upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CURSO 2016/2017

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN A

A1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a* y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+(a-1)y+z=-1 \\ (a-1)y+2z=-2 \\ x+(a^2-5a+5)z=-a+4 \end{cases}$$

(3 puntos)

A2) Dados el punto $P \equiv (1,-1,0)$ y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x-y-2z+1=0 \\ 3x-y-4z+6=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{1}$$

halla la ecuación general de un plano π que sea paralelo a ambas rectas y tal que la distancia de P a π sea 2. (2 puntos)

A3) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right)$$ (1 punto)

$$\lim_{x\to 1}\left(\cos(\pi x)+2^x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$$ (1 punto)

A4) Demuestra que la función $f(x)=sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x^2+x}$ tiene un máximo relativo en el intervalo (1, 3). Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

OPCIÓN B

B1) Calcula los valores del parámetro t para los que la siguiente matriz no es regular:

$$A=\begin{pmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

B2) Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (-4,2,0)$ y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x+3y+z-1=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases} \quad y \quad r_2 \equiv \frac{x+1}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+2}{3}$$

(3 puntos)

B3) Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x)=(x^2-3)e^{-x+2}$ en el intervalo [–2, 4]. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ y $g(x)=\frac{x^2}{4}-1$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+(a-1)y+z=-1 \\ (a-1)y+2z=-2 \\ x+\left(a^2-5a+5\right)z=-a+4 \end{cases}$$

(3 puntos)

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 & -a+4 \end{array}\right)$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 \end{vmatrix}=(a-1)\left(a^2-5a+5\right)+2(a-1)-(a-1)$$

$$|A|=(a-1)\left(a^2-5a+5+2-1\right)$$

$$|A|=0\Rightarrow(a-1)\left(a^2-5a+6\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=1 \\ o \\ a^2-5a+6=0\Rightarrow a=\dfrac{5\pm\sqrt{(-5)^2-24}}{2}=\begin{cases} \dfrac{5+1}{2}=3=a \\ o \\ \dfrac{5-1}{2}=2=a \end{cases} \end{cases}$$

Nos surgen cuatro situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a\neq 1, a\neq 2\ y\ a\neq 3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado y hallamos su solución utilizando el método de Cramer,

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1 & a-1 & 1\\ -2 & a-1 & 2\\ -a+4 & 0 & a^2-5a+5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a-1 & 1\\ 0 & a-1 & 2\\ 1 & 0 & a^2-5a+5\end{vmatrix}}=\frac{\cancel{(a-1)}\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ -a+4 & 0 & a^2-5a+5\end{vmatrix}}{\cancel{(a-1)}\left(a^2-5a+6\right)}$$

$$x=\frac{-a^2+5a-5-2a+8+a-4+2a^2-10a+10}{a^2-5a+6}=\frac{a^2-6a+9}{(a-2)(a-3)}$$

$$x=\frac{(a-3)(a-3)}{(a-2)(a-3)}=\boxed{\frac{a-3}{a-2}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 1 & -a+4 & a^2-5a+5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a-1 & 1\\ 0 & a-1 & 2\\ 1 & 0 & a^2-5a+5\end{vmatrix}}=\frac{-2a^2+10a-10-2+2+2a-8}{(a-1)(a-2)(a-3)}$$

$$y=\frac{-2a^2+12a-18}{(a-1)(a-2)(a-3)}=\frac{-2\left(a^2-6a+9\right)}{(a-1)(a-2)(a-3)}=\frac{-2\cancel{(a-3)}(a-3)}{(a-1)(a-2)\cancel{(a-3)}}$$

$$\boxed{y=\frac{-2(a-3)}{(a-1)(a-2)}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & a-1 & -1\\ 0 & a-1 & -2\\ 1 & 0 & -a+4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a-1 & 1\\ 0 & a-1 & 2\\ 1 & 0 & a^2-5a+5\end{vmatrix}}=\frac{(a-1)(-a+4)-2(a-1)+(a-1)}{(a-1)\left(a^2-5a+5+2-1\right)}$$

$$z=\frac{\cancel{(a-1)}(-a+4-2+1)}{\cancel{(a-1)}(a-2)(a-3)}=\frac{-a+3}{(a-2)(a-3)}=\frac{-(a-3)}{(a-2)(a-3)}=\boxed{\frac{-1}{a-2}=z}$$

La solución es $x=\dfrac{a-3}{a-2}$; $y=\dfrac{-2(a-3)}{(a-1)(a-2)}$; $z=\dfrac{-1}{a-2}$

CASO 2. $a=1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+z=-1 \\ 2z=-2 \\ x+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=-1 \\ \boxed{z=-1} \\ x+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=-1 \\ x-1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

El sistema es incompatible

CASO 3. $a=2$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ y+2z=-2 \\ x-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=-1 \\ y=-2-2z \\ x=2+z \end{cases} \Rightarrow 2+z-2-2z+z=-1 \Rightarrow 0=-1$$

El sistema es incompatible

CASO 4. $a=3$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ 2y+2z=-2 \\ x-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=-1 \\ y=-1-z \\ x=1+z \end{cases} \Rightarrow 1+z-2-2z+z=-1 \Rightarrow -1=-1$$

El sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=t \end{cases}$

A2) Dados el punto $P \equiv (1,-1,0)$ y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x-y-2z+1=0 \\ 3x-y-4z+6=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{1}$$

halla la ecuación general de un plano π que sea paralelo a ambas rectas y tal que la distancia de P a π sea 2. (2 puntos)

Averiguamos la posición relativa de las dos rectas.
Para ello obtenemos las ecuaciones paramétricas de las rectas.

$$r \equiv \begin{cases} 2x-y-2z+1=0 \\ 3x-y-4z+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y-2z+1=0 \\ y=3x-4z+6 \end{cases} \Rightarrow 2x-3x+4z-6-2z+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+2z-5=0 \Rightarrow x=2z-5 \Rightarrow y=3(2z-5)-4z+6=2z-9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-5+2\alpha \\ y=-9+2\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(2,2,1) \\ P_r(-5,-9,0) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=1+\beta \\ y=0 \\ z=-1+\beta \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(1,0,1) \\ Q_s(1,0,-1) \end{cases}$$

Las rectas no son paralelas pues las coordenadas de sus vectores directores no son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(2,2,1) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{2}{0} \neq \frac{1}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el producto mixto $\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(-5,-9,0) \\ Q_s(1,0,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s}=(1,0,-1)-(-5,-9,0)=(6,9,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_rQ_s}=(6,9,-1) \\ \overrightarrow{v_r}=(2,2,1) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix} 6 & 9 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=12+9+2-18=5 \neq 0$$

Como este producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

El plano π que se pide tiene como vectores directores el vector $\overrightarrow{v_r}=(2,2,1)$ director de la recta *r* y el vector director $\overrightarrow{u_s}=(1,0,1)$ de la recta *s*.
El vector normal del plano π es el producto vectorial de dichos vectores.

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{v_r}=(2,2,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=2i+j-2k-2j=2i-j-2k=(2,-1,-2)$$

Por lo que el plano π tiene ecuación $\pi\equiv 2x-y-2z+D=0$.

Para determinar el valor de D utilizamos que la distancia del plano al punto P debe ser 2.

Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left.\begin{array}{r}\pi\equiv 2x-y-2z+D=0\\ P(1,-1,0)\\ d(P,\pi)=2\end{array}\right\}\Rightarrow d(P,\pi)=\frac{|2+1-0+D|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{|3+D|}{\sqrt{9}}=2\Rightarrow|3+D|=6\Rightarrow\begin{cases}3+D=6\to D=3\to\boxed{\pi\equiv 2x-y-2z+3=0}\\ o\\ 3+D=-6\to D=-9\to\boxed{\pi'\equiv 2x-y-2z-9=0}\end{cases}$$

Existen dos planos cumpliendo las condiciones pedidas:

$$\pi\equiv 2x-y-2z+3=0 \quad \text{y} \quad \pi'\equiv 2x-y-2z-9=0$$

A3) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right) \qquad \text{(1 punto)}$$

$$\lim_{x\to1}\left(\cos(\pi x)+2^x\right)^{\frac{1}{\ln x}} \qquad \text{(1 punto)}$$

Primer límite.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right)=\infty-\infty=\text{Indeterminación}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right)\left(\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}\right)}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+3x+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x^2-5x+7}\right)^2}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x+1-\left(2x^2-5x+7\right)}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2x^2}+3x+1-\cancel{2x^2}+5x-7}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x-6}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{8x}{x}-\frac{6}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8-\frac{6}{x}}{\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}}=$$

$$=\frac{8-0}{\sqrt{2+0+0}+\sqrt{2-0+0}}=\frac{8}{2\sqrt{2}}=\boxed{2\sqrt{2}}$$

Segundo límite

$$\lim_{x\to1}\left(\cos(\pi x)+2^x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\left(\cos(\pi)+2^1\right)^{\frac{1}{\ln 1}}=1^\infty=\text{Indeterminación}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\ln x}\left(\cos(\pi x)+2^x-1\right)}=\ldots$$

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x}\left(\cos(\pi x)+2^x-1\right)=\lim_{x\to1}\frac{\cos(\pi x)+2^x-1}{\ln x}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-\pi sen(\pi x)+2^x\ln 2}{\frac{1}{x}}=\frac{-\pi sen(\pi)+2^1\ln 2}{\frac{1}{1}}=2\ln 2=\ln 4$$

$$\ldots=e^{\ln 4}=\boxed{4}$$

A4) Demuestra que la función $f(x) = sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x^2+x}$ tiene un máximo relativo en el intervalo (1, 3). Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

Para que la función tenga un extremo relativo su derivada debe anularse.

$$f(x) = sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x^2+x} \Rightarrow f\,'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x^2+x} + sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

Comprobamos que la función derivada cumple las condiciones del teorema de Bolzano.

1. La función *f ´(x)* es continua en el intervalo [1, 3] pues es producto y suma de funciones continuas. Solo falta ver que x^2+x no se anula en dicho intervalo ni es negativo para que exista la raíz y la fracción.

   $$x \in [1,3] \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x(x+1) \geq 1\cdot(1+1) = 2$$

   La expresión x^2+x es siempre positivo y la función *f ´(x)* es continua.

2. La función *f ´(x)* toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo [1, 3].

$$f\,'(3) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\sqrt{3^2+3} + sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\frac{6+1}{2\sqrt{3^2+3}} = 0 - \frac{7}{2\sqrt{12}} < 0$$
$$f\,'(1) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{1^2+1} + sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{2+1}{2\sqrt{1^2+1}} = 0 + \frac{3}{2\sqrt{2}} > 0$$

Se cumplen las condiciones del teorema y existe $\alpha \in (1,3)$ donde la función *f ´(x)* se anula, es decir, tal que $f\,'(\alpha) = 0$.

$x = \alpha$ es un punto crítico de la función *f(x)*.

Como hemos visto que la derivada toma valor positivo en *x = 1* la función crece antes de $x = \alpha$ y como la derivada toma valor negativo en *x = 3* la función decrece después de $x = \alpha$, por lo que la función presenta un máximo en $x = \alpha$.

OPCIÓN B

B1) Calcula los valores del parámetro *t* para los que la siguiente matriz no es regular:

$$A=\begin{pmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 puntos)}$$

Para que la matriz no sea regular su determinante debe ser nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -(t+1) & 1 \end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{c}\text{Saco } t+1 \text{ factor común} \\ \text{en } 2^{\text{a}} \text{ columna}\end{array}\right\}=$$

$$=(t+1)\begin{vmatrix} -t & 1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(t+1)\left[-2t+2+t-1-1+t^2-t\right]=(t+1)\left[t^2-2t\right]=(t+1)t(t-2)$$

$$|A|=0 \Rightarrow (t+1)t(t-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} t+1=0 \rightarrow \boxed{t=-1} \\ o \\ \boxed{t=0} \\ o \\ t-2=0 \rightarrow \boxed{t=2} \end{cases}$$

La matriz A no es regular cuando *t = –1* o *t = 0* o *t = 2*.

B2) Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (-4,2,0)$ y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x+3y+z-1=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases} \quad y \quad r_2 \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{3}$$ (3 puntos)

Estudiamos la posición relativa de las dos rectas.
Obtenemos sus ecuaciones paramétricas.

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x+3y+z-1=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y+z-1=0 \\ x=-2y+3 \end{cases} \Rightarrow 2(-2y+3)+3y+z-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4y+6+3y+z-1=0 \Rightarrow -y+z+5=0 \Rightarrow z=-5+y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x=3-2\alpha \\ y=\alpha \\ z=-5+\alpha \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} \vec{v_1}=(-2,1,1) \\ P_1(3,0,-5) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{3} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x=-1-2\beta \\ y=-3+3\beta \\ z=-2+3\beta \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} \vec{v_2}=(-2,3,3) \\ Q_2(-1,-3,-2) \end{cases}$$

Las rectas no son paralelas pues las coordenadas de sus vectores directores no son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_2}=(-2,3,3) \\ \vec{v_1}=(-2,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2}{-2} \neq \frac{3}{1} = \frac{3}{1}$$

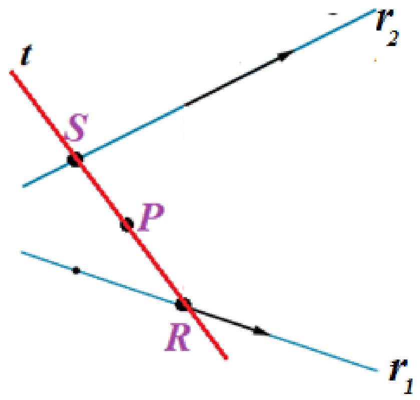
Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el producto mixto $\left[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{P_1Q_2}\right]$.

$$\left.\begin{array}{l} P_1(3,0,-5) \\ Q_2(-1,-3,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_1Q_2} = (-1,-3,-2)-(3,0,-5) = (-4,-3,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_1Q_2}=(-4,-3,3) \\ \vec{v_1}=(-2,1,1) \\ \vec{v_2}=(-2,3,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{P_1Q_2}\right] = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1-12+6-18+6-18+12 = -23 \neq 0$$

Como este producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

Debemos encontrar un punto R de la recta r_1 y un punto S de la recta r_2 tal que junto con el punto P estén alineados.



Hallamos la recta *t* pedida determinando el plano π que contiene a la recta r_2 y al punto P. Dicho plano corta a la recta r_1 en el punto R buscado.

Determino el plano π. Este plano tiene como vectores directores el vector director de r_2 y el vector que une un punto cualquiera de r_2 con el punto P.

$$r_2 \equiv \begin{cases} \vec{v_2} = (-2,3,3) \\ Q_2(-1,-3,-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = \vec{v_2} = (-2,3,3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ_2} = (-1,-3,-2)-(-4,2,0) = (3,-5,-2) \Rightarrow \\ P(-4,2,0) \in \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+4 & y-2 & z \\ -2 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6x-24+9y-18+10z-9z-4y+8+15x+60=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 9x+5y+z+26=0$$

Determinamos el punto R de r_1 de corte con el plano π.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 9x+5y+z+26=0 \\ r_1 \equiv \begin{cases} x = 3-2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -5+\alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 9(3-2\alpha)+5\alpha-5+\alpha+26=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27-18\alpha+5\alpha-5+\alpha+26=0 \Rightarrow -12\alpha+48=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 3-8=-5 \\ y = 4 \\ z = -5+4=-1 \end{cases} \Rightarrow R(-5,4,-1)$$

Hallamos la ecuación de la recta *t* que pasa por P con vector director $\overrightarrow{RP}$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v_t} = \overrightarrow{RP} = (-4,2,0)-(-5,4,-1) = (1,-2,1) \\ P(-4,2,0) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{t \equiv \frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}}$$

B3) Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x)=(x^2-3)e^{-x+2}$ en el intervalo [–2, 4]. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

La función es continua en el intervalo [–2, 4] pues es producto de dos funciones continuas. Por el teorema de Weierstrass la función *f* alcanza en dicho intervalo sus extremos absolutos. Éstos se encuentran en los extremos del intervalo o entre sus extremos relativos.

Localizamos los extremos relativos usando la derivada.

$$f(x)=(x^2-3)e^{-x+2} \Rightarrow f'(x)=2xe^{-x+2}+(-1)(x^2-3)e^{-x+2}=(2x-x^2+3)e^{-x+2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow (2x-x^2+3)e^{-x+2}=0 \Rightarrow -x^2+2x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(-1)3}}{-2}$$

$$x=\frac{-2\pm 4}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-2+4}{-2}=-1\in[-2,4]\\ o\\ \dfrac{-2-4}{-2}=3\in[-2,4]\end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en los puntos críticos obtenidos.

$$x=-2 \to f(-2)=\left((-2)^2-3\right)e^{2+2}=e^4\simeq 54.6 \text{ ¡Máximo!}$$

$$x=-1 \to f(-1)=\left((-1)^2-3\right)e^{1+2}=-2e^3<0 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$x=3 \to f(3)=(3^2-3)e^{-3+2}=\frac{6}{e}\simeq 2.21$$

$$x=4 \to f(4)=(4^2-3)e^{-4+2}=13e^{-2}=\frac{13}{e^2}\simeq 1.76$$

La función tiene un máximo absoluto en *x = –2* y un mínimo absoluto en *x = –1*.

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ y $g(x)=\frac{x^2}{4}-1$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 puntos)

Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)=\frac{x^2}{4}-1\Rightarrow \frac{x^2}{4}-1=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

$$\text{lo comprobamos}\rightarrow\begin{cases} x=-2\rightarrow \cos\left(\frac{-2\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0=\frac{(-2)^2}{4}-1 \\ x=2\rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0=\frac{2^2}{4}-1 \end{cases}$$

Hallamos la integral definida entre –2 y 2 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\int_{-2}^{2}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\left(\frac{x^2}{4}-1\right)dx=\int_{-2}^{2}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\frac{x^2}{4}+1dx=\left[\frac{4}{\pi}sen\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\frac{x^3}{12}+x\right]_{-2}^{2}=$$

$$=\left[\frac{4}{\pi}sen\left(\frac{2\pi}{4}\right)-\frac{2^3}{12}+2\right]-\left[\frac{4}{\pi}sen\left(\frac{-2\pi}{4}\right)-\frac{(-2)^3}{12}-2\right]=$$

$$=\frac{4}{\pi}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{3}+2-\frac{4}{\pi}sen\left(\frac{-\pi}{2}\right)-\frac{2}{3}+2=$$

$$=\frac{4}{\pi}-\frac{2}{3}+2+\frac{4}{\pi}-\frac{2}{3}+2=\frac{8}{\pi}+4-\frac{4}{3}=\boxed{\frac{8}{\pi}+\frac{8}{3}\simeq 5.21}$$

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida calculada: $\frac{8}{\pi}+\frac{8}{3}\simeq 5.21\,u^2$

No pide dibujarla, pero lo hacemos para comprobar la solución obtenida.