	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2022-2023** **MATERIA**: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	Modelo orientativo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
DURACION: 90 minutos.

A.1. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine los valores de a para los cuales la matriz A es invertible.
b) Calcule A^{-1} para $a = 1$.

A.2. Una empresa de transportes ha comprado dos furgonetas, una grande y otra mediana. La normativa vigente solo permite circular un máximo de 400000 km a la grande, 250000 km a la mediana y un total de 600000 km entre ambas. Por las rutas que establece la empresa, por cada kilómetro que recorre la furgoneta grande, la mediana circula como máximo 2 km; y por cada kilómetro que recorre la furgoneta mediana, la grande hace un máximo de 4 km. Por cada kilómetro de circulación de la furgoneta grande se obtiene un beneficio de 10 céntimos y por cada kilómetro de circulación de la mediana un beneficio de 5 céntimos.
Determine el máximo beneficio posible y el número de kilómetros que debe recorrer cada una de las furgonetas para obtenerlo.

A.3. a) Represente la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ prestando especial atención a la determinación de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Determine los valores de x en los que f alcanza máximos o mínimos relativos.
b) Represente la gráfica de $g(x) = f(x-3) + 2$, donde f es la función del apartado anterior.

A.4. Considere el lanzamiento de un dado equilibrado. Sea A el suceso el resultado es 1 o 2, B el suceso el resultado es 2 o 3 y C el resultado es par.
a) Verifique que $P(A|C) = P(B|C) = P(A \cap B|C)$.
b) Calcule $P(A \cup B|C)$.

A.5. Para una población en la que se observa una variable aleatoria X con distribución normal, de media desconocida y desviación típica igual a 1,5, se tomó una muestra aleatoria simple para estimar la media poblacional y se obtuvo un intervalo de confianza cuyos extremos son 11,0703 y 12,9297.
a) Determine el valor de la media muestral.
b) Si el tamaño de la muestra fue 10, ¿cuál es el nivel de confianza del intervalo obtenido?

B.1. Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} x + ay = a \\ ax + y + az = 0 \\ z = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.
b) Resuelva el sistema para $a = 2$.

B.2. a) Determine el área de la región acotada del plano limitada inferiormente por el eje de las x y superiormente por la parábola $y = 9x - x^2$.
b) Determine el área de la región acotada del plano limitada inferiormente por la parábola $y = 9x - x^2$ y superiormente por las rectas tangentes a esa parábola en los puntos de corte con el eje de las x.

B.3. Una pastelería hace diariamente una cantidad fija de dulces cuya masa requiere de un tiempo de reposo, el cual tiene que ser de una a dos horas. La pastelería usa un ingrediente secreto. La cantidad necesaria de ingrediente secreto, medida en gramos, varía en función del tiempo de reposo de la masa según la siguiente función:

$$Q(t) = \frac{1}{2}t^4 - 3t^2 + 5, \qquad 1 \le t \le 2$$

siendo t el tiempo de reposo medido en horas.
a) La producción diaria de dulces tiene un coste fijo de 150 euros más el coste por el uso del ingrediente secreto, el cual cuesta 100 euros/gramo. Obtenga la función que representa el coste de producción diaria de estos dulces y encuentre el tiempo de reposo de la masa que minimiza dicho coste. Indique el valor del coste mínimo.
b) Obtenga el tiempo de reposo que maximiza el coste de producción e indique la cantidad de ingrediente secreto que se necesitaría en este caso.

B.4. Se tienen 7 sobres cerrados. Uno de ellos contiene un premio y el resto son sobres vacíos. Se lanza un dado y luego se descartan tantos sobres vacíos como el dado indique. Posteriormente, se escoge al azar uno de los sobres que restan.
a) ¿Cuál es la probabilidad de escoger el sobre premiado?
b) Si salió el premio, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del dado haya sido el 1?

B.5. Para estimar la proporción de estudiantes de una determinada facultad que utilizan la cafetería se toma una muestra de estudiantes al azar.
a) Sabiendo que la proporción poblacional es P = 0,55, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de estudiantes para garantizar que, con una confianza del 98,02%, el margen de error en la estimación no supera el 10%.
b) Si la muestra aleatoria fue de 100 estudiantes, de los cuales 70 utilizaban la cafetería, determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de estudiantes que utilizan la cafetería.

SOLUCIONES

A.1. Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & a\\ a & 1 & -a\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

a) Determine los valores de *a* para los cuales la matriz *A* es invertible.
b) Calcule A^{-1} para $a = 1$.

a) Calculamos el determinante de la matriz A y averiguamos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ a & 1 & -a\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=1+a+a^2-a+a+a=a^2+2a+1$$

$$|A|=0\Rightarrow a^2+2a+1=0\Rightarrow a=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4}}{2}=-1$$

La matriz A tiene inversa con cualquier valor de *a* distinto de –1.

b) Para $a = 1$ la matriz A tiene inversa.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=1^2+2+1=4\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}}{4}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ -1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}}$$

A.2. Una empresa de transportes ha comprado dos furgonetas, una grande y otra mediana. La normativa vigente solo permite circular un máximo de 400000 km a la grande, 250000 km a la mediana y un total de 600000 km entre ambas. Por las rutas que establece la empresa, por cada kilómetro que recorre la furgoneta grande, la mediana circula como máximo 2 km; y por cada kilómetro que recorre la furgoneta mediana, la grande hace un máximo de 4 km. Por cada kilómetro de circulación de la furgoneta grande se obtiene un beneficio de 10 céntimos y por cada kilómetro de circulación de la mediana un beneficio de 5 céntimos.

Determine el máximo beneficio posible y el número de kilómetros que debe recorrer cada una de las furgonetas para obtenerlo.

Sea "x" la variable que representa los **miles** de kilómetros recorridos por la furgoneta grande.
Sea "y" la variable que representa los **miles** de kilómetros recorridos por la furgoneta mediana.
Hallamos las restricciones que se pueden obtener a partir de los datos del ejercicio.

- Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ y \geq 0$
- La normativa vigente solo permite circular un máximo de 400000 km a la grande, 250000 km a la mediana → $x \leq 400;\ \ y \leq 250$
- Por cada kilómetro que recorre la furgoneta grande, la mediana circula como máximo 2 km → $y \leq 2x$
- Por cada kilómetro que recorre la furgoneta mediana, la grande hace un máximo de 4 km → $x \leq 4y$
- Solo permite circular un total de 600000 km entre ambas → $x + y \leq 600$

El sistema de inecuaciones que representa las restricciones es:

$$\left.\begin{array}{l} x \leq 400;\ \ y \leq 250 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \\ y \leq 2x \\ x \leq 4y \\ x + y \leq 600 \end{array}\right\}$$

La función objetivo es:

Por cada kilómetro de circulación de la furgoneta grande se obtiene un beneficio de 10 céntimos (cada 1000 km obtiene 10000 céntimos = 100 €) y por cada kilómetro de circulación de la mediana un beneficio de 5 céntimos (cada 1000 km obtiene 5000 céntimos = 50 €) → $f(x,y) = 100x + 50y$ en euros.

Representamos las rectas asociadas a cada inecuación:

$x \geq 0;\ y \geq 0$ — Primer cuadrante

$x = 400$

$x = 400$	y
400	100
400	200

$y = 250$

x	$y = 250$
100	250
200	250

$y = 2x$

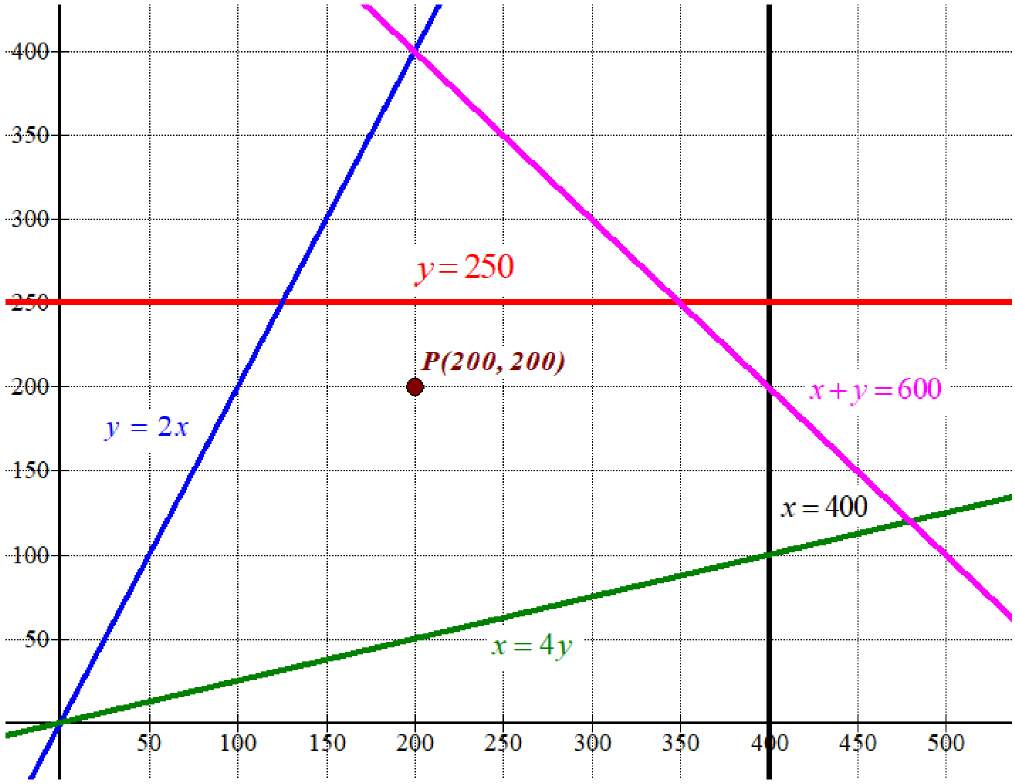
x	$y = 2x$
100	200
0	0

$x = 4y$

x	$y = \frac{x}{4}$
0	0
400	100

$x + y = 600$

x	$y = 600 - x$
0	600
400	250



Por las condiciones se cumple que la región factible es la región del primer cuadrante situada por encima de la recta verde, a la izquierda de la negra y por debajo de la azul, la roja y la rosa.

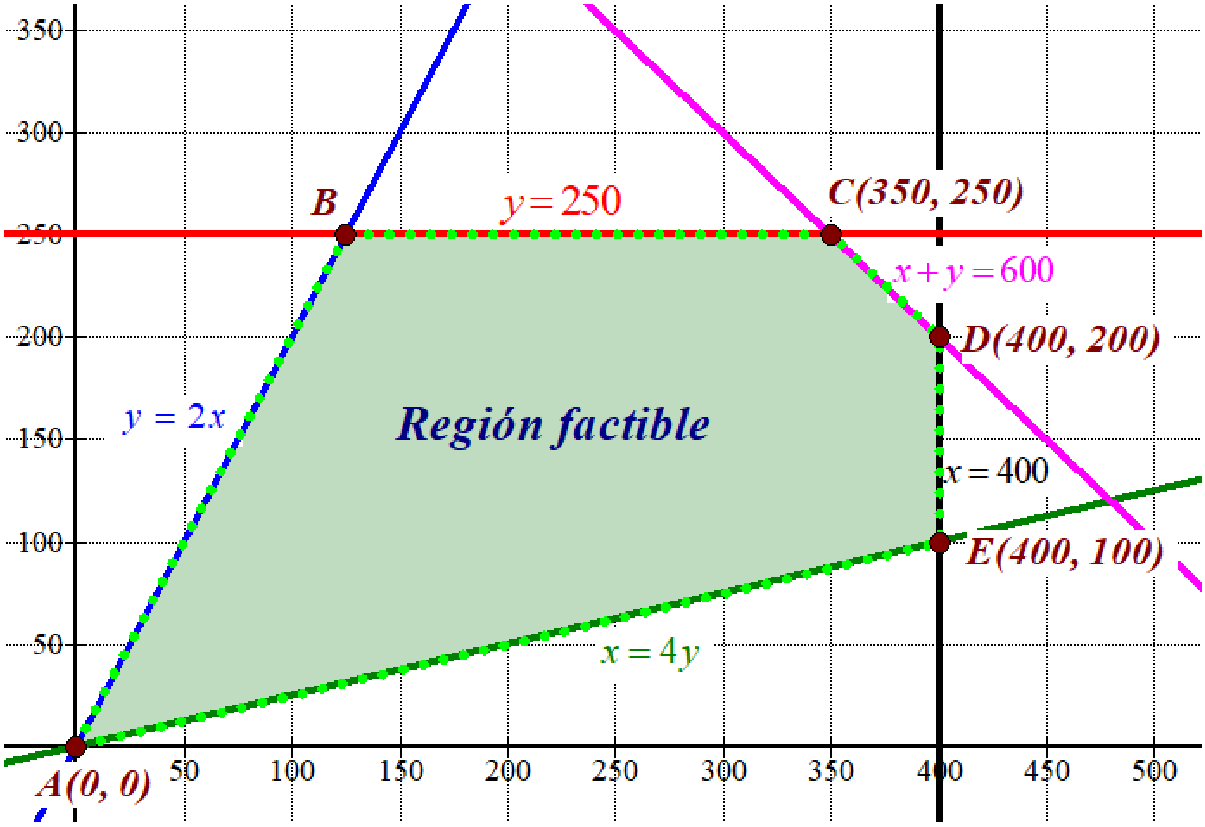
$$\left.\begin{array}{l} x \leq 400; \;\; y \leq 250 \\ x \geq 0; \;\; y \geq 0 \\ y \leq 2x \\ x \leq 4y \\ x + y \leq 600 \end{array}\right\}$$

Comprobamos que el punto P(200, 200) de dicha región cumple todas las condiciones.

$$\left.\begin{array}{l} 200 \leq 400; \;\; 200 \leq 250 \\ 200 \geq 0; \;\; 200 \geq 0 \\ 200 \leq 2 \cdot 200 \\ 200 \leq 4 \cdot 200 \\ 200 + 200 \leq 600 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones.

Dibujamos la región factible:



Determinamos las coordenadas del punto B resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente:

$$\left.\begin{array}{l} y = 250 \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow 250 = 2x \Rightarrow x = 125 \Rightarrow \boxed{B(125, 250)}$$

Los vértices son: A(0, 0), B(125, 250), C(350, 250), D(400, 200) y E(400, 100).

Valoramos la función $f(x,y) = 100x + 50y$ en cada uno de los vértices.

A(0,0) → $f(0,0) = 0$

B(125, 250)→ $f(125,250) = 12500 + 50\cdot 250 = 25000$

C(350, 250) → $f(350,250) = 35000 + 50\cdot 250 = 47500$

D(400, 200) → $f(400,200) = 40000 + 10000 = 50000 \rightarrow$ ¡*Máximo*!

E(400, 100) → $f(400,100) = 40000 + 5000 = 45000$

El beneficio máximo que se puede obtener es de 50000 € y se consigue con 400000 kilómetros con la furgoneta grande y 200000 kilómetros con la mediana.

A.3. a) Represente la gráfica de la función $f(x)=x^3-3x+1$ prestando especial atención a la determinación de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Determine los valores de x en los que f alcanza máximos o mínimos relativos.

b) Represente la gráfica de $g(x)=f(x-3)+2$, donde f es la función del apartado anterior.

a) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=x^3-3x+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2-3$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

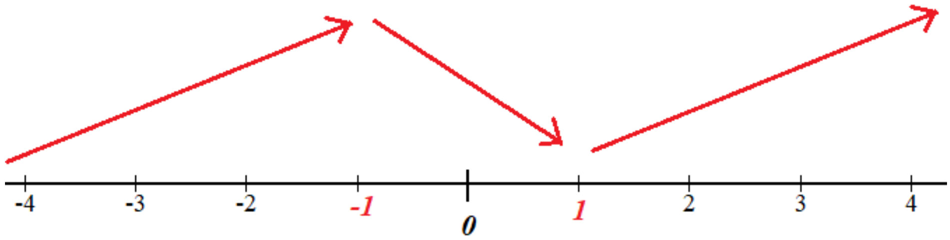
Averiguamos si son máximos o mínimos los puntos críticos obtenidos.

En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2)=3(-2)^2-3=9>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.

En el intervalo $(-1,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=3(0)^2-3=-3<0$. La función decrece en $(-1,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=3(2)^2-3=9>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(-1,1)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

Obtenemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

x	$y=x^3-3x+1$
-2	-1
-1	3 Máximo
-0.5	2.375
0	1
0.5	-0.375
1	-1 Mínimo
2	3

b) Obtenemos la expresión de la función *g(x)*.

$$f(x-3)=(x-3)^3-3(x-3)+1=(x^3-9x^2+27x-27)-3x+9+1=x^3-9x^2+24x-17$$

$$g(x)=f(x-3)+2=x^3-9x^2+24x-17+2=x^3-9x^2+24x-15$$

Hallamos los puntos críticos de la función.

$$g(x)=x^3-9x^2+24x-15 \Rightarrow g'(x)=3x^2-18x+24$$

$$g'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-18x+24=0 \Rightarrow x^2-6x+8=0 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-32}}{2}=\frac{6\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{6+2}{2}=4\\ \frac{6-2}{2}=2\end{cases}$$

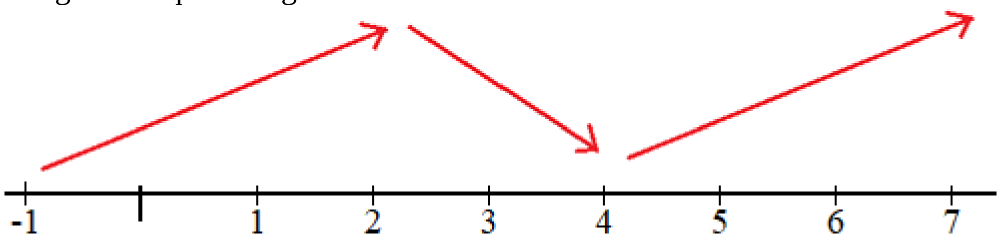
Averiguamos si son máximos o mínimos los puntos críticos obtenidos.

En el intervalo $(-\infty,2)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $g'(0)=24>0$. La función crece en $(-\infty,2)$.

En el intervalo $(2,4)$ tomamos *x = 3* y la derivada vale $g'(3)=3(3)^2-18(3)+24=-3<0$. La función decrece en $(2,4)$.

En el intervalo $(4,+\infty)$ tomamos *x = 5* y la derivada vale $g'(5)=3(5)^2-18(5)+24=9>0$. La función crece en $(4,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$ y decrece en $(2,4)$.

La función presenta un máximo relativo en *x = 2* y un mínimo relativo en *x = 4*.

Obtenemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

x	$y=x^3-9x^2+24x-15$
1	1
2	5 Máximo
3	3
4	1Mínimo
5	5

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

La gráfica de $f(x-3)$ se obtiene desplazando la gráfica de $f(x)$ 3 unidades hacia la derecha. Al sumar 2 a la función la gráfica se desplaza 2 unidades hacia arriba.

Así, la gráfica resultante es

A.4. Considere el lanzamiento de un dado equilibrado. Sea A el suceso el resultado es 1 o 2, B el suceso el resultado es 2 o 3 y C el resultado es par.
a) Verifique que $P(A|C) = P(B|C) = P(A \cap B|C)$.
b) Calcule $P(A \cup B|C)$.

a) Veamos cuando se cumplen los sucesos A, B y C.

$$A=\{1,2\};\ B=\{2,3\};\ C=\{2,4,6\}$$

Veamos cuando se cumplen los sucesos A/C, B/C y A∩B/C.

$$A/C = \text{Sacar 1 o 2 sabiendo que el resultado es par} = \{2\}$$

$$B/C = \text{Sacar 2 o 3 sabiendo que el resultado es par} = \{2\}$$

$$A\cap B = \{1,2\}\cap\{2,3\} = \{2\}$$

$$A\cap B/C = \text{Sacar 2 sabiendo que el resultado es par} = \{2\}$$

Los sucesos son iguales y por tanto su probabilidad es la misma.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Veamos cuando se cumplen los sucesos A, B, C y A∩B.

$$A=\{1,2\};\ B=\{2,3\};\ C=\{2,4,6\};\ A\cap B=\{2\};A\cap C=\{2\};\ B\cap C=\{2\}$$

$$P(A/C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}$$

$$P(B/C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}$$

$$P(A\cap B/C)=\frac{P((A\cap B)\cap C)}{P(C)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}$$

b)

$$A\cup B=\{1,2\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3\}$$

$$C=\{2,4,6\}$$

$$A\cup B\,|\,C = \text{Sacar 1, 2 o 3 sabiendo que el resultado es par} = \{2\}$$

$$P(A\cup B\,|\,C)=\frac{1}{3}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\left.\begin{array}{l} A\cup B=\{1,2,3\} \\ C=\{2,4,6\} \end{array}\right\} \Rightarrow (A\cup B)\cap C=\{1,2,3\}\cap\{2,4,6\}=\{2\}$$

$$P(A\cup B\,|\,C)=\frac{P((A\cup B)\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}$$

A.5. Para una población en la que se observa una variable aleatoria X con distribución normal, de media desconocida y desviación típica igual a 1,5, se tomó una muestra aleatoria simple para estimar la media poblacional y se obtuvo un intervalo de confianza cuyos extremos son 11,0703 y 12,9297.
a) Determine el valor de la media muestral.
b) Si el tamaño de la muestra fue 10, ¿cuál es el nivel de confianza del intervalo obtenido?

a) En una distribución $X = N(\mu, 1.5)$ la media muestral se sitúa en el centro del intervalo de confianza → $\bar{x} = \dfrac{11.0703 + 12.9297}{2} = 12$.

b) El error del intervalo de confianza viene dado por la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{12.9297 - 11.0703}{2} = 0.9297$$

Por lo que podemos despejar en la fórmula el valor del $z_{\alpha/2}$

$$Error = 0.9297 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{1.5}{\sqrt{10}} \Rightarrow 0.9297 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{1.5}{\sqrt{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.9297 \cdot \sqrt{10}}{1.5} = 1.96$$

Buscamos este valor en la tabla de la normal N(0, 1) y obtenemos 0.975

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,52
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,56
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,60
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,64
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,68
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,71
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,74
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,77
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,80
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,83
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,85
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,87
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,89
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,91
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,92
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,94
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,95
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,96
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,96
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	$\boxed{0,9750}$	0,97

De aquí obtenemos el valor del nivel de confianza $(1-\alpha)$:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95$$

El nivel de confianza del intervalo de confianza es del 95 %.

B.1. Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} x+ay&=a \\ ax+y+az&=0 \\ z&=1 \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de *a*.
b) Resuelva el sistema para *a* = *2*.

a) La matriz de coeficientes del sistema y su matriz ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ A/B=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & a \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A para establecer los distintos casos posibles.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1-a^2$$

$$|A|=0 \Rightarrow 1-a^2=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\sqrt{1}=\pm 1$$

CASO 1. Si $a \neq 1\, y\, a \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado**.

CASO 2. Si $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

El sistema queda $\left.\begin{aligned} x+y&=1 \\ x+y+z&=0 \\ z&=1 \end{aligned}\right\}$. Intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{aligned} x+y&=1 \\ x+y+z&=0 \\ z&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=1 \\ x+y+1&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=1 \\ x+y&=-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema no tiene solución, es **incompatible**.

CASO 3. Si $a=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

El sistema queda $\left.\begin{aligned} x-y&=1 \\ -x+y-z&=0 \\ z&=1 \end{aligned}\right\}$. Intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{aligned} x-y&=-1 \\ -x+y-z&=0 \\ \boxed{z=1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x-y&=-1 \\ -x+y-1&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x-y&=-1 \\ -x+y&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x=-1+y}$$

El sistema tiene infinitas soluciones, es **compatible indeterminado**.

Resumiendo: Si $a \neq 1\, y\, a \neq -1$ el sistema es **compatible determinado.** Si $a=1$ el sistema es **incompatible** y si $a=-1$ el sistema es **compatible indeterminado**

b) Para $a = 2$ el sistema es compatible determinado y tiene una única solución. Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=2 \\ 2x+y+2z=0 \\ \boxed{z=1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=2 \\ 2x+y+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=2-2y \\ 2x+y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2-2y)+y=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4-4y+y=-2 \Rightarrow -3y=-6 \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow \boxed{x=2-4=-2}$$

La solución es $x = -2$; $y = 2$; $z = 1$.

B.2. a) Determine el área de la región acotada del plano limitada inferiormente por el eje de las x y superiormente por la parábola $y = 9x - x^2$.

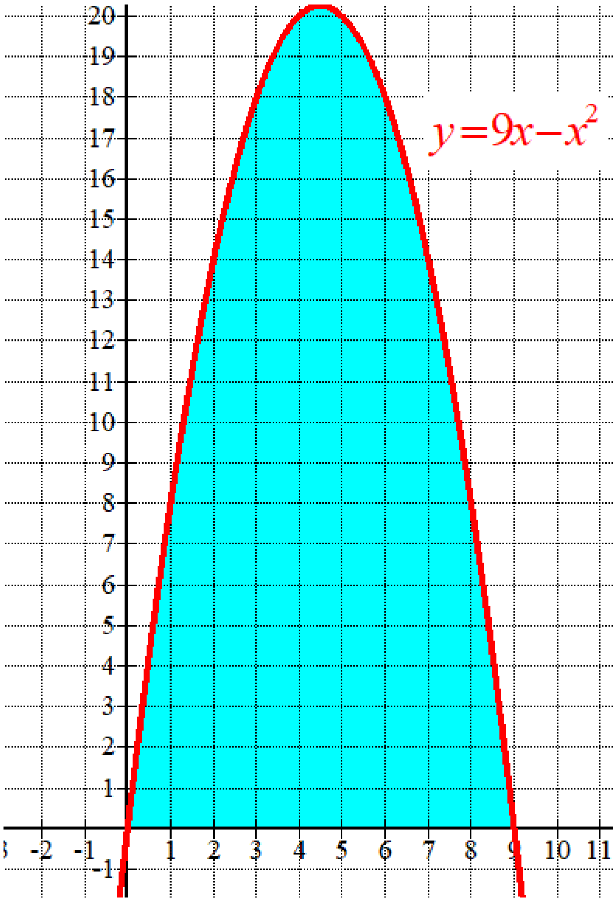
b) Determine el área de la región acotada del plano limitada inferiormente por la parábola $y = 9x - x^2$ y superiormente por las rectas tangentes a esa parábola en los puntos de corte con el eje de las x.

a) Hallamos los puntos de corte de la parábola con el eje de las x.

$$\left.\begin{array}{l} y = 9x - x^2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 9x - x^2 \Rightarrow x(9-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 9 = 0 \to x = 9 \end{cases}$$

El valor del área es la integral definida de la parábola entre 0 y 9.

$$Área = \int_0^9 9x - x^2 dx = \left[\frac{9x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^9 = \left[\frac{9\cdot 9^2}{2} - \frac{9^3}{3}\right] - \left[\frac{9\cdot 0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right] = \boxed{121.5\ u^2}$$



b) Los puntos de corte con los ejes son $x = 0$ y $x = 9$.

Hallamos la ecuación de las rectas tangentes en dichos puntos.

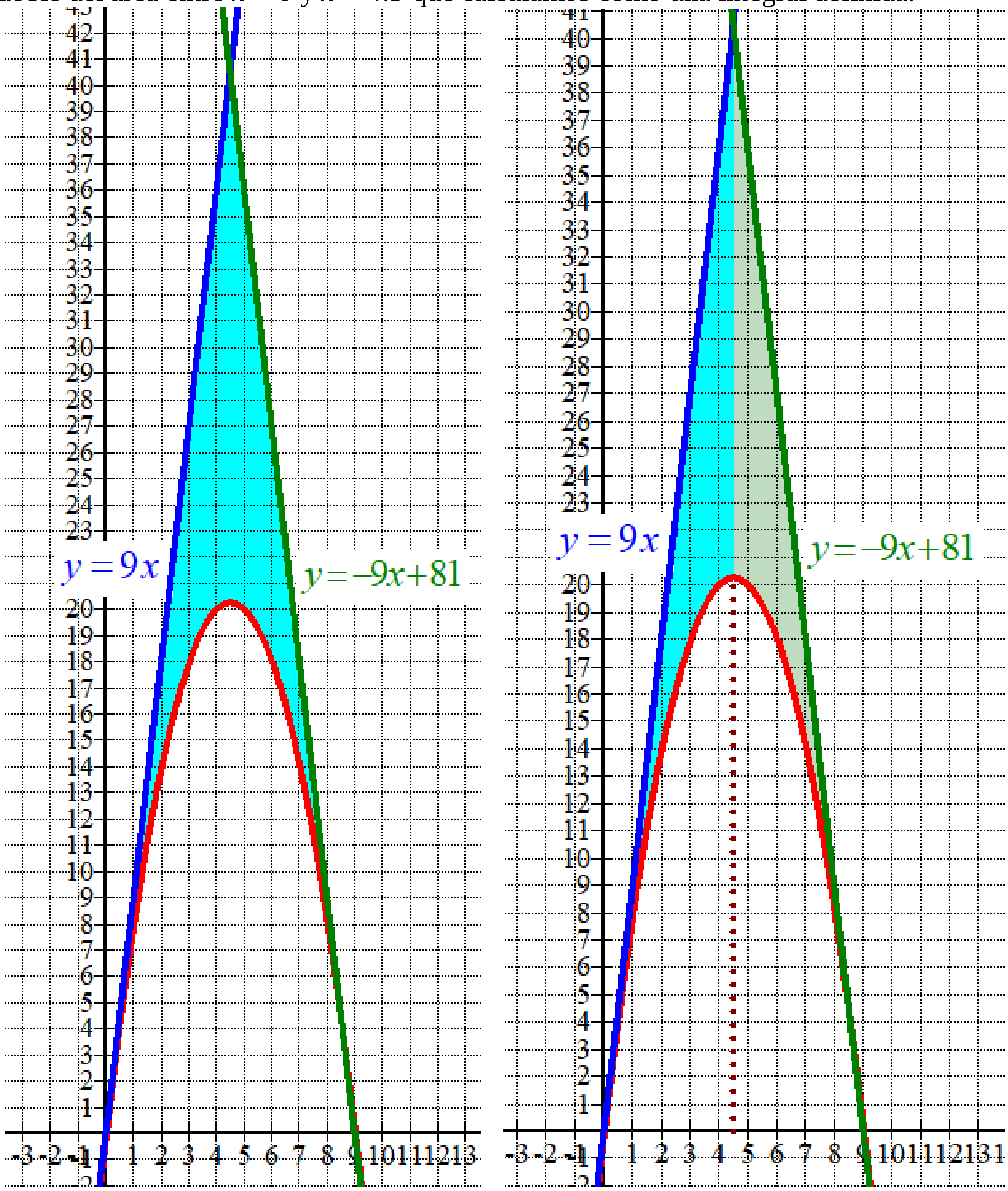
$$y = 9x - x^2 \Rightarrow y' = 9 - 2x$$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y' = 9 \end{cases} \Rightarrow y - 0 = 9(x - 0) \Rightarrow y = 9x$$

$$x = 9 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y' = 9 - 18 = -9 \end{cases} \Rightarrow y - 0 = -9(x - 9) \Rightarrow y = -9x + 81$$

El área que nos piden hallar es la del dibujo.

Por cuestiones de simetría el vértice de la parábola está en $x = \frac{0+9}{2} = 4.5$ y el área pedida es el doble del área entre $x = 0$ y $x = 4.5$ que calculamos como una integral definida.



$$Área = 2\int_0^{4.5} 9x - \left(9x - x^2\right) dx = 2\int_0^{4.5} x^2 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{4.5} = 2\left(\frac{4.5^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \boxed{60.75\ u^2}$$

B.3. Una pastelería hace diariamente una cantidad fija de dulces cuya masa requiere de un tiempo de reposo, el cual tiene que ser de una a dos horas. La pastelería usa un ingrediente secreto. La cantidad necesaria de ingrediente secreto, medida en gramos, varía en función del tiempo de reposo de la masa según la siguiente función:

$$Q(t)=\frac{1}{2}t^4-3t^2+5, \qquad 1\le t\le 2$$

siendo t el tiempo de reposo medido en horas.

a) La producción diaria de dulces tiene un coste fijo de 150 euros más el coste por el uso del ingrediente secreto, el cual cuesta 100 euros/gramo. Obtenga la función que representa el coste de producción diaria de estos dulces y encuentre el tiempo de reposo de la masa que minimiza dicho coste. Indique el valor del coste mínimo.

b) Obtenga el tiempo de reposo que maximiza el coste de producción e indique la cantidad de ingrediente secreto que se necesitaría en este caso.

a) Obtenemos la función del coste *C(t)* que depende de la cantidad del ingrediente secreto.

$$C(t)=150+Q(t)\cdot 100=150+100\left(\frac{1}{2}t^4-3t^2+5\right)=150+50t^4-300t^2+500$$

$$C(t)=50t^4-300t^2+650, \qquad 1\le t\le 2$$

Derivamos la función y la igualamos a cero, en busca de sus puntos críticos.

$$C(t)=50t^4-300t^2+650 \Rightarrow C´(t)=200t^3-600t$$

$$C´(t)=0 \Rightarrow 200t^3-600t=0 \Rightarrow 200t\left(t^2-3\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0\notin[1,2] \\ t^2-3=0 \Rightarrow t=\sqrt{3}\in[1,2] \end{cases}$$

Hallamos la segunda derivada y comprobamos si en $t=\sqrt{3}$ hay un máximo o mínimo.

$$C´(t)=200t^3-600t \Rightarrow C´´(t)=600t^2-600$$

$$C´´\left(\sqrt{3}\right)=600\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2-600=1200>0$$

La función coste presenta un mínimo en $t=\sqrt{3}$.

El valor de dicho coste mínimo es:

$$C\left(\sqrt{3}\right)=50\left(\sqrt{3}\right)^4-300\left(\sqrt{3}\right)^2+650=450-900+650=\boxed{200\text{ €}}$$

El coste mínimo es de 200 € y se consigue con $\sqrt{3}\simeq 1.73$ horas de reposo.

b) Como la función presenta un mínimo en $t=\sqrt{3}$ la función decrece en $\left[1,\sqrt{3}\right)$ y crece en $\left(\sqrt{3},2\right]$. El máximo debe situarse en los extremos del intervalo $[1,2]$.

Valoramos la función en los extremos del intervalo $[1,2]$ y comprobamos donde está el coste máximo.

$$C(1)=50(1)^4-300(1)^2+650=50-300+650=400\text{ €}$$

$$C(2)=50(2)^4-300(2)^2+650=800-1200+650=250\text{ €}$$

El coste máximo es de 400 € y se obtiene con 1 hora de reposo.

La cantidad de ingrediente para 1 hora de reposo es $Q(1)=\frac{1}{2}\cdot 1^4-3\cdot 1^2+5=2.5$ gramos.

B.4. Se tienen 7 sobres cerrados. Uno de ellos contiene un premio y el resto son sobres vacíos. Se lanza un dado y luego se descartan tantos sobres vacíos como el dado indique. Posteriormente, se escoge al azar uno de los sobres que restan.

a) ¿Cuál es la probabilidad de escoger el sobre premiado?

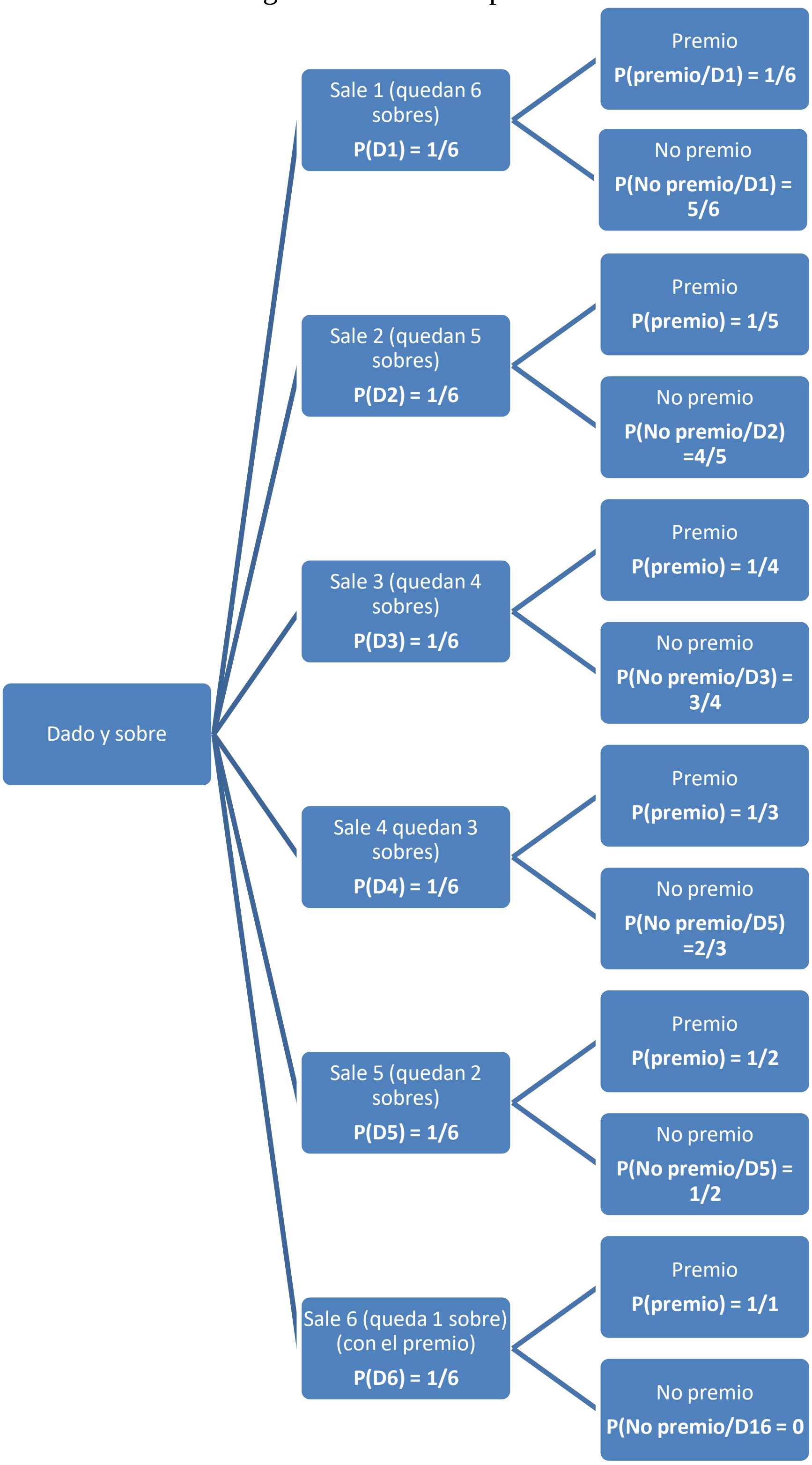
b) Si salió el premio, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del dado haya sido el 1?

Este es un experimento compuesto por un lanzamiento de un dado y la elección de un sobre.

Realizamos un diagrama de árbol para ayudar a calcular las probabilidades pedidas.

Llamamos D1, D2, D3, D4, D5 o D6 a sacar un 1, 2, 3, 4, 5, o 6 con el dado.

Llamamos G al suceso "Escoger el sobre con el premio"



a) La probabilidad de sacar el sobre con el premio es la suma de las probabilidades de cada rama que nos lleva al premio.

$$P(G)=P(D1)P(G/D1)+P(D2)P(G/D2)+P(D3)P(G/D3)+$$
$$+P(D4)P(G/D4)+P(D5)P(G/D5)+P(D6)P(G/D6)=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1}=\boxed{\frac{49}{120}\simeq 0.408}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(D1/G)=\frac{P(D1\cap G)}{P(G)}=\frac{P(D1)P(G/D1)}{49/120}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{49}{120}}=\boxed{\frac{10}{147}\simeq 0.068}$$

B.5. Para estimar la proporción de estudiantes de una determinada facultad que utilizan la cafetería se toma una muestra de estudiantes al azar.

a) Sabiendo que la proporción poblacional es P = 0,55, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de estudiantes para garantizar que, con una confianza del 98,02%, el margen de error en la estimación no supera el 10%.

b) Si la muestra aleatoria fue de 100 estudiantes, de los cuales 70 utilizaban la cafetería, determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de estudiantes que utilizan la cafetería.

a) El error debe ser menor del 10% lo que significa 0.1.

La proporción poblacional es $p = 0.55$.

Para un nivel de confianza del 98.02 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0{,}9802 \rightarrow \alpha = 0{,}0198 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}0099 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}9901 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.33$$

z	,00	,01	,02	,03	,0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,

Sustituimos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.1 = 2.33\sqrt{\frac{0.55\cdot 0.45}{n}} \Rightarrow \frac{0.1}{2.33} = \sqrt{\frac{0.2475}{n}} \Rightarrow$$

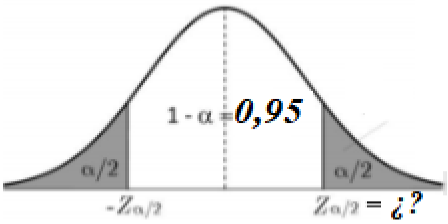
$$\Rightarrow \left(\frac{0.1}{2.33}\right)^2 = \frac{0.2475}{n} \Rightarrow n = \frac{0.2475}{\left(\frac{0.1}{2.33}\right)^2} = 134.365$$

El tamaño mínimo para que el error de la muestra sea inferior al 10 % es de 135 estudiantes.

b) Para un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

La proporción muestral es de $p = \frac{70}{100} = 0.7$



Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{100}} \simeq 0.0898$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(p - Error, p + Error\right) = (0.7 - 0.0898, 0.7 + 0.0898) = \boxed{(0.6102, 0.7898)}$$