6+4\lambda+1+\lambda+\lambda-7=0 \Rightarrow 6\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow P´(3,1,0)$$

Calculamos la distancia de P a *r* que es el módulo del vector $\overrightarrow{PP´}$.

$$\overrightarrow{PP´} = (3,1,0)-(1,2,3) = (2,-1,-3)$$

$$\boxed{\text{Distancia}(P,r) = \left|\overrightarrow{PP´}\right| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}\ u}$$

5B. a) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que la segunda bola extraída sea blanca. **(0,75 puntos)**

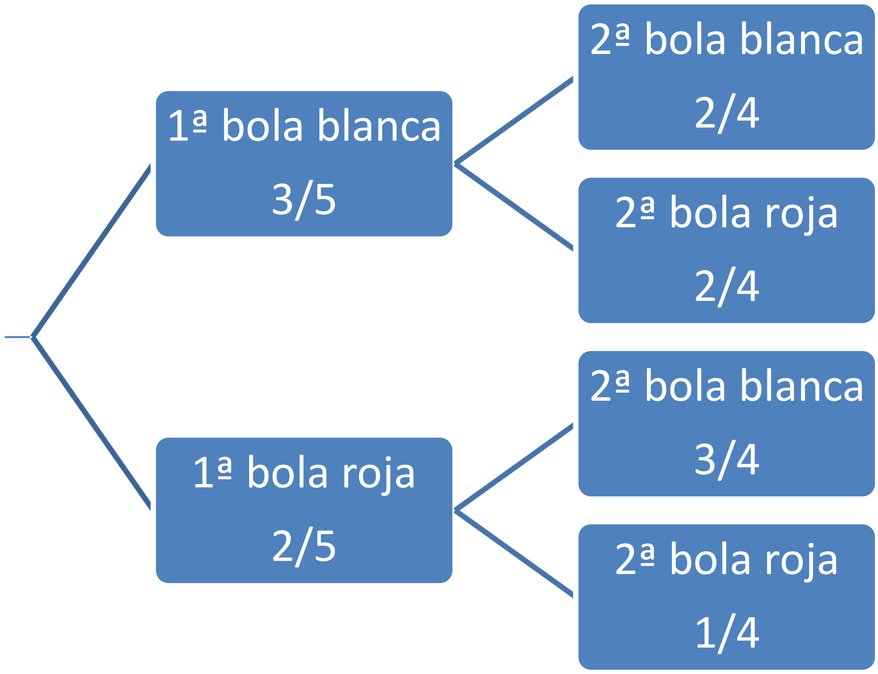
a2) Si la segunda bola extraída ha sido blanca, que la primera fuera roja. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos. **(0,75 puntos)**

b2) El tiempo de duración que no es superado por el 33% de las llamadas. **(0,5 puntos)**

a) Realizamos un diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio.



Observando este diagrama respondemos.

a1) $P\left(2^{a}\text{ bola blanca}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{12}{20}=\boxed{\frac{3}{5}=0.6}$

a2)

$$P\left(1^{a}\text{ bola roja / }2^{a}\text{ bola blanca}\right)=\frac{P\left(1^{a}\text{ bola roja }\cap\ 2^{a}\text{ bola blanca}\right)}{P\left(2^{a}\text{ bola blanca}\right)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{12}{20}}=\frac{6}{12}=\boxed{\frac{1}{2}=0.5}$$

b) X = Duración de una llamada telefónica en minutos.
Como la varianza es 4 la desviación típica es la raíz cuadrada de 4 que vale 2.
X = N(5, 2)

b1)

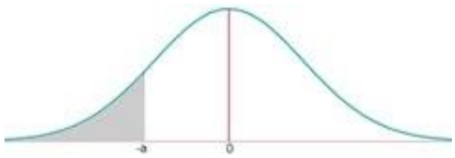
$$P(X<4.5)=\{\text{Tipificamos}\}=P\left(Z<\frac{4.5-5}{2}\right)=P(Z<-0.25)=$$
$$=P(Z>0.25)=1-P(Z<0.25)=\{\text{Miramos en la tabla}\}=$$
$$=1-0.5987=\boxed{0.4013}$$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

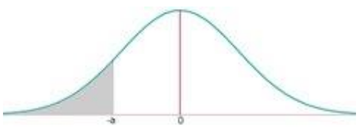
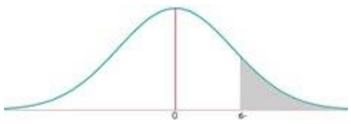
b2) Buscamos un valor del tiempo “a” tal que P(X < a) = 0.3333.

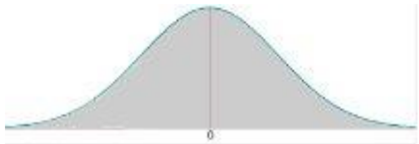
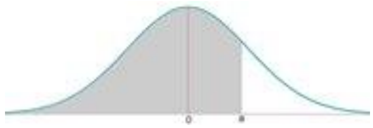
$$P(X<a)=0.3333 \Rightarrow \{\text{Tipificamos}\} \Rightarrow P\left(Z<\frac{a-5}{2}\right)=0.3333$$

Este valor no lo encontramos en la tabla, por lo que $\frac{a-5}{2}$ es negativo.



Usando la simetría de la campana de Gauss tenemos que:

 =  =

=  − 

Lo utilizamos para el cálculo de probabilidad pedida.

$$P\left(Z<\frac{a-5}{2}\right)=P\left(Z>-\frac{a-5}{2}\right)=1-P\left(Z<-\frac{a-5}{2}\right)$$

Así tenemos que $1-P\left(Z<-\frac{a-5}{2}\right)=0.3333 \Rightarrow P\left(Z<-\frac{a-5}{2}\right)=1-0.3333=0.6667$

Buscamos en la tabla $\rightarrow -\frac{a-5}{2}=0.43 \Rightarrow a-5=-0.86 \Rightarrow a=5-0.86=4.14$ minutos

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879