PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Este examen consta de 8 ejercicios.

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Calcula a sabiendo que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}-\frac{ax-1}{x}\right)=\frac{7}{2}$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x)=\frac{-x^3+2x-3}{x^2-x}$ para $x\neq 0,\ x\neq 1$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto *(2, 3ln2)*, donde *ln* denota la función logaritmo neperiano.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & b\\ c & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. Determina a, b y c, sabiendo que $AB = C$ y la matriz A tiene rango 2.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera el tetraedro de vértices A(0, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 3) y D(1, 0, 3).

a) Calcula el volumen de dicho tetraedro. **(1 punto)**

b) Calcula la medida de la altura trazada desde el vértice A de dicho tetraedro. **(1.5 puntos)**

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS II

<u>EJERCICIO 5</u> (2.5 puntos)
Una familia desea acotar una zona rectangular en el jardín de su casa para dedicarla al cultivo ecológico. Para ello dispone de 96 metros de valla, pero necesita dejar una abertura de 4 metros en uno de los laterales para instalar una puerta. Determina las dimensiones de la zona rectangular de área máxima que puede acotarse de esta manera y el valor de dicha área.

<u>EJERCICIO 6</u> (2.5 puntos)
Calcula $\int \ln\left(x^2+2x+2\right)dx$ donde *ln* denota la función logaritmo neperiano.
(Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = x + 1$).

<u>EJERCICIO 7</u> (2.5 puntos)
Siendo λ un número real, considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} x+\lambda y=2 \\ 2x+4y=1 \\ \lambda x+y=2\lambda \end{cases}$$

Discútelo según los valores de λ y resuélvelo cuando sea posible.

<u>EJERCICIO 8</u> (2.5 puntos)
Considera los puntos $A(-1,3,2)$, $B(2,-1,-1)$ y $C(a-2,7,b)$.
a) Determina a y b para que los puntos A, B y C estén alineados. **(1.25 puntos)**
b) En el caso $a = b = 1$, halla la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B y C. **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Calcula a sabiendo que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}-\frac{ax-1}{x}\right)=\frac{7}{2}$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

Calculamos primero el valor del límite y luego lo igualamos a 7/2.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}-\frac{ax-1}{x}\right)=\frac{1}{\ln(1-0)}-\frac{0-1}{0}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=Indeterminación=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-(ax-1)\ln(1-x)}{x\cdot\ln(1-x)}\right)=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\left[a\cdot\ln(1-x)+(ax-1)\frac{-1}{1-x}\right]}{1\cdot\ln(1-x)+x\cdot\frac{-1}{1-x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-a\cdot\ln(1-x)+\frac{ax-1}{1-x}}{\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\cancel{1}-x-a(1-x)\ln(1-x)+ax-\cancel{1}}{1-x}}{\frac{(1-x)\ln(1-x)-x}{1-x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x-a(1-x)\ln(1-x)+ax}{(1-x)\ln(1-x)-x}\right)=\frac{0}{0}=$$

$$=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1-a\left[(-1)\ln(1-x)+(1-x)\frac{-1}{1-x}\right]+a}{(-1)\ln(1-x)+(1-x)\frac{-1}{1-x}-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1-a\left[-\ln(1-x)-1\right]+a}{-\ln(1-x)-1-1}\right)=\frac{-1+2a}{-2}$$

Lo aplicamos a la igualdad proporcionada.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}-\frac{ax-1}{x}\right)=\frac{7}{2}\Rightarrow\frac{-1+2a}{-2}=\frac{7}{2}\Rightarrow -2+4a=-14\Rightarrow 4a=-12\Rightarrow\boxed{a=-3}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}-\frac{ax-1}{x}\right)=\frac{7}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}-\frac{a\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{1}{x}\right)=\frac{7}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}-a+\frac{1}{x}\right)=\frac{7}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}+\frac{1}{x}\right)-a=\frac{7}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}+\frac{1}{x}\right)=\frac{7}{2}+a$$

Hallamos el limite y seguimos resolviendo la nueva igualdad.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1-x)}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+\ln(1-x)}{x\cdot\ln(1-x)}\right)=\frac{0}{0}=Indeterminación\left(L\acute{}Hôpital\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\frac{-1}{1-x}}{1\cdot\ln(1-x)+x\cdot\frac{-1}{1-x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1-x-1}{1-x}}{\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{-x}{1-x}}{\frac{(1-x)\ln(1-x)-x}{1-x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)-x}\right)=\frac{0}{0}=Indeterminación\left(L\acute{}Hôpital\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{(-1)\ln(1-x)+(1-x)\left(\frac{-1}{1-x}\right)-1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{-\ln(1-x)-1-1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{-\ln(1-x)-2}\right)=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

Sustituyendo en la igualdad tenemos:

$$\frac{1}{2}=\frac{7}{2}+a\Rightarrow\boxed{a=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=-3}$$

<u>EJERCICIO 2</u> (2.5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{-x^3+2x-3}{x^2-x}$ para $x\neq 0,\ x\neq 1$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto *(2, 3ln2)*, donde *ln* denota la función logaritmo neperiano.

Hallamos la integral indefinida de *f(x)*.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{-x^3+2x-3}{x^2-x}dx=\ldots$$

$$\begin{array}{cccc|l} -x^3 & & +2x & -3 & x^2-x \\ x^3 & -x^2 & & & -x-1 \\ \hline & -x^2 & +2x & -3 & \\ & x^2 & -x & & \\ \hline & & x & -3 & \end{array}$$

$$\ldots=\int -x-1+\frac{x-3}{x^2-x}dx=-\int xdx-\int dx+\int\frac{x-3}{x^2-x}dx=-\frac{x^2}{2}-x+\int\frac{x-3}{x^2-x}dx=\ldots$$

$$\frac{x-3}{x^2-x}=\frac{x-3}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}\Rightarrow x-3=A(x-1)+Bx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=1\to 1-3=A(0)+B\to B=-2 \\ x=0\to 0-3=A(0-1)+0\to A=3\end{cases}\Rightarrow\frac{x-3}{x^2-x}=\frac{3}{x}-\frac{2}{x-1}$$

$$\ldots=-\frac{x^2}{2}-x+\int\frac{3}{x}-\frac{2}{x-1}dx=-\frac{x^2}{2}-x+\int\frac{3}{x}dx-\int\frac{2}{x-1}dx=\boxed{-\frac{x^2}{2}-x+3\ln|x|-2\ln|x-1|+C}$$

De todas las primitivas averiguamos el valor de C para que su gráfica pase por el punto *(2, 3ln2)*.

$$\left.\begin{array}{r} F(x)=-\dfrac{x^2}{2}-x+3\ln|x|-2\ln|x-1|+C \\ F(2)=3\ln 2\end{array}\right\}\Rightarrow 3\ln 2=-\frac{2^2}{2}-2+3\ln 2-2\ln(2-1)+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{3\ln 2}=-4+\cancel{3\ln 2}+C\Rightarrow\boxed{C=4}$$

La primitiva buscada es $F(x)=-\dfrac{x^2}{2}-x+3\ln|x|-2\ln|x-1|+4$

EJERCICIO 3 **(2.5 puntos)**

Considera $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & b\\ c & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. Determina *a*, *b* y *c*, sabiendo que *AB* = *C* y la matriz *A* tiene rango 2.

Si *AB* = *C* entonces:

$$AB=C\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & b\\ c & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1+1+1\\ 1+a+b\\ c+1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3=3\\ 1+a+b=2\rightarrow \boxed{a=1-b}\\ c+5=1\rightarrow\boxed{c=-4}\end{cases}$$

Si la matriz *A* tiene rango 2 entonces su determinante debe anularse, pues en caso contrario tendría rango 3. Además, sabemos que $c=-4$ y $a=1-b$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1-b & b\\ -4 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1-b & b\\ -4 & 1 & 4\end{vmatrix}=4-4b-4b+1+\cancel{4}-4b-\cancel{4}-b=-13b+5$$

$$|A|=0\Rightarrow -13b+5=0\Rightarrow 13b=5\Rightarrow\boxed{b=\frac{5}{13}}\Rightarrow\boxed{a=1-\frac{5}{13}=\frac{8}{13}}$$

Los valores buscados son $a=\frac{8}{13}$, $b=\frac{5}{13}$ y $c=-4$

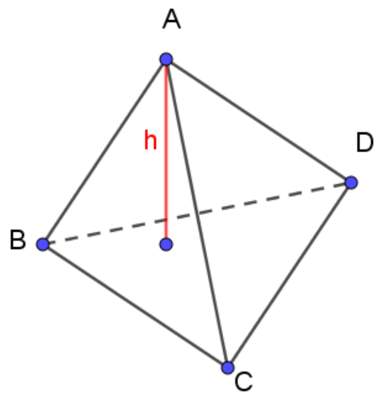
EJERCICIO 4 **(2.5 puntos)**
Considera el tetraedro de vértices A(0, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 3) y D(1, 0, 3).
a) Calcula el volumen de dicho tetraedro. **(1 punto)**
b) Calcula la medida de la altura trazada desde el vértice A de dicho tetraedro. **(1.5 puntos)**

a) El volumen de un tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los tres vectores que parten de un vértice cualquiera.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,0)-(0,0,0)=(1,1,0)\\ \overrightarrow{AC}=(0,1,3)-(0,0,0)=(0,1,3)\\ \overrightarrow{AD}=(1,0,3)-(0,0,0)=(1,0,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&3\\1&0&3\end{vmatrix}=3+3=6$$

$$\text{Volumen tetraedro }=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}=\frac{6}{6}=1u^3$$

b) Conocemos el valor del volumen del tetraedro y podemos calcular el valor del área de la base (el triángulo BCD). El volumen del tetraedro es la tercera parte del área de la base por la altura.



Calculamos el área del triángulo BCD.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=(0,1,3)-(1,1,0)=(-1,0,3)\\ \overrightarrow{BD}=(1,0,3)-(1,1,0)=(0,-1,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}i&j&k\\-1&0&3\\0&-1&3\end{vmatrix}=k+3j+3i=(3,3,1)$$

$$\acute{A}rea\ BCD=\frac{\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|}{2}=\frac{\sqrt{3^2+3^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{19}}{2}$$

Lo aplicamos al cálculo de la altura “h”.

$$\left.\begin{array}{r}Volumen\ ABCD=1=\dfrac{\acute{A}rea\ BCD\cdot h}{3}\\ \acute{A}rea\ BCD=\dfrac{\sqrt{19}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow 1=\frac{\frac{\sqrt{19}}{2}\cdot h}{3}\Rightarrow 3=\frac{\sqrt{19}}{2}\cdot h\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6=\sqrt{19}\cdot h\Rightarrow\boxed{h=\frac{6}{\sqrt{19}}=\frac{6\sqrt{19}}{19}u}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO b)

La altura “h” es la distancia del punto A al plano π definido por los puntos B, C y D.

Hallamos la ecuación del plano π que contiene los puntos B, C, y D.

$$\left.\begin{array}{l} B(1,1,0)\in\pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{BC}=(0,1,3)-(1,1,0)=(-1,0,3) \\ \vec{v}=\overrightarrow{BD}=(1,0,3)-(1,1,0)=(0,-1,3) \end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

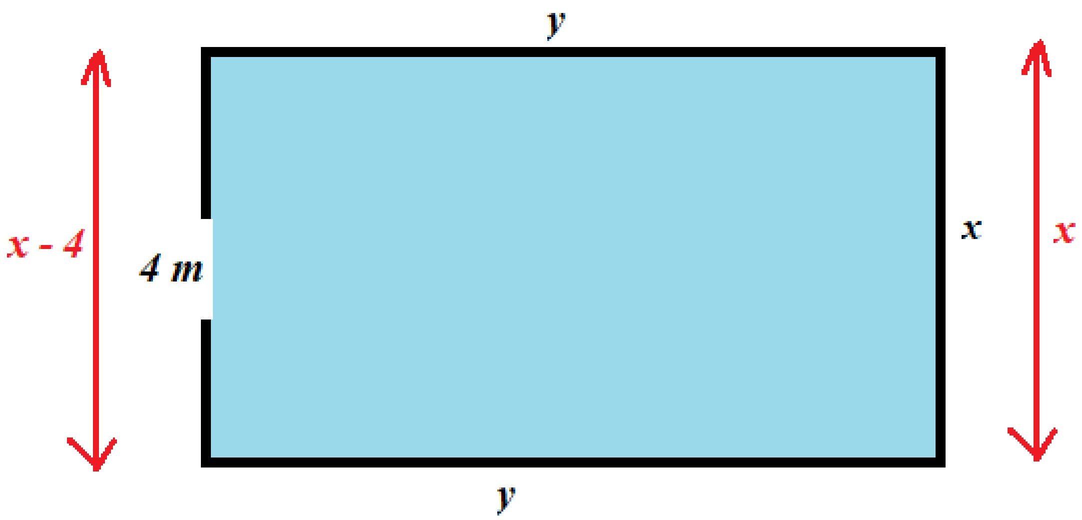
$$\Rightarrow z+3y-3+3x-3=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv 3x+3y+z-6=0}$$

Lo aplicamos al cálculo de "h".

$$\left.\begin{array}{l} A(0,0,0) \\ \pi\equiv 3x+3y+z-6=0 \end{array}\right\}\Rightarrow h=d(A,\pi)=\frac{|0+0+0-6|}{\sqrt{3^2+3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{19}}=\boxed{\frac{6\sqrt{19}}{19}u}$$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)
Una familia desea acotar una zona rectangular en el jardín de su casa para dedicarla al cultivo ecológico. Para ello dispone de 96 metros de valla, pero necesita dejar una abertura de 4 metros en uno de los laterales para instalar una puerta. Determina las dimensiones de la zona rectangular de área máxima que puede acotarse de esta manera y el valor de dicha área.

La situación planteada en el problema es la del dibujo.



Siendo los metros de valla necesarios para delimitar el recinto $y+y+x+(x-4)$, como disponemos de 96 metros de valla debe cumplirse:

$$y+y+x+(x-4)=96 \Rightarrow 2y+2x=100 \Rightarrow y+x=50 \Rightarrow y=50-x$$

Deseamos maximizar el área del recinto que depende de las dimensiones del mismo.

$$A(x,y)=xy$$

Le imponemos la condición obtenida previamente y nos queda:

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y)=xy \\ y=50-x \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)=x(50-x)=50x-x^2$$

Derivamos esta función y la igualamos a cero en busca del máximo.

$$\left.\begin{array}{l} A'(x)=50-2x \\ A'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 50-2x=0 \Rightarrow 2x=50 \Rightarrow \boxed{x=25}$$

Comprobamos que para $x = 25$ el área es máxima.

$$A''(x)=-2 \Rightarrow A''(25)=-2<0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función área presenta un máximo para $x = 25$.

Las dimensiones del recinto con área máxima es $x = 25$, $y = 50 - 25 = 25$. Es un cuadrado de lado 25 metros. El área máxima que se consigue es de $A(25,25)=25^2=625\,m^2$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)
Calcula $\int \ln\left(x^2+2x+2\right)dx$ donde *ln* denota la función logaritmo neperiano.
(Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = x + 1$).

$$\int \ln\left(x^2+2x+2\right)dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ t=x+1\to dt=dx\\ t^2=\left(x+1\right)^2=x^2+2x+1\\ x^2+2x+2=t^2+1\end{array}\right\} = \int \ln\left(t^2+1\right)dt =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln\left(t^2+1\right)\to du=\dfrac{2t}{t^2+1}dt\\ dv=dt\Rightarrow v=\int dt=t\end{array}\right\} = t\cdot\ln\left(t^2+1\right)-\int t\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt =$$

$$= t\cdot\ln\left(t^2+1\right)-2\int\frac{t^2}{t^2+1}dt = t\cdot\ln\left(t^2+1\right)-2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$

$$= t\cdot\ln\left(t^2+1\right)-2\left[\int\frac{t^2+1}{t^2+1}dt-\int\frac{1}{t^2+1}dt\right] = t\cdot\ln\left(t^2+1\right)-2\left[t-arctg\left(t\right)\right] =$$

$$= \left(x+1\right)\ln\left(x^2+2x+2\right)-2\left(x+1\right)+2arctg\left(x+1\right) = \boxed{\left(x+1\right)\ln\left(x^2+2x+2\right)-2x+2arctg\left(x+1\right)+C}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\int \ln\left(x^2+2x+2\right)dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln\left(x^2+2x+2\right)\to du=\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}dx\\ dv=dx\Rightarrow v=\int dx=x\end{array}\right\} =$$

$$= x\cdot\ln\left(x^2+2x+2\right)-\int x\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx = x\cdot\ln\left(x^2+2x+2\right)-\int\frac{2x^2+2x}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= x\cdot\ln\left(x^2+2x+2\right)-2\int\frac{x^2+x}{x^2+2x+2}dx = x\cdot\ln\left(x^2+2x+2\right)-2\int\frac{x^2+2x+2-x-2}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= x\cdot\ln\left(x^2+2x+2\right)-2\left[\int\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+2}dx+\int\frac{-x-2}{x^2+2x+2}dx\right] =$$

$$= x\cdot\ln\left(x^2+2x+2\right)-2\left[\int dx-\int\frac{x+2}{x^2+2x+2}dx\right] =$$

$$= x\cdot\ln\left(x^2+2x+2\right)-2\left[x-\int\frac{x+2}{x^2+2x+2}dx\right] = x\cdot\ln\left(x^2+2x+2\right)-2x+2\int\frac{x+2}{x^2+2x+2}dx = \ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2+2}{x^2+2x+2}\,dx=\\ \displaystyle=\frac{1}{2}\left[\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx+\int \frac{2}{x^2+2x+2}\,dx\right]=\frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+2x+2\right|+2\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx\right]=\\ \displaystyle=\frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+2x+2\right|+2arctg\,(x+1)\right]=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|+arctg\,(x+1)\end{array}}$$

$$...=x\cdot\ln\left(x^2+2x+2\right)-2x+2\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|+arctg\,(x+1)\right)=$$

$$=\boxed{x\cdot\ln\left(x^2+2x+2\right)-2x+\ln\left|x^2+2x+2\right|+2arctg\,(x+1)+C}$$

EJERCICIO 7 **(2.5 puntos)**

Siendo λ un número real, considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} x+\lambda y=2 \\ 2x+4y=1 \\ \lambda x+y=2\lambda \end{cases}$$

Discútelo según los valores de λ y resuélvelo cuando sea posible.

El sistema tiene asociado la matriz de coeficientes y matriz ampliada siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & 4 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix};\ A/B=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ \lambda & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

La matriz A/B tiene rango 3 o menor, la matriz A tiene rango 2 o menor. Vemos cuando el rango de A/B es 3.

$$|A/B|=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ \lambda & 1 & 2\lambda \end{vmatrix}=8\lambda+\lambda^2+4-8\lambda-4\lambda^2-1=-3\lambda^2+3$$

$$|A/B|=0 \Rightarrow -3\lambda^2+3=0 \Rightarrow -\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda^2=1 \Rightarrow \boxed{\lambda=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Tenemos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $\lambda \neq -1 \ y \ \lambda \neq 1$

En este caso el determinante de A/B es no nulo y su rango es 3 que es diferente del rango de A que como máximo puede ser 2. El sistema es **incompatible**.

CASO 2. $\lambda=-1$

En este caso el sistema queda $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+4y=1 \\ -x+y=-2 \end{cases}$. La ecuación 1ª y 3ª son la misma, por lo que nos queda el sistema $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+4y=1 \end{cases}$. Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+4y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+y \\ 2x+4y=1 \end{cases} \Rightarrow 2(2+y)+4y=1 \Rightarrow 4+2y+4y=1 \Rightarrow 6y=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2}} \Rightarrow \boxed{x=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}}$$

El sistema tiene una única solución (Sistema **compatible determinado**).

CASO 3. $\lambda=1$

En este caso el sistema queda $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+4y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$. La ecuación 1ª y 3ª son la misma, por lo que nos queda el sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+4y=1 \end{cases}$. Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+4y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-x \\ 2x+4y=1 \end{cases} \Rightarrow 2x+4(2-x)=1 \Rightarrow 2x+8-4x=1 \Rightarrow -2x=-7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{7}{2}} \Rightarrow \boxed{y=2-\frac{7}{2}=\frac{-3}{2}}$$

El sistema tiene una única solución (Sistema **compatible determinado**).

Resumiendo:

Si $\lambda=-1$ el sistema es compatible determinado y su solución es $x=\frac{3}{2};\ y=\frac{-1}{2}$.

Si $\lambda=1$ el sistema es compatible determinado y su solución es $x=\frac{7}{2};\ y=\frac{-3}{2}$.

Si $\lambda \neq -1\ y\ \lambda \neq 1$ el sistema es incompatible.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(-1,3,2)$, $B(2,-1,-1)$ y $C(a-2,7,b)$.

a) Determina a y b para que los puntos A, B y C estén alineados. **(1.25 puntos)**

b) En el caso $a = b = 1$, halla la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B y C. **(1.25 puntos)**

a) Para que los puntos A, B y C estén alineados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deben tener coordenadas proporcionales (indican la misma dirección y por tanto los puntos están alineados).

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(a-2,7,b)-(-1,3,2)=(a-1,4,b-2)\\ \overrightarrow{AB}=(2,-1,-1)-(-1,3,2)=(3,-4,-3)\\ \overrightarrow{AB}\,||\,\overrightarrow{AC}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a-1}{3}=\frac{4}{-4}=\frac{b-2}{-3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a-1}{3}=\dfrac{4}{-4}\rightarrow\dfrac{a-1}{3}=-1\rightarrow a-1=-3\rightarrow\boxed{a=-2}\\ \dfrac{4}{-4}=\dfrac{b-2}{-3}\rightarrow -1=\dfrac{b-2}{-3}\rightarrow b-2=3\rightarrow\boxed{b=5}\end{cases}$$

Los valores buscados son $a=-2;\ b=5$.

b) Si $a = b = 1$ los puntos no están alineados y definen un plano.

La recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B y C tiene como vector director el vector normal del plano π definido por los tres puntos.

Hallamos la ecuación del plano π.

$$\left.\begin{array}{l}C(a-2,7,b)=(-1,7,1)\\ A(-1,3,2)\in\pi\\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(2,-1,-1)-(-1,3,2)=(3,-4,-3)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(-1,7,1)-(-1,3,2)=(0,4,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x+1 & y-3 & z-2\\ 3 & -4 & -3\\ 0 & 4 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+4+12z-24+3y-9+12x+12=0\Rightarrow\boxed{\pi\equiv 16x+3y+12z-17=0}$$

El vector normal del plano π es $\vec{n}=(16,3,12)$.

Hallamos la ecuación de la recta pedida.

$$\left.\begin{array}{l}O(0,0,0)\in r\\ \vec{v}_r=\vec{n}=(16,3,12)\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{r\equiv\frac{x}{16}=\frac{y}{3}=\frac{z}{12}}$$