uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2020-2021** **MATERIA**: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considere la región del plano S definida por

$$y \le 5, \quad 2x+3y \le 25, \quad 3x+2y \ge 10, \quad 6y-x \ge 10$$

a) Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor máximo de la función $f(x,\ y)=x+3y$ en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor.

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considere la función real de variable real

$$f(x)=3x^3-ax+1$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que el punto de abscisa $x = 1$ de la función $f(x)$ sea un punto de tangente horizontal. Determine si es un máximo, mínimo o punto de inflexión.

b) Determine el valor del parámetro real a para que se cumpla que la $\int_0^1 f(x)\,dx=1$.

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3a \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores del parámetro real a para que A sea invertible.

b) Para $a = 1$, calcule A^{-1}.

A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
En un bar, a la hora del aperitivo, el 60% de los clientes tienen más de 40 años. Los mayores de 40 años, en un 70% prefieren tomar cerveza sin alcohol, mientras que en el resto solo un 25% toman cerveza sin alcohol. Calcule la probabilidad de que un cliente al azar:

a) Tome cerveza sin alcohol.

b) Tenga 40 años o menos, dado que toma cerveza sin alcohol.

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
En el envasado de un determinado producto, medido en gramos (g), se establece que la cantidad de producto se puede aproximar por una distribución normal con media μ y desviación σ = 6g.

a) Se observa que el contenido en los envases del producto, en una muestra de tamaño $n = 36$, tiene una media de 500g. Calcule un intervalo de confianza al 95% para la media μ.

b) Determine el tamaño de la muestra necesario para que un intervalo al 95% tenga un error menor que 1,5g.

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=9 \\ x+y-az=0 \\ y+az=3 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de *a*.
b) Resuelva el sistema para *a = –2*.

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\frac{9-x^2}{4-x^2}$$

a) Halle el dominio y sus asíntotas.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\sqrt{x^2-9}$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa *x = 5*.
b) Calcule $\int_3^5 9x\sqrt{x^2-9}\,dx$.

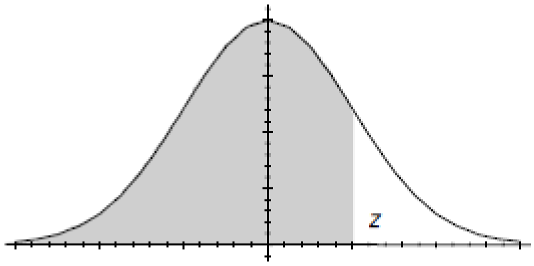
B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran los sucesos A y B tales que *P(A) = 0,8*, *P(B) = 0,4* y $P(A \cap B)=0{,}3$.
a) ¿Son independientes? Justifique su respuesta.
b) Calcule $P\left(\overline{B}/A\right)$.

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El número de pasajeros en un día laborable en el metro de Madrid, medido en millones de individuos, se puede aproximar por una distribución normal con media μ y desviación σ = 0,1 millones.
a) Si μ = 2,2 y se toma una muestra al azar de 25 días, calcule la probabilidad de que $\overline{X}$ no supere los 2,25 millones de pasajeros.
b) De una muestra de *n = 16* días, tomados al azar, se obtuvo una media muestral de 2,19. Para esta muestra, calcule un intervalo de confianza para μ al 90 %.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considere la región del plano S definida por

$$y \le 5, \quad 2x+3y \le 25, \quad 3x+2y \ge 10, \quad 6y-x \ge 10$$

a) Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.
b) Obtenga el valor máximo de la función $f(x, y) = x+3y$ en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor.

a) Para dibujar la región S empezamos dibujando las rectas que la delimitan.

$y=5$

x	$y=5$
0	5
5	5

$2x+3y=25$

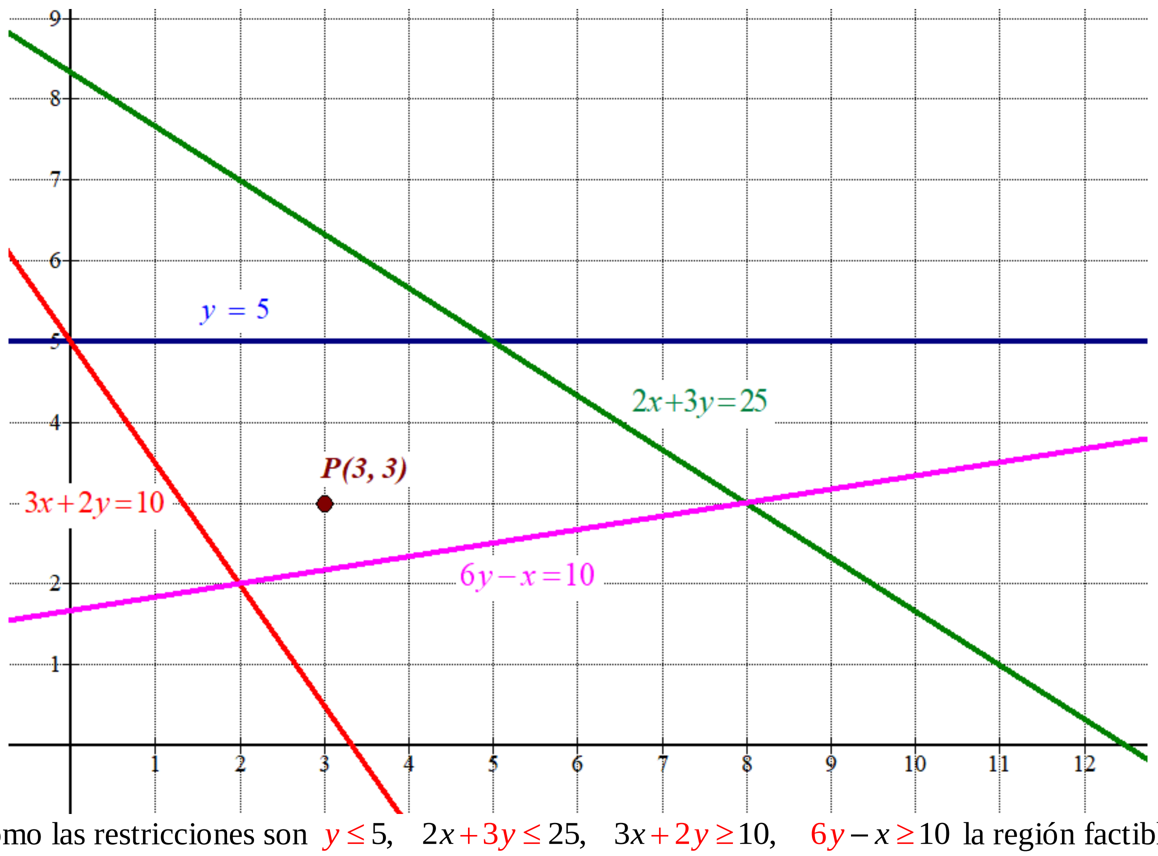
x	$y=\frac{25-2x}{3}$
5	5
8	3

$3x+2y=10$

x	$y=\frac{10-3x}{2}$
0	5
2	2

$6y-x=10$

x	$y=\frac{x+10}{6}$
2	2
8	3

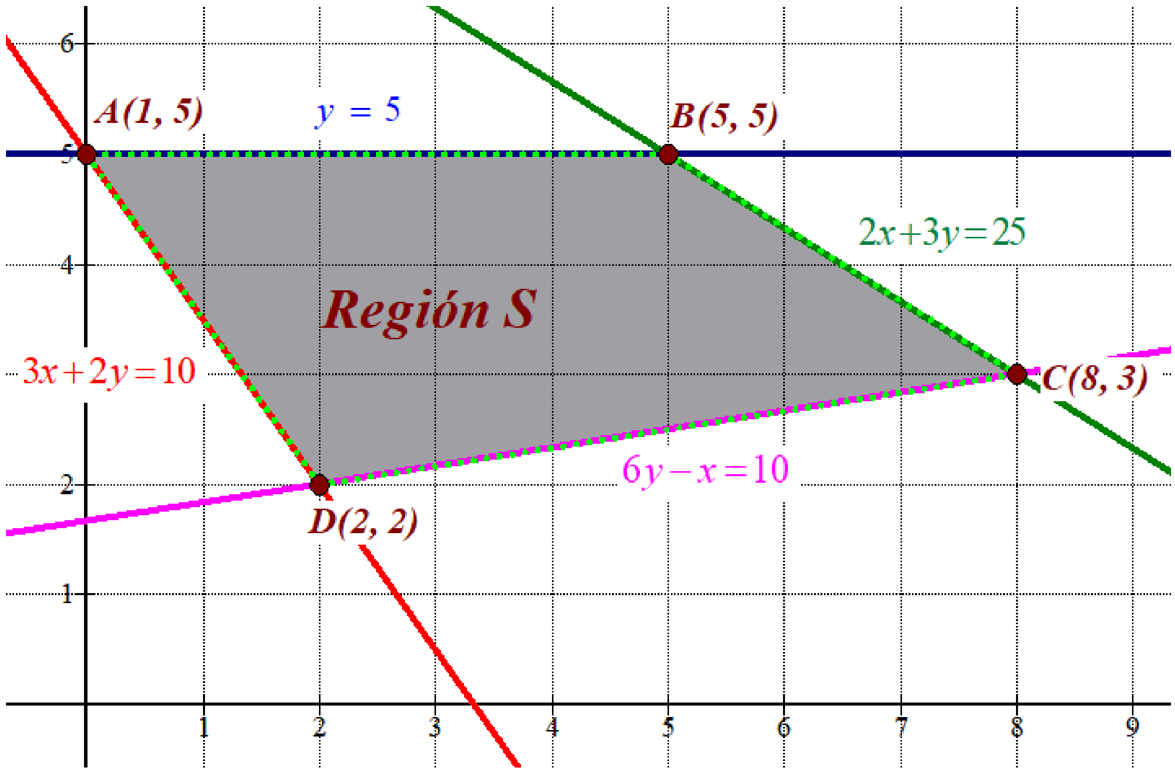


Como las restricciones son $y \le 5, \quad 2x+3y \le 25, \quad 3x+2y \ge 10, \quad 6y-x \ge 10$ la región factible es la región del plano situada por encima de la recta roja y rosa, y por debajo de las rectas azul y verde.

Comprobamos que el punto P(3, 3) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones:

$$3 \le 5, \quad 2\cdot 3+3\cdot 3 \le 25, \quad 3\cdot 3+2\cdot 3 \ge 10, \quad 6\cdot 3-3 \ge 10$$

Se cumplen todas y la región factible es la indicada. La coloreamos de gris y establecemos las coordenadas de los vértices de dicha región.



b) Se desea maximizar la función $f(x, y) = x + 3y$.
La valoramos en cada vértice de la región S.

A(1, 5) → $f(1,5) = 1 + 15 = 16$
B(5, 5) → $f(5,5) = 5 + 15 = 20 \rightarrow ¡Máximo!$
C(8, 3) → $f(8,3) = 8 + 9 = 17$
D(2, 2) → $f(2,2) = 2 + 6 = 8$

El valor máximo de la función es 20 y se alcanza en el punto B(5, 5).

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considere la función real de variable real

$$f(x)=3x^3-ax+1$$

a) Determine el valor del parámetro real *a* para que el punto de abscisa *x = 1* de la función *f (x)* sea un punto de tangente horizontal. Determine si es un máximo, mínimo o punto de inflexión.

b) Determine el valor del parámetro real *a* para que se cumpla que la $\int_0^1 f(x)\,dx=1$.

a) Si en el punto de abscisa *x = 1* la función *f (x)* tiene tangente horizontal significa que la derivada en *x = 1* es 0 → $f'(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=3x^3-ax+1 \Rightarrow f'(x)=9x^2-a \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=9\cdot 1^2-a \Rightarrow 9-a=0 \Rightarrow \boxed{a=9}$$

En *x = 1* tenemos un punto crítico. Comprobamos si es máximo o mínimo usando el signo de la segunda derivada.

$$f'(x)=9x^2-9 \Rightarrow f''(x)=18x \Rightarrow f''(1)=18>0$$

Al ser la derivada segunda positiva en *x = 1* tenemos un mínimo relativo.

b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x)\,dx=\int 3x^3-ax+1dx=3\frac{x^4}{4}-a\frac{x^2}{2}+x+C$$

Lo aplicamos a la integral definida.

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 3x^3-ax+1dx=\left[3\frac{x^4}{4}-a\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1=\left[3\frac{1^4}{4}-a\frac{1^2}{2}+1\right]-\left[3\frac{0^4}{4}-a\frac{0^2}{2}+0\right]=\frac{3}{4}-\frac{a}{2}+1$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=1 \Rightarrow \frac{3}{4}-\frac{a}{2}+1=1 \Rightarrow \frac{3}{4}-\frac{a}{2}=0 \Rightarrow \frac{3-2a}{4}=0 \Rightarrow 3-2a=0 \Rightarrow \boxed{a=\frac{3}{2}}$$

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3a \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores del parámetro real *a* para que A sea invertible.
b) Para $a = 1$, calcule A^{-1}.

a) Para que la matriz A sea invertible debe tener determinante no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3a \end{vmatrix} = 6a + 6a = 12a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 12a = 0 \Rightarrow a = 0$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de *a* distinto de 0.

b) Para $a = 1$ la matriz A tiene inversa. Calculamos A^{-1}.

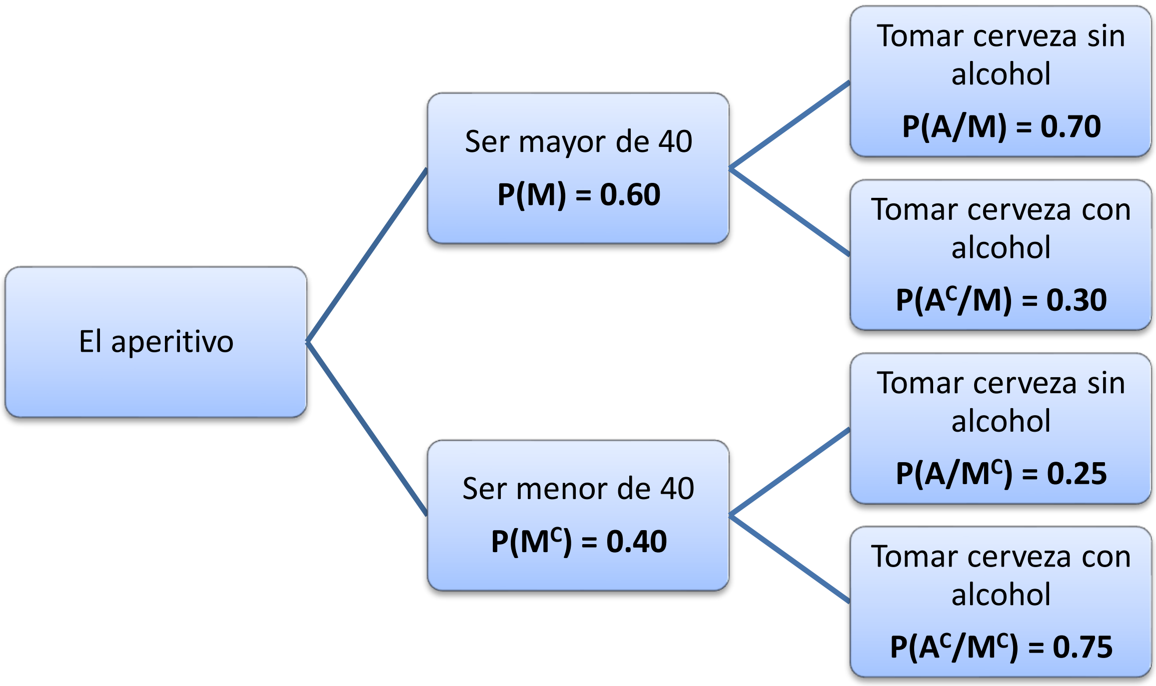
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 6 = 12$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{12} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
En un bar, a la hora del aperitivo, el 60% de los clientes tienen más de 40 años. Los mayores de 40 años, en un 70% prefieren tomar cerveza sin alcohol, mientras que en el resto solo un 25% toman cerveza sin alcohol. Calcule la probabilidad de que un cliente al azar:
a) Tome cerveza sin alcohol.
b) Tenga 40 años o menos, dado que toma cerveza sin alcohol.

Llamamos M = “Ser mayor de 40 años” y A = “Tomar cerveza sin alcohol”.
Realizamos un diagrama de árbol.



a) $P(A)=P(M)P(A/M)+P(M^C)P(A/M^C)=0.6\cdot 0.7+0.4\cdot 0.25=\boxed{0.52}$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

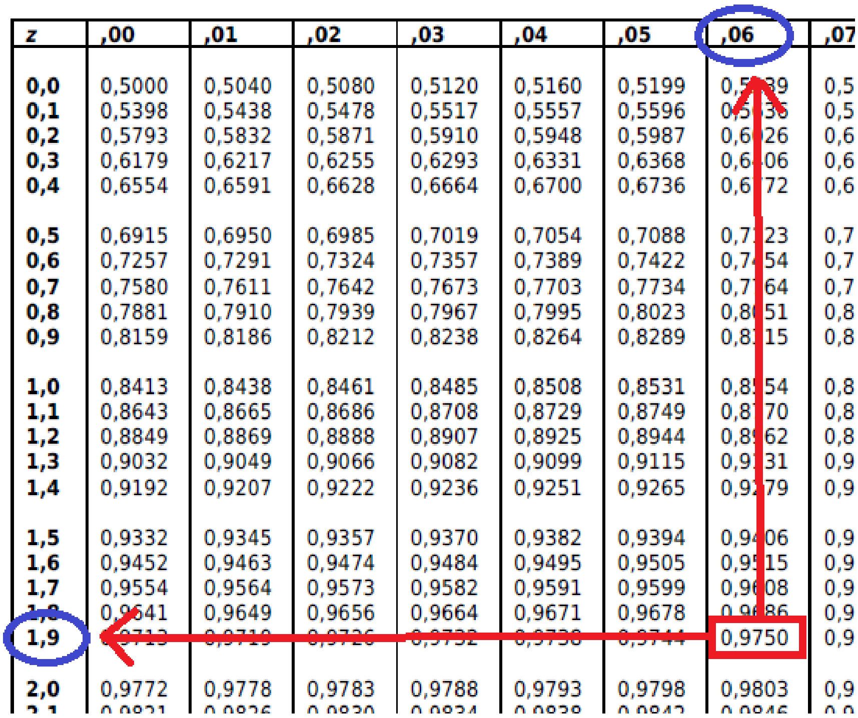
$$P(M^C/A)=\frac{P(M^C\cap A)}{P(A)}=\frac{P(M^C)P(A/M^C)}{P(A)}=\frac{0.4\cdot 0.25}{0.52}=\boxed{\frac{5}{26}\simeq 0.192}$$

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
En el envasado de un determinado producto, medido en gramos (g), se establece que la cantidad de producto se puede aproximar por una distribución normal con media μ y desviación σ = 6g.
a) Se observa que el contenido en los envases del producto, en una muestra de tamaño *n = 36*, tiene una media de 500g. Calcule un intervalo de confianza al 95% para la media μ.
b) Determine el tamaño de la muestra necesario para que un intervalo al 95% tenga un error menor que 1,5g.

a) X = Cantidad de producto envasado (en gramos).
X = N(μ, 6)
Tamaño de muestra = n = 36 y $\bar{x} = 500$

Con un nivel de confianza del 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

1– α = 0,95 → α = 0,05 → α/2 = 0,025 → 1 – α/2 = 0,975 → $z_{\alpha/2} = 1.96$



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	[illegible]	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	[illegible]	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	[illegible]	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	[illegible]	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	[illegible]	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	[illegible]	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	[illegible]	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	[illegible]	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	[illegible]	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	[illegible]	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	[illegible]	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	[illegible]	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	[illegible]	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	[illegible]	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	[illegible]	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	[illegible]	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	[illegible]	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	[illegible]	0,9
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	[illegible]	0,9
1,9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0,9750}$	0,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9
2,1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{6}{\sqrt{36}} = 1.96$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(500 - 1.96, \quad 500 + 1.96\right) = \left(498.04, \quad 501.96\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 95 % obtenemos $z_{\alpha/2}=1.96$.
Aplicamos la fórmula del error para un error de 1,5g.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.5 = 1.96\cdot\frac{6}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.5 = \frac{11.76}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{11.76}{1.5} = 7.84 \Rightarrow \boxed{n = 7.84^2 = 61.46}$$

La muestra debe ser de un tamaño superior igual o superior a 62.

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=9 \\ x+y-az=0 \\ y+az=3 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de *a*.
b) Resuelva el sistema para *a* = *–2*.

a) La matriz de coeficientes y matriz ampliada asociada al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}; \quad A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=a+1-a+a=a+1$$

$$|A|=0 \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

CASO 1. $a \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas, por lo que el sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

El sistema queda $\left.\begin{array}{r} x+y+z=9 \\ x+y+z=0 \\ y-z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ ¡Im *posible*!

Nos queda la ecuación primera y segunda con dos igualdades imposibles de cumplir de forma simultanea (ser igual a 9 y a 0). El sistema es **incompatible**.

b) Para *a* = *–2* el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=9 \\ x+y+2z=0 \\ y-2z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=9 \\ x+y+2z=0 \\ y=3+2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3+2z+z=9 \\ x+3+2z+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3z=6 \\ x+4z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=6-3z \\ x+4z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow 6-3z+4z=-3 \Rightarrow \boxed{z=-9} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x=6-3(-9)=33} \\ \boxed{y=3+2(-9)=-15} \end{array}\right.$$

La solución es $x=33;\ y=-15;\ z=-9$

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\frac{9-x^2}{4-x^2}$$

a) Halle el dominio y sus asíntotas.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

a) El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulan el denominador.

$$4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-2,+2\}$.

Asíntota vertical. $x=a$.

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{9-x^2}{4-x^2}=\frac{5}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical.

¿ $x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{9-x^2}{4-x^2}=\frac{5}{0}=\infty$$

$x=-2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{9-x^2}{4-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{-x^2}=1$$

$y=1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

Al tener asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.

b) Obtenemos la derivada de la función y hallamos donde se anula.

$$f'(x)=\frac{-2x\cdot(4-x^2)-(-2x)(9-x^2)}{(4-x^2)^2}=\frac{-8x+\cancel{2x^3}+18x-\cancel{2x^3}}{(4-x^2)^2}=\frac{10x}{(4-x^2)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{10x}{(4-x^2)^2}=0 \Rightarrow 10x=0 \Rightarrow x=0$$

En $x = 0$ la función tiene un punto crítico.

En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$f'(-3)=\dfrac{10(-3)}{\left(4-(-3)^2\right)^2}=\dfrac{-30}{25}<0$. La función decrece en $(-\infty,-2)$.

En el intervalo $(-2,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{10(-1)}{\left(4-(-1)^2\right)^2}=\dfrac{-10}{9}<0$.

La función decrece en $(-2,0)$.

En el intervalo $(0,+2)$ tomamos *x* = *1* y la derivada vale $f'(1)=\frac{10(1)}{\left(4-(1)^2\right)^2}=\frac{10}{9}>0$. La función crece en $(0,+2)$.

En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos *x* = *3* y la derivada vale $f'(3)=\frac{10(3)}{\left(4-(3)^2\right)^2}=\frac{30}{25}>0$. La función crece en $(2,+\infty)$.

La función decrece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y crece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\sqrt{x^2-9}$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa $x = 5$.

b) Calcule $\int_3^5 9x\sqrt{x^2-9}\,dx$.

a) La recta tangente en $x = 5$ tiene ecuación $y-f(5)=f'(5)(x-5)$.

$$f(5)=\sqrt{5^2-9}=4$$

$$f(x)=\sqrt{x^2-9} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} \Rightarrow f'(5)=\frac{5}{2\sqrt{5^2-9}}=\frac{5}{2\sqrt{16}}=\frac{5}{8}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(5)=4 \\ f'(5)=\dfrac{5}{8} \\ y-f(5)=f'(5)(x-5) \end{array}\right\} \Rightarrow y-4=\frac{5}{8}(x-5) \Rightarrow y=\frac{5}{8}x-\frac{25}{8}+4 \Rightarrow \boxed{y=\frac{5}{8}x+\frac{7}{8}}$$

b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int 9x\sqrt{x^2-9}\,dx=\left\{\begin{array}{l} Cambio\ de\ variable \\ x^2-9=t \Rightarrow 2xdx=dt \\ dx=\dfrac{1}{2x}dt \end{array}\right\}=\int 9\cancel{x}\sqrt{t}\,\frac{1}{2\cancel{x}}\,dt=\frac{9}{2}\int\sqrt{t}\,dt=\frac{9}{2}\int t^{1/2}dt=$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\frac{t^{1/2+1}}{1/2+1}=\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2}=3\sqrt{t^3}=3\sqrt{\left(x^2-9\right)^3}+C$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida pedida:

$$\int_3^5 9x\sqrt{x^2-9}\,dx=\left[3\sqrt{\left(x^2-9\right)^3}\right]_3^5=\left[3\sqrt{\left(5^2-9\right)^3}\right]-\left[3\sqrt{\left(3^2-9\right)^3}\right]=\boxed{192}$$

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran los sucesos A y B tales que *P(A) = 0,8*, *P(B) = 0,4* y $P(A\cap B)=0,3$.
a) ¿Son independientes? Justifique su respuesta.
b) Calcule $P(\overline{B}/A)$.

a) Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$**.**

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.3 \\ \left.\begin{array}{l} P(A)=0.8 \\ P(B)=0.4 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)\cdot P(B)=0.8\cdot 0.4=0.32 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)=0.3\neq 0.32=P(A)\cdot P(B)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos no son independientes.

b) $P(\overline{B}/A)=\dfrac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0.8-0.3}{0.8}=\boxed{0.625}$

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El número de pasajeros en un día laborable en el metro de Madrid, medido en millones de individuos, se puede aproximar por una distribución normal con media μ y desviación σ = 0,1 millones.
a) Si μ = 2,2 y se toma una muestra al azar de 25 días, calcule la probabilidad de que $\overline{X}$ no supere los 2,25 millones de pasajeros.
b) De una muestra de *n = 16* días, tomados al azar, se obtuvo una media muestral de 2,19. Para esta muestra, calcule un intervalo de confianza para μ al 90 %.

X = Número de viajeros en un día laborable en el metro de Madrid (en millones de individuos).
X = N(μ, 0.1)

a) Tamaño de muestra = *n = 25* y μ = 2.2

$\overline{X_{25}}$ sigue una distribución normal de la misma media y desviación típica $\frac{0.1}{\sqrt{25}} = \frac{0.1}{5} = 0.02$.

$\overline{X_{25}} = N(2.2, 0.02)$

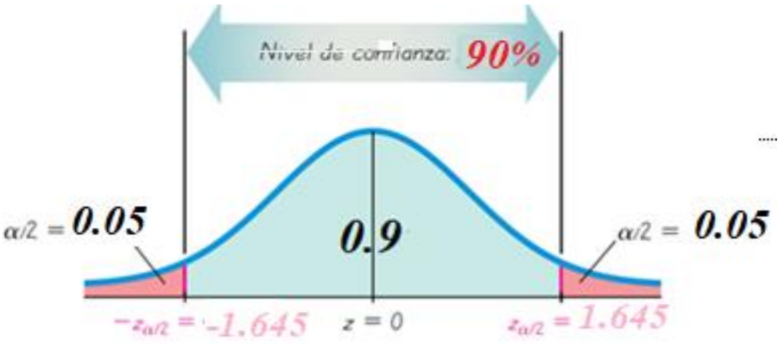
$$P\left(\overline{X_{25}} \le 2.25\right) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \frac{\overline{X_{25}} - \mu}{\sigma} \\ Z = N(0,1) \end{array} \right\} = P\left(Z \le \frac{2.25 - 2.2}{0.02}\right) = P(Z \le 2.5) =$$

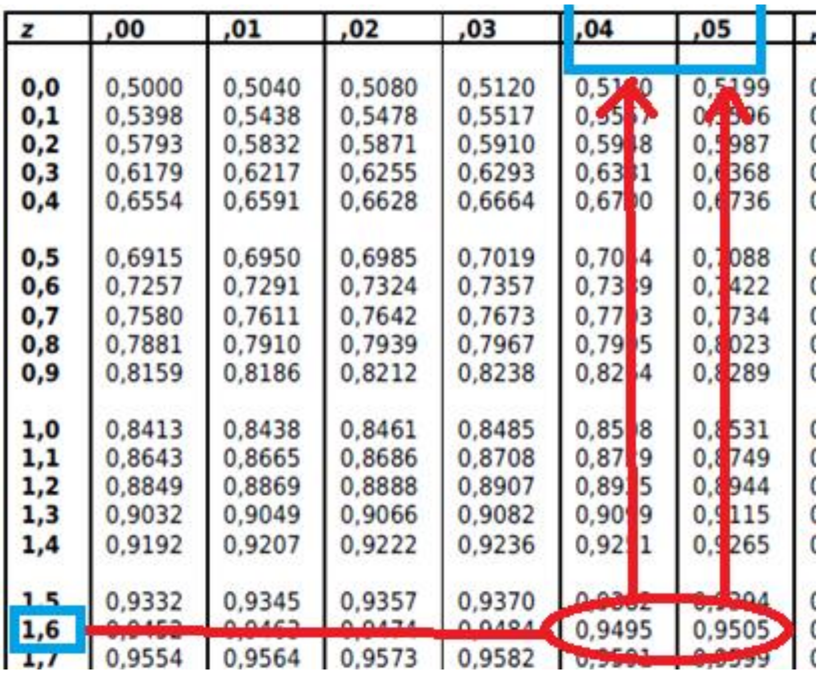
$$= \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = \boxed{0.9938}$$

z	,00	,0
0,0	0,5000	0,
0,1	0,5398	0,
0,2	0,5793	0,
0,3	0,6179	0,
0,4	0,6554	0,
0,5	0,6915	0,
0,6	0,7257	0,
0,7	0,7580	0,
0,8	0,7881	0,
0,9	0,8159	0,
1,0	0,8413	0,
1,1	0,8643	0,
1,2	0,8849	0,
1,3	0,9032	0,
1,4	0,9192	0,
1,5	0,9332	0,
1,6	0,9452	0,
1,7	0,9554	0,
1,8	0,9641	0,
1,9	0,9713	0,
2,0	0,9772	0,
2,1	0,9821	0,
2,2	0,9861	0,
2,3	0,9893	0,
2,4	0,9918	0,
2,5	$\boxed{0,9938}$	0,
2,6	[illegible]	0,

b) Con un nivel de confianza del 90 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}05 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64+1.65}{2} = 1.645$$





z	,00	,01	,02	,03	,04	,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	[illegible]	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	[illegible]	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	[illegible]	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	[illegible]	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	[illegible]	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	[illegible]	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	[illegible]	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	[illegible]	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	[illegible]	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	[illegible]	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	[illegible]	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	[illegible]	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	[illegible]	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	[illegible]	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	[illegible]	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	[illegible]	[illegible]
1,6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9495	0,9505
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	[illegible]	[illegible]

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{16}} = 0.041125$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(2.19 - 0.041125,\quad 2.19 + 0.041125\right) = \left(2.148875,\quad 2.231125\right)$$