PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Este examen consta de 8 ejercicios.

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)-(a+1)x}{x^2}$ es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Determina la función $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto *(0, 1)*, $f'(0)=0$ y $f''(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$

a) Discútelo según los valores de a. **(1.75 puntos)**

b) Resuelve, si es posible, el sistema para $a=1$ y $a=-2$. **(0.75 puntos)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera el punto *P(1, 0, –1)* y la recta $r\equiv\begin{cases} x-y+2z=5 \\ x-z=1 \end{cases}$.

a) Determina el punto simétrico de P respecto de la recta r. **(1.5 puntos)**

b) Calcula el punto de la recta r que dista $\sqrt{6}$ unidades de P. **(1 punto)**

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS II

<u>EJERCICIO 5</u> (2.5 puntos)

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}$ para $x\neq 2$.

a) Estudia la derivabilidad de *f*. **(1.25 puntos)**
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1.25 puntos)**

<u>EJERCICIO 6</u> (2.5 puntos)

Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=-4x+2$ y $g(x)=-x^2+2x+c$.

a) Halla el valor de *c* sabiendo que sus gráficas se cortan en el punto en el que *g* alcanza su máximo. **(1 punto)**
b) Para $c=-3$, calcula el área de la región limitada por ambas gráficas. **(1.5 puntos)**

<u>EJERCICIO 7</u> (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{37} y A^{41}. **(1.5 puntos)**
b) Halla el determinante de la matriz $3A^{52}\left(A^t\right)^4$, donde A^t es la matriz traspuesta de *A*. **(1 punto)**

<u>EJERCICIO 8</u> (2.5 puntos)

Considera los vectores $\vec{u}=(2,1,0)$, $\vec{v}=(1,0,-1)$ y $\vec{w}=(a,b,1)$.

a) Halla *a* y *b* sabiendo que los tres vectores son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$. **(1.5 puntos)**
b) Para $a=1$, calcula el valor o valores de *b* para que el volumen del paralelepípedo formado por dichos vectores sea de 6 unidades cúbicas. **(1 punto)**

SOLUCIONES

<u>EJERCICIO 1</u> (2.5 puntos)

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-\ln(1+x)-(a+1)x}{x^2}$ es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota la función logaritmo neperiano).

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-\ln(1+x)-(a+1)x}{x^2}=\frac{0e^0-\ln(1+0)-(a+1)0}{0^2}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-\frac{1}{1+x}-(a+1)}{2x}=\frac{e^0+0e^0-\frac{1}{1+0}-(a+1)}{2\cdot 0}=\frac{1-1-a-1}{0}=\frac{-1-a}{0}=\ldots$$

Como el límite debe ser finito el numerador no puede ser distinto de 0, por lo que $-1-a=0\Rightarrow a=-1$.

Seguimos calculando el valor del límite con $a=-1$.

$$\ldots=\frac{-1-a}{0}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^x+xe^x-\frac{-1}{(1+x)^2}}{2}=$$

$$=\frac{e^0+e^0+0e^0-\frac{-1}{(1+0)^2}}{2}=\frac{1+1+1}{2}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Determina la función $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto *(0, 1)*, $f'(0)=0$ y $f''(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

Si $f''(x)=\dfrac{1}{x+1}$ entonces su integral es *f ´(x)*.

$$f'(x)=\int f''(x)\,dx=\int\frac{1}{x+1}dx=\ln|x+1|=\ln(x+1)+C,\ \text{pues } x\in(-1,+\infty)$$

Como sabemos que $f'(0)=0$ debe cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\ln(x+1)+C \\ f'(0)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 0=\ln(0+1)+C\Rightarrow C=0\Rightarrow f'(x)=\ln(x+1)$$

Si $f'(x)=\ln(x+1)$ entonces su integral es la función *f(x)*.

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\ln(x+1)\,dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln(x+1)\to du=\dfrac{1}{x+1}dx\\ dv=dx\to v=x\end{array}\right\}=x\ln(x+1)-\int x\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=x\ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}dx=x\ln(x+1)-\int\frac{x+1-1}{x+1}dx=x\ln(x+1)-\int\frac{x+1}{x+1}dx+\int\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=x\ln(x+1)-\int 1dx+\int\frac{1}{x+1}dx=x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)=(x+1)\ln(x+1)-x+K$$

También sabemos que su gráfica pasa por el punto *(0, 1)*, lo que significa que *f(0) = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x+1)\ln(x+1)-x+K \\ f(0)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow 1=(0+1)\ln(0+1)-0+K\Rightarrow 1=K\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{f(x)=(x+1)\ln(x+1)-x+1}$$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$

a) Discútelo según los valores de a. **(1.75 puntos)**
b) Resuelve, si es posible, el sistema para $a=1$ y $a=-2$. **(0.75 puntos)**

a) El sistema tiene asociadas la matriz de coeficientes y matriz ampliada siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix};\ A/B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3+1+1-a-a-a=a^3-3a+2$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^3-3a+2=0 \Rightarrow \ldots$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow a^3-3a+2=(a-1)(a^2+a-2)$$

$$a^2+a-2=0 \Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\begin{cases} \frac{-1+3}{2}=1 \\ \frac{-1-3}{2}=-2 \end{cases}$$

$$a^3-3a+2=(a-1)(a-1)(a+2)$$

$$\ldots \Rightarrow (a-1)(a-1)(a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$$

Aparecen tres situaciones que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq -2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de la matriz de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a=1$.

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de la matriz A es menor de 3.

El sistema queda $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$. Las tres ecuaciones son iguales y el sistema será **compatible indeterminado** (infinitas soluciones). Terminamos de resolverlo.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=1-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}}$$

CASO 3. $a=-2$.

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de la matriz A es menor de 3.

Averiguamos los rangos de A y de A/B utilizando el método de Gauss para triangular la matriz A/B.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix};\ A/B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\cdot Fila\,2^a + Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & -4 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -3 & 3 & -3 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\cdot Fila\,3^a + Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 3 & -3 & 9 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila\,3^a + Fila\,2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} -2 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}}^{A/B} \\ \begin{matrix} 0 & -3 & 3 & -3 \end{matrix} \\ \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \quad 6 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

b) Para *a* = *1* las soluciones del sistema son: $x=1-\alpha-\beta;\ y=\alpha;\ z=\beta$. Siendo $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Para *a* = *2* el sistema queda $\begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ x+y-2z=4 \end{cases}$ y en el apartado anterior hemos comprobado que su sistema equivalente es $\begin{cases} -2x+y+z=1 \\ -3y+3z=-3 \\ 0=6 \end{cases}$ y no tiene solución.

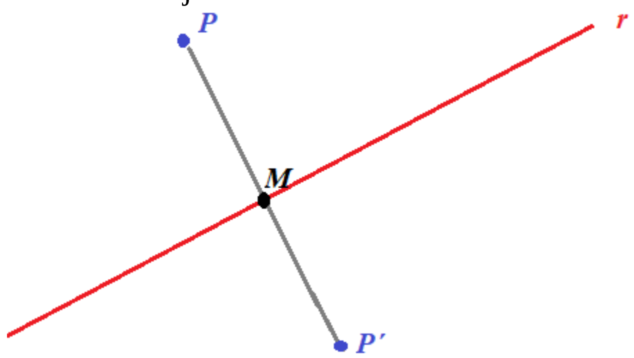
EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera el punto *P(1, 0, –1)* y la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+2z=5 \\ x-z=1 \end{cases}$.

a) Determina el punto simétrico de *P* respecto de la recta *r*. **(1.5 puntos)**

b) Calcula el punto de la recta *r* que dista $\sqrt{6}$ unidades de *P*. **(1 punto)**

a) Nos piden hallar el punto P´ del dibujo.



Hallamos el plano π perpendicular a la recta que pasa por el punto *P*. Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta *r*.

$$r \equiv \begin{cases} x-y+2z=5 \\ x-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2z-5=y \\ x-1=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x+2(-1+x)-5=x-2+2x-5=-7+3x \\ z=-1+x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\alpha \\ y=-7+3\alpha \\ z=-1+\alpha \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} Q_r(0,-7,-1) \\ \vec{v_r}=(1,3,1) \end{cases}$$

Hallamos la ecuación del plano π.

$$\left.\begin{array}{l} P(1,0,-1)\in\pi \\ \vec{n}=\vec{v_r}=(1,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(1,0,-1)\in\pi \\ \pi \equiv x+3y+z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+0-1+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow \pi \equiv x+3y+z=0$$

Hallamos el punto M de corte de la recta *r* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+3y+z=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=\alpha \\ y=-7+3\alpha \\ z=-1+\alpha \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+3(-7+3\alpha)-1+\alpha=0 \Rightarrow 11\alpha-22=0 \Rightarrow \alpha=2 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-7+6=-1 \\ z=-1+2=1 \end{cases}$$

El punto *M* tiene coordenadas $M(2,-1,1)$.

El punto *P´* se obtiene al sumarle al punto *M* el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM}=(2,-1,1)-(1,0,-1)=(1,-1,2)$$

$$P´=M+\overrightarrow{PM}=(2,-1,1)+(1,-1,2)=(3,-2,3)$$

El punto *P´* simétrico de *P* respecto de la recta *r* tiene coordenadas $P´(3,-2,3)$

b) La recta *r* tiene las ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -7+3\alpha \\ z = -1+\alpha \end{cases}$. Un punto Q de la recta tiene coordenadas $Q(\alpha, -7+3\alpha, -1+\alpha)$.

Hacemos que la distancia de *P* a *Q* sea $\sqrt{6}$.

$$\left.\begin{array}{l} P(1,0,-1) \\ Q(\alpha,-7+3\alpha,-1+\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (\alpha,-7+3\alpha,-1+\alpha)-(1,0,-1) = (\alpha-1,-7+3\alpha,\alpha)$$

$$\text{Distancia}(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(\alpha-1)^2+(-7+3\alpha)^2+\alpha^2} = \sqrt{\alpha^2-2\alpha+1+49-42\alpha+9\alpha^2+\alpha^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Distancia}(P,Q) = \sqrt{11\alpha^2-44\alpha+50} \\ \text{Distancia}(P,Q) = \sqrt{6} \end{array}\right\} \Rightarrow 11\alpha^2-44\alpha+50 = 6 \Rightarrow 11\alpha^2-44\alpha+44 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2-4\alpha+4 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(4)}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{Q(2,-1,1)}$$

El punto de la recta *r* que dista $\sqrt{6}$ unidades de *P* es el punto $M(2,-1,1)$ obtenido en el apartado anterior.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}$ para $x \neq 2$.

a) Estudia la derivabilidad de *f*. **(1.25 puntos)**

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1.25 puntos)**

a) La función tiene la expresión $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x}{2-x} & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{x}{2-x} & si\ x>0\ y\ x\neq 2 \end{cases}$.

La función tiene dominio = $\mathbb{R}-\{2\}$. No es continua y por tanto no es derivable en *x = 2*.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0,2\}$ y su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-1\cdot(2-x)-(-x)(-1)}{(2-x)^2}=\dfrac{-2+x-x}{(2-x)^2}=\dfrac{-2}{(2-x)^2} & si\ x<0 \\ \dfrac{1\cdot(2-x)-(x)(-1)}{(2-x)^2}=\dfrac{2-x+x}{(2-x)^2}=\dfrac{2}{(2-x)^2} & si\ x>0\ y\ x\neq 2 \end{cases}$$

Estudiamos la derivabilidad en *x = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2}{(2-x)^2}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2} \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{(2-x)^2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=-\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{1}{2}=f'(0^+)$$

Al ser diferentes los valores de las derivadas laterales la función no es derivable en *x = 0*.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0,2\}$

b) La función derivada $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2}{(2-x)^2} & si\ x<0 \\ \dfrac{2}{(2-x)^2} & si\ x>0\ y\ x\neq 2 \end{cases}$ nunca se anula, por lo que solo hay que ver si es creciente o decreciente antes, entre y después de los valores *x = 0* y *x = 2*.

- En $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{-2}{(2-(-1))^2}=-\dfrac{2}{9}<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En $(0,2)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{2}{(2-1)^2}=2>0$. La función crece en $(0,2)$.

- En $\left(2,+\infty\right)$ tomamos *x = 3* y la derivada vale $f\,\acute{}\left(3\right)=\frac{2}{\left(2-3\right)^2}=2>0$. La función crece en $\left(2,+\infty\right)$.

Resumiendo: La función decrece en $\left(-\infty,0\right)$ y crece en $\left(0,2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

EJERCICIO 6 **(2.5 puntos)**

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -4x+2$ y $g(x) = -x^2+2x+c$.

a) Halla el valor de *c* sabiendo que sus gráficas se cortan en el punto en el que *g* alcanza su máximo. **(1 punto)**

b) Para *c* = –3, calcula el área de la región limitada por ambas gráficas. **(1.5 puntos)**

a) Derivamos la función *g* y hallamos sus puntos críticos.

$$\left.\begin{array}{l} g'(x) = -2x^2+2 \\ g'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x^2+2=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

Sustituimos los dos valores en la segunda derivada para determinar su máximo.

$$g''(x) = -4x \Rightarrow \begin{cases} g''(1) = -4 < 0 \\ g''(-1) = -4(-1) = 4 > 0 \end{cases}$$

La función presenta un máximo relativo en *x = 1*.

Averiguamos el valor de *c* para que el punto de corte de las dos gráficas sea en *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -4x+2 \\ g(x) = -x^2+2x+c \\ f(1) = g(1) \end{array}\right\} \Rightarrow -4(1)+2 = -(1)^2+2(1)+c \Rightarrow -2 = 1+c \Rightarrow \boxed{c=-3}$$

b) Para *c* = –3 las gráficas se cortan en *x* = *1*, averiguamos el otro punto de corte.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -4x+2 \\ g(x) = -x^2+2x-3 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -4x+2 = -x^2+2x-3 \Rightarrow x^2-6x+5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2-4(1)(5)}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{16}}{2} = \begin{cases} x = \dfrac{6+4}{2} = 5 \\ x = \dfrac{6-4}{2} = 1 \end{cases}$$

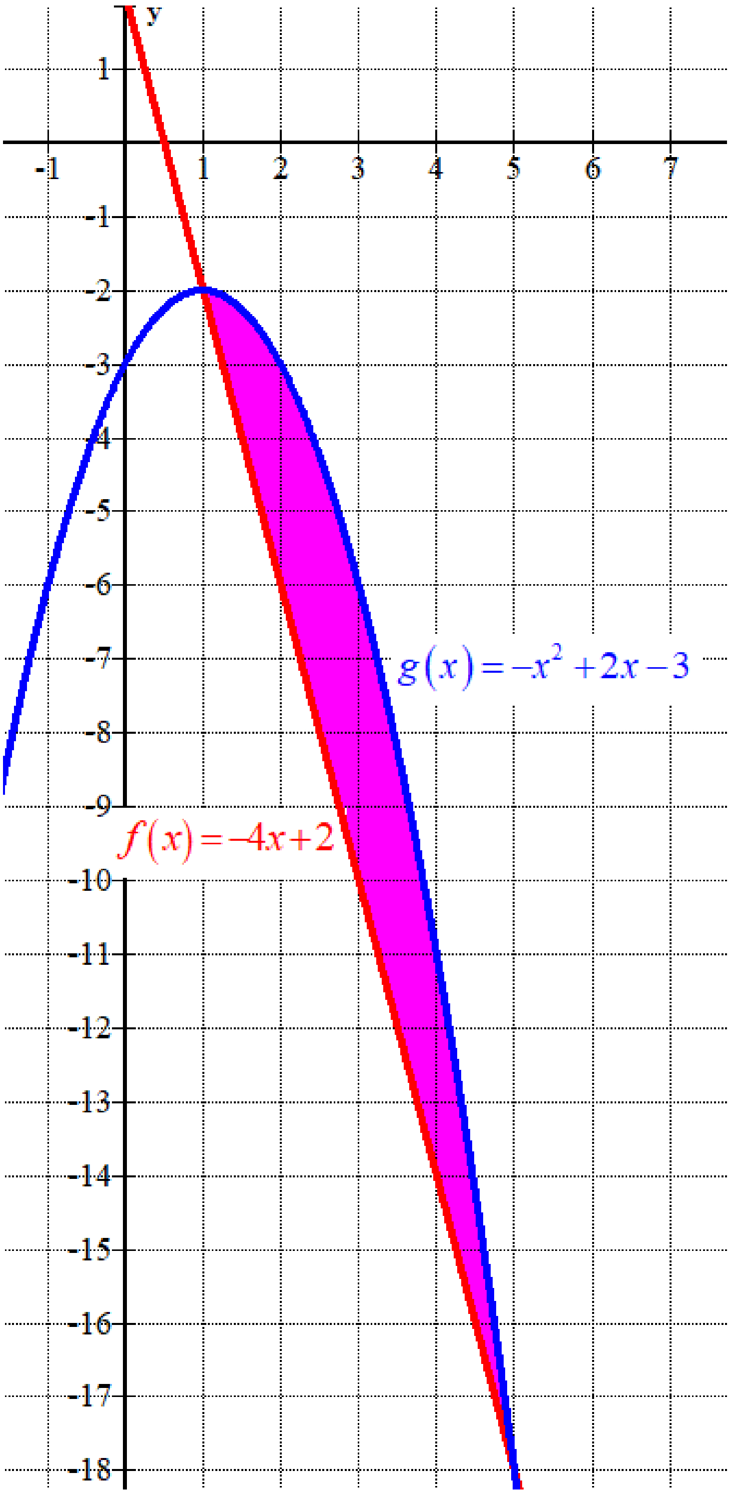
El otro punto de corte de las gráficas es *x* = *5*.
El área del recinto encerrado entre las dos gráficas es el valor absoluto de la integral definida entre 1 y 5 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_1^5 -4x+2-\left(-x^2+2x-3\right)dx = \int_1^5 x^2-6x+5dx = \left[\frac{x^3}{3}-3x^2+5x\right]_1^5 =$$

$$= \left[\frac{5^3}{3}-3\cdot 5^2+5\cdot 5\right]-\left[\frac{1^3}{3}-3\cdot 1^2+5\cdot 1\right] = \frac{125}{3}-75+25-\frac{1}{3}+3-5 = \frac{124}{3}-52 = -\frac{32}{3}$$

El área del recinto encerrado entre las dos gráficas es $\acute{A}rea = \left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3} \simeq 10.66\ u^2$.

No pide dibujarla, pero lo hacemos para comprobar la bondad de la solución.



EJERCICIO 7 **(2.5 puntos)**

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{37} y A^{41}. **(1.5 puntos)**

b) Halla el determinante de la matriz $3A^{52}\left(A^t\right)^4$, donde A^t es la matriz traspuesta de *A*. **(1 punto)**

a) Calculamos las potencias de A en busca de una regularidad.

$$A^2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4}-\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}+\frac{1}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4}+\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}+\frac{1}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=Id$$

Como 37 = 12 · 3 + 1 tenemos que:

$$A^{37}=A^{12\cdot 3+1}=\left(A^3\right)^{12}\cdot A^1=\left(Id\right)^{12}\cdot A=Id\cdot A=A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Como 41 = 13 · 3 + 2 tenemos que:

$$A^{41}=A^{13\cdot 3+2}=\left(A^3\right)^{13}\cdot A^2=\left(Id\right)^{13}\cdot A^2=Id\cdot A^2=A^2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Sabemos que $\left|A^t\right|=\left|A\right|$. También que si A es una matriz cuadrada de orden 2 → $\left|3A\right|=3^2\left|A\right|$. También que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes.

$$\left|A\right|=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1\Rightarrow\left|A^t\right|=\left|A\right|=1$$

Aplicamos estas propiedades al cálculo del determinante pedido.

$$\left|3A^{52}\left(A^t\right)^4\right|=3^2\left|A^{52}\left(A^t\right)^4\right|=9\left|A\right|^{52}\left|A^t\right|^4=9\cdot 1^{52}\cdot 1^4=\boxed{9}$$

EJERCICIO 8 **(2.5 puntos)**

Considera los vectores $\vec{u}=(2,1,0)$, $\vec{v}=(1,0,-1)$ y $\vec{w}=(a,b,1)$.

a) Halla *a* y *b* sabiendo que los tres vectores son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$. **(1.5 puntos)**

b) Para *a = 1*, calcula el valor o valores de *b* para que el volumen del paralelepípedo formado por dichos vectores sea de 6 unidades cúbicas. **(1 punto)**

a) Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$ su producto escalar es nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(2,1,0)\\ \vec{w}=(a,b,1)\\ \vec{u}\perp\vec{w}\end{array}\right\}\Rightarrow(2,1,0)(a,b,1)=0\Rightarrow 2a+b=0\Rightarrow\boxed{b=-2a}$$

Si los tres vectores son linealmente dependientes su producto mixto es nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(2,1,0)\\ \vec{v}=(1,0,-1)\\ \vec{w}=(a,b,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&0&-1\\a&b&1\end{vmatrix}=-a-1+2b$$

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=0\Rightarrow -a-1+2b=0\Rightarrow\boxed{a=2b-1}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}b=-2a\\ a=2b-1\end{array}\right\}\Rightarrow b=-2(2b-1)\Rightarrow b=-4b+2\Rightarrow 5b=2\Rightarrow\boxed{b=\frac{2}{5}}\Rightarrow\boxed{a=2\frac{2}{5}-1=\frac{4}{5}-1=\frac{-1}{5}}$$

Los valores buscados son $a=\frac{-1}{5}$ y $b=\frac{2}{5}$.

b) El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(2,1,0)\\ \vec{v}=(1,0,-1)\\ \vec{w}=(1,b,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&0&-1\\1&b&1\end{vmatrix}=-1-1+2b=-2+2b$$

$$\left.\begin{array}{l}\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=-2+2b\\ Volumen=6u^3\end{array}\right\}\Rightarrow\left|-2+2b\right|=6\Rightarrow\begin{cases}-2+2b=6\rightarrow 2b=8\rightarrow\boxed{b=4}\\ -2+2b=-6\rightarrow 2b=-4\Rightarrow\boxed{b=-2}\end{cases}$$

Los valores de *b* que hacen cumplir la condición pedida son *b = –2* y *b = 4*.