


UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2016-2017 MATERIA: MATEMÁTICAS II	 Universidad Carlos III de Madrid
--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

CALIFICACIÓN: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos, la 3ª y la 4ª sobre 2 puntos.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, donde \ln significa logaritmo neperiano, se pide:

- (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.
- (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (1 punto) Calcular $\int_{-1}^0 f(x) dx$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1, \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3, \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$ se pide:

- (1 punto) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2 .
- (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.
- (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y el punto $P(1, 2, 3)$.

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72% de oro y una proporción del 16% de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínese las cantidades x , y , z .

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que

$$p(A) = \frac{4}{9}, \quad p(B) = \frac{1}{2} \text{ y } p(A \cup B) = \frac{2}{3}, \text{ se pide:}$$

- (1 punto) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.
- (1 punto) Calcular $p(\bar{A}/B)$, donde \bar{A} denota el suceso complementario de A.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (0.5 puntos) Calcular la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$.
- (1.5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A - I$, $A^2 - I$ y $A^3 - I$.
- (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6 , en caso de que exista.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1}$ y se pide:

- (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.
- (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.
- (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3, 2, 0)$ y $P_2(7, 0, 2)$, se pide:

- (1 punto) Hallar la distancia del punto $Q(3, 5, -3)$ a la recta r .
- (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q .

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 3, -1)$, $B(3, 1, 0)$ y $C(2, 5, 1)$ y se pide:

- (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.
- (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

SOLUCIONES:**OPCIÓN A****Ejercicio 1. Calificación máxima:** 3 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, donde \ln significa logaritmo neperiano, se pide:

- a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.
 b) (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^0 f(x) dx$

a) Para que sea continua en $x = 0$, la función en dicho valor y sus límites laterales deben coincidir.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{\ln(0+1)}{0+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{2x} = 0e^0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Son todos los valores iguales y la función es continua en $x = 0$.

Para que sea derivable estudiamos sus derivadas laterales y vemos si coinciden.

$$f'(x) = \begin{cases} e^{2x} + 2xe^{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - 1 \cdot \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = e^0 + 2 \cdot 0 \cdot e^0 = 1 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1 - \ln(0+1)}{(0+1)^2} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$

La función es derivable en $x = 0$ y su derivada vale $f'(0) = 1$.

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-2x}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2e^{-2x}} = \frac{1}{-\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x)dx = \int xe^{2x} dx = \left. \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\} = x \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx =$$
$$= x \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = x \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \frac{1}{2}e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$$

La integral definida valdrá:

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-1}^0 xe^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]_{-1}^0 = \left[\frac{1}{2}e^0 \left(0 - \frac{1}{2} \right) \right] - \left[\frac{1}{2}e^{-2} \left(-1 - \frac{1}{2} \right) \right] =$$
$$= \boxed{-\frac{1}{4} + \frac{3}{4e^2}}$$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1, \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3, \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$ se pide:

- a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2 .
 b) (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.
 c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y el punto $P(1, 2, 3)$.

a) Pasamos las ecuaciones de las rectas a paramétricas.

$$r_1 \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1, \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - y = 1 + z \\ 2x - y = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - y = 1 + z \\ -2x + y = -1 + z \end{cases}$$

$$4x = 2z \Rightarrow x = \frac{1}{2}z \Rightarrow z - y = 1 - z \Rightarrow -1 + 2z = y$$

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = -1 + 2z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} \vec{v}_1 = \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right) \\ P_1(0, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} \vec{u}_1 = 2\vec{v}_1 = (1, 4, 2) \\ P_1(0, -1, 0) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3, \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 5y = 3 + 2z \\ 3x + y = 3 - 4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 5y = 3 + 2z \\ -3x - y = -3 + 4z \end{cases}$$

$$-6y = 6z \Rightarrow y = -z \Rightarrow 3x - z = 3 - 4z \Rightarrow 3x = 3 - 3z \Rightarrow x = 1 - z$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 - z \\ y = -z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} \vec{u}_2 = (-1, -1, 1) \\ P_2(1, 0, 0) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 4, 2) \\ \vec{u}_2 = (-1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{4}{-1} \neq \frac{2}{1}$$

Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

Las rectas se cortan o cruzan.

Para averiguar cuál de estas dos situaciones cumplen r_1 y r_2 vamos a hacer el producto mixto de los vectores $\vec{u}_1 = (1, 4, 2)$, $\vec{u}_2 = (-1, -1, 1)$ y $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 0) - (0, -1, 0) = (1, 1, 0)$.

$$\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{P_1P_2} \right] = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4 - 2 + 2 + 0 - 1 = 3 \neq 0$$

Por lo que las rectas se cruzan, están en distintos planos y no coinciden en ningún punto sin ser paralelas.

- b) La distancia entre dos rectas que se cruzan es el volumen del paralelepípedo dividido entre el área de su base tomando como aristas del paralelepípedo los vectores directores de las rectas y un vector que una un punto de r_1 con un punto de r_2 .

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4i - 2j - k + 4k - j + 2i = 6i - 3j + 3k = (6, -3, 3)$$

$$\text{Distancia}(r_1, r_2) = \frac{[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{P_1P_2}]}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|} = \frac{3}{\sqrt{36+9+9}} = \frac{3}{\sqrt{54}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} u$$

- c) El plano que contiene a r_1 y el punto $P(1, 2, 3)$ es un plano con vectores directores $\vec{u}_1 = (1, 4, 2)$ y $\vec{P_1P} = (1, 2, 3) - (0, -1, 0) = (1, 3, 3)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 2, 3) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{u}_1 = (1, 4, 2) \\ \vec{v} = \vec{P_1P} = (1, 3, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$12x - 12 + 2y - 4 + 3z - 9 - 4z + 12 - 3y + 6 - 6x + 6 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv 6x - y - z - 1 = 0}$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72% de oro y una proporción del 16% de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determinése las cantidades x , y , z .

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C
 $\rightarrow x + y + z = 25$.

Construimos una tabla.

	Gramos de oro	Gramos de plata
Gramos de A (x)	x	0
Gramos de B (y)	$0.75y$	$0.15y$
Gramos de C (z)	$0.6z$	$0.22z$
TOTALES	$x + 0.75y + 0.6z$	$0.15y + 0.22z$

Como deseamos conseguir un lingote de 25 gramos con un 72% de oro, es decir, $25 \cdot 0.72 = 18$ gramos de oro $\rightarrow x + 0.75y + 0.6z = 18$

El 16% de los 25 gramos del lingote de plata, es decir, $0.16 \cdot 25 = 4$ gramos de plata $\rightarrow 0.15y + 0.22z = 4$

Tenemos dos ecuaciones más que completan el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 25 \\ x + 0.75y + 0.6z = 18 \\ 0.15y + 0.22z = 4 \end{array} \right\}$$

Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 25 \\ x + 0.75y + 0.6z = 18 \\ 0.15y + 0.22z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 25 - y - z \\ x + 0.75y + 0.6z = 18 \\ 0.15y + 0.22z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 25 - y - z + 0.75y + 0.6z = 18 \\ 0.15y + 0.22z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -0.25y - 0.4z = -7 \\ 0.15y + 0.22z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.25y + 0.4z = 7 \\ 0.15y + 0.22z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0.25y = 7 - 0.4z \\ 0.15y + 0.22z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{7 - 0.4z}{0.25} \\ 0.15y + 0.22z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.15 \frac{7 - 0.4z}{0.25} + 0.22z = 4 \Rightarrow 0.15(7 - 0.4z) + 0.25 \cdot 0.22z = 4 \cdot 0.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.05 - 0.06z + 0.055z = 1 \Rightarrow -0.005z = -0.05 \Rightarrow \boxed{z = \frac{0.05}{0.005} = 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{7 - 0.4 \cdot 10}{0.25} = 12} \Rightarrow \boxed{x = 25 - 12 - 10 = 3}$$

Son necesarios 3 gramos de la aleación A, 12 gramos de la B y 10 de la C.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Construimos una tabla.

	Gramos de oro	Gramos de plata	Otros metales
Gramos de A (x)	x	0	0
Gramos de B (y)	0.75y	0.15y	0.1y
Gramos de C (z)	0.6z	0.22z	0.18z
TOTALES	$x + 0.75y + 0.6z$	$0.15y + 0.22z$	$0.1y + 0.18z$

Como deseamos conseguir un lingote de 25 gramos con un 72% de oro, es decir, $25 \cdot 0.72 = 18$ gramos de oro.

El 16% de los 25 gramos del lingote de plata, es decir, $0.16 \cdot 25 = 4$ gramos de plata.

El resto del lingote, es decir, $25 - 18 - 4 = 3$ gramos de "otros metales".

Nos queda un sistema de tres ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 0.75y + 0.6z = 18 \\ 0.15y + 0.22z = 4 \\ 0.1y + 0.18z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 100x + 75y + 60z = 1800 \\ 15y + 22z = 400 \\ 10y + 18z = 300 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 15y + 12z = 360 \\ 15y + 22z = 400 \\ 5y + 9z = 150 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ 15y + 27z = 450 \\ -15y - 22z = -400 \\ \hline 5z = 50 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 15y + 12z = 360 \\ 15y + 22z = 400 \\ 5z = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 15y + 12z = 360 \\ 15y + 22z = 400 \\ \boxed{z = 10} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 15y + 120 = 360 \\ 15y + 220 = 400 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 15y = 240 \\ 15y = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x + 15y = 240 \\ \boxed{y = \frac{180}{15} = 12} \end{array} \right\} \Rightarrow 20x + 180 = 240 \Rightarrow 20x = 60 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

Son necesarios 3 gramos de la aleación A, 12 gramos de la B y 10 de la C.

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que

$$p(A) = \frac{4}{9}, \quad p(B) = \frac{1}{2} \text{ y } p(A \cup B) = \frac{2}{3}, \text{ se pide:}$$

- a) (1 punto) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.
 b) (1 punto) Calcular $p(\bar{A}/B)$, donde \bar{A} denota el suceso complementario de A.

- a) Calculamos la probabilidad de la intersección de A y B y comparamos su valor con el producto de las probabilidades de A y B.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} - p(A \cap B)$$

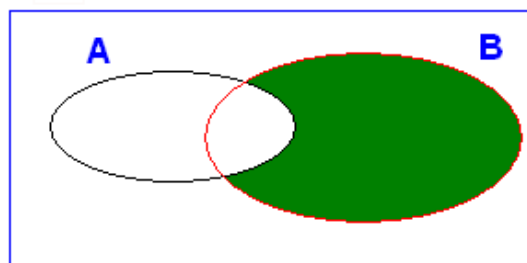
$$p(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{8+9-12}{18} = \frac{5}{18}$$

$$p(A) \cdot p(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{18}$$

} \Rightarrow Son distintos y los sucesos no son independientes.

- b)

$$p(\bar{A}/B) = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{9}{18} - \frac{5}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$



$$\bar{A} \cap B =$$

$$= B - A \cap B$$

OPCIÓN B**Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Calcular la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$.
- b) (1.5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A - I$, $A^2 - I$ y $A^3 - I$.
- c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6 , en caso de que exista.

a)

$$B = (A - I)(2I + 2A)$$

$$B = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \left[2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2+2 & -2+2 \\ 0 & 2-2 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(A - I) < 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A - I) = 2$$

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Rango}(A^2 - I) = 1$, pues la matriz sólo tiene un elemento no nulo.

$$A^3 - I = A^2 A - I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 - 7 = 0 \rightarrow \text{Rango}(A^3 - I) < 3$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A^3 - I) = 2$$

c) Hemos calculado la expresión de A^3 . Seguimos a partir de ahí.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = A^3 A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A^6| = 64 \neq 0$; Existe la inversa de A^6 .

$$(A^6)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A^6)^T)}{|A^6|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{64} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A^6)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$ y se pide:

- a) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.
- b) (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.
- c) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

- a) Calculamos los valores de la función y su derivada en $x = 0$.

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{e^{-0}}{0^2+1} = 1$$

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2+1) - 2xe^{-x}}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}(x^2+1+2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$x = 0 \Rightarrow f'(0) = \frac{-e^{-0}(0^2+1+0)}{(0^2+1)^2} = -1$$

La recta tangente tiene ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} y - f(a) = f'(a)(x - a) \\ a = 0 \\ f(a) = 1 \\ f'(a) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 1 = -1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -x + 1}$$

- b) El dominio de la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$ es todo \mathbb{R} , pues el denominador no se anula y la exponencial siempre existe.

Asíntota vertical. $x = a$

No tiene, pues su dominio es \mathbb{R} .

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x(x^2+1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{2x} = \frac{-\infty}{-\infty} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty$$

Existe asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

No existe asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

c)

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4}}{2} = -1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = -1$.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{-e^{-(-2)}((-2)^2+2(-2)+1)}{((-2)^2+1)^2} = \frac{-e^2}{25} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En $(-1, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-e^{-0}(0^2+0+1)}{(0^2+1)^2} = -1 < 0$. La

función decrece en $(-1, +\infty)$.

La función decrece en todo su dominio.

No presenta extremos relativos.

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

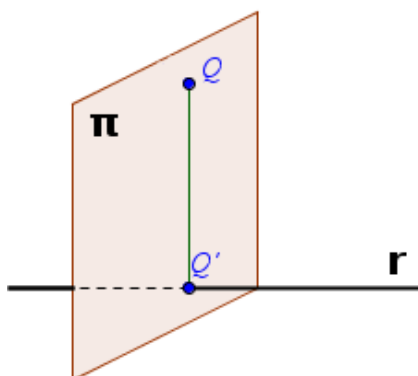
Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3,2,0)$ y $P_2(7,0,2)$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar la distancia del punto $Q(3,5,-3)$ a la recta r .
 b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q .

- a) Hallamos primero el vector director de la recta y su ecuación.

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (7,0,2) - (3,2,0) = (4,-2,2)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_1(3,2,0) \in r \\ \vec{v} = (4,-2,2) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \left. \begin{array}{l} x = 3 + 4\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right\}$$



Necesitamos hallar el plano π que contiene a Q y es perpendicular a la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} Q(3,5,-3) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v} = (4,-2,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q(3,5,-3) \in \pi \\ \pi \equiv 4x - 2y + 2z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 12 - 10 - 6 + D = 0 \Rightarrow D = 4$$

$$\pi \equiv 4x - 2y + 2z + 4 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0$$

Necesito hallar el punto Q' de corte de plano y recta.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0 \\ x = 3 + 4\lambda \\ r \equiv y = 2 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 6 + 8\lambda - 2 + 2\lambda + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow 12\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = -0.5$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 - 2 = 1 \\ y = 2 + 1 = 3 \\ z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow Q'(1,3,-1)$$

Ya podemos determinar la distancia.

$$\overrightarrow{QQ'} = (1,3,-1) - (3,5,-3) = (-2,-2,2)$$

$$\boxed{\text{Distancia}(Q, r) = \text{Distancia}(Q, Q') = |\overrightarrow{QQ'}| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} \text{ u}}$$

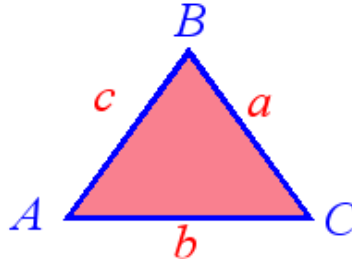
- b) Lo hemos determinado para hallar la distancia del punto Q a la recta r . Es $Q'(1,3,-1)$.

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,3,-1), B(3,1,0) y C(2,5,1) y se pide:

- a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.
 b) (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

- a) El tipo de triángulo lo deciden la longitud de sus lados y si son iguales o no.



Calculamos la longitud de cada lado.

$$\overline{BC} = (2,5,1) - (3,1,0) = (-1,4,1) \rightarrow a = \overline{BC} \text{ mide } |\overline{BC}| = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$$

$$\overline{AC} = (2,5,1) - (1,3,-1) = (1,2,2) \rightarrow b = \overline{AC} \text{ mide } |\overline{AC}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$\overline{AB} = (3,1,0) - (1,3,-1) = (2,-2,1) \rightarrow c = \overline{AB} \text{ mide } |\overline{AB}| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

Tiene dos lados iguales $b = c$ y el tercero desigual, por lo que es un triángulo isósceles.

- b) Para calcular los ángulos utilizamos los vectores que definen cada lado.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{BC} = (-1,4,1) \\ \overline{BA} = (-2,2,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{BC} \cdot \overline{BA} = |\overline{BC}| \cdot |\overline{BA}| \cdot \cos(\overline{BC}, \overline{BA}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1,4,1)(-2,2,-1) = \sqrt{1+16+1}\sqrt{9} \cos(B) \Rightarrow 2+8-1 = 3\sqrt{18} \cos(B)$$

$$\cos(B) = \frac{9}{3\sqrt{18}} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\pi}{4} = 45^\circ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AC} = (1,2,2) \\ \overline{AB} = (2,-2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{AB} = |\overline{AC}| \cdot |\overline{AB}| \cdot \cos(\overline{AC}, \overline{AB}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1,2,2)(2,-2,1) = \sqrt{9}\sqrt{9} \cos(A) \Rightarrow 2-4+2 = 9 \cos(A)$$

$$\cos(A) = 0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{\pi}{2} = 90^\circ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{CA} = (-1,-2,-2) \\ \overline{CB} = (1,-4,-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{CA} \cdot \overline{CB} = |\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}| \cdot \cos(\overline{CA}, \overline{CB}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1,-2,-2)(1,-4,-1) = \sqrt{9}\sqrt{18} \cos(C) \Rightarrow -1+8+2 = 3\sqrt{18} \cos(C)$$

$$\cos(C) = \frac{3}{\sqrt{18}} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\pi}{4} = 45^\circ}$$

Los ángulos son de 90° , 45° y 45° . Es un triángulo rectángulo isósceles (una escuadra).