PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Este examen consta de 8 ejercicios.

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ para $x\neq 1,-1$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1.25 puntos)**
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Determina la única función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumple que $f(0)=1$, $f'(0)=1$ y $f''(x)=e^x(x+2)$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&m\\1&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$.

a) Determina los valores de *m* para los que *AB* no tiene inversa. **(0.75 puntos)**
b) Determina los valores de *m* para los que *BA* no tiene inversa. **(0.75 puntos)**
c) Para *m* = *0*, resuelve, si es posible, el sistema dado por $BAX=C$ y halla una solución en la que $x+y+z=0$. **(1 punto)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(t,2,-1)$, $B(0,1,1)$, $C(-1,0,2)$ y $D(2,3,-t-1)$.

a) Calcula el valor o valores de *t* para que el volumen del tetraedro de vértices *A*, *B*, *C*, *D* sea 5 unidades cúbicas. **(1.25 puntos)**
b) Para *t* = *0*, calcula la distancia del punto *A* a la recta determinada por los puntos *B* y *C*. **(1,25 puntos)**

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS II

EJERCICIO 5 **(2.5 puntos)**
Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tiene un punto crítico en $x=0$, que su gráfica pasa por (0, 3) y que la recta $y=-2x+2$ es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa *x = 1*. Calcula *a*, *b*, *c* y *d*.

EJERCICIO 6 **(2.5 puntos)**
Calcula el valor de *a > 0* para que el área comprendida entre la parábola $y=3x^2-2ax$ y el eje de abscisas sea 4 unidades cuadradas.

EJERCICIO 7 **(2.5 puntos)**
Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

a) Sabiendo que la matriz *X* verifica que $X^3AX=B^2$, halla los posibles valores de su determinante. **(1 punto)**
b) Determina, si existe, una matriz *Y* que verifique $A^2YB^{-1}=A$. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 8 **(2.5 puntos)**
Considera el punto *A(0, 1, –2)* y los planos $\pi_1\equiv 2x-y-z+5=0$ y $\pi_2\equiv x+5y-6z-4=0$.
a) Halla el punto simétrico de *A* respecto de π_1. **(1.5 puntos)**
b) Determina la recta que pasa por *A* y es paralela a π_1 y π_2. **(1 punto)**

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 **(2.5 puntos)**

Considera la función *f* definida por $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ para $x\neq 1,-1$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1.25 puntos)**

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1.25 puntos)**

a) El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿Es $x=-1$ asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f\left(x\right)=\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{-1}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical.

¿Es $x=1$ asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x\left(x^2-1\right)}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+x}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y=x$.

b) Busco los valores que anulan la derivada de la función.

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2-1\right)-x^3\left(2x\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=0\Rightarrow x^4-3x^2=0\Rightarrow x^2\left(x^2-3\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x^2=0\rightarrow x=0\\ x^2-3=0\rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

La función tiene tres puntos críticos: $x=-\sqrt{3}\simeq-1.73$, $x = 0$, $x=\sqrt{3}\simeq1.73$. En $x = -1$ y $x=1$ la función no existe.
Estudiamos el cambio del signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2)=\frac{(-2)^4-3(-2)^2}{\left((-2)^2-1\right)^2}=\frac{4}{9}>0$.

  La función crece en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$.
- En $\left(-\sqrt{3},-1\right)$ tomamos $x = -1.5$ y la derivada vale

  $f'(-1.5)=\frac{(-1.5)^4-3(-1.5)^2}{\left((-1.5)^2-1\right)^2}=\frac{-27}{25}<0$. La función decrece en $\left(-\sqrt{3},-1\right)$
- En $(-1,0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

  $f'(-0.5)=\frac{(-0.5)^4-3(-0.5)^2}{\left((-0.5)^2-1\right)^2}=\frac{-11}{4}<0$. La función decrece en $(-1,0)$
- En $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=\frac{(0.5)^4-3(0.5)^2}{\left((0.5)^2-1\right)^2}=\frac{-11}{4}<0$. La función decrece en $(0,1)$
- En $\left(1,\sqrt{3}\right)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5)=\frac{(1.5)^4-3(1.5)^2}{\left((1.5)^2-1\right)^2}=\frac{-27}{25}<0$.

  La función decrece en $\left(1,\sqrt{3}\right)$
- En $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{(2)^4-3(2)^2}{\left((2)^2-1\right)^2}=\frac{4}{9}>0$. La función crece en $\left(\sqrt{3},+\infty\right)$.

La función crece en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ y decrece en $\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)
Determina la única función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumple que $f(0)=1,\ f'(0)=1$ y $f''(x)=e^x(x+2)$.

Si $f''(x)=e^x(x+2)$ entonces su integral es *f ´(x)*.

$$f'(x)=\int f''(x)dx=\int e^x(x+2)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x+2\to du=dx\\ dv=e^xdx\to v=\int e^xdx=e^x\end{array}\right\}=(x+2)e^x-\int e^xdx=$$

$$=(x+2)e^x-e^x=(x+1)e^x+C$$

Como sabemos que $f'(0)=1$ debe cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l}f'(x)=(x+1)e^x+C\\ f'(0)=1\end{array}\right\}\Rightarrow 1=(0+1)e^0+C\Rightarrow 1=1+C\Rightarrow C=0\Rightarrow f'(x)=(x+1)e^x$$

Si $f'(x)=(x+1)e^x$ entonces su integral es la función *f(x)*.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x+1)e^xdx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x+1\to du=dx\\ dv=e^xdx\to v=\int e^xdx=e^x\end{array}\right\}=(x+1)e^x-\int e^xdx=$$

$$=(x+1)e^x-e^x=xe^x+K$$

También sabemos que *f(0) = 1*.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=xe^x+K\\ f(0)=1\end{array}\right\}\Rightarrow 1=0e^0+K\Rightarrow 1=K\Rightarrow \boxed{f(x)=xe^x+1}$$

<u>EJERCICIO 3</u> (2.5 puntos)

Considera $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&m\\1&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$.

a) Determina los valores de *m* para los que *AB* no tiene inversa. **(0.75 puntos)**
b) Determina los valores de *m* para los que *BA* no tiene inversa. **(0.75 puntos)**
c) Para *m = 0*, resuelve, si es posible, el sistema dado por $BAX=C$ y halla una solución en la que $x+y+z=0$. **(1 punto)**

a) Para que la matriz *AB* no tenga inversa su determinante debe ser nulo.

$$AB=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&m\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1+1&0+m+1\\1+0+1&0+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&m+1\\2&1\end{pmatrix}$$

$$|AB|=\begin{vmatrix}2&m+1\\2&1\end{vmatrix}=2-2m-2=-2m$$

$$|AB|=0\Rightarrow -2m=0\Rightarrow \boxed{m=0}$$

La matriz *AB* no tiene inversa cuando *m = 0.*

b) Para que la matriz *BA* no tenga inversa su determinante debe ser nulo.

$$BA=\begin{pmatrix}1&0\\-1&m\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\-2+m&-1&-1+m\\2+1&1&1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\-2+m&-1&-1+m\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$|BA|=\begin{vmatrix}2&1&1\\-2+m&-1&-1+m\\3&1&2\end{vmatrix}=-\cancel{4-3}+3m-\cancel{2}+m+\cancel{3+4}-2m+\cancel{2}-2m=0$$

La matriz *BA* tiene determinante nulo, independientemente del valor de *m*, por lo que no tiene inversa para cualquier valor de *m*.

c) Para *m = 0* la matriz *BA* queda $BA=\begin{pmatrix}2&1&1\\-2&-1&-1\\3&1&2\end{pmatrix}$ y el sistema $BAX=C$ sería:

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\-2&-1&-1\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2x+y+z=2\\-2x-y-z=-2\\3x+y+2z=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{1^{a}\ y\ 2^{a}\ ecuación\ son\ semejantes\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y+z=2 \\ 3x+y+2z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=2-z-2x \\ 3x+y+2z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x+2-z-2x+2z=3 \Rightarrow x+z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-z \Rightarrow y=2-z-2(1-z)=2-z-2+2z=z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son: $x=1-\alpha;\ y=\alpha;\ z=\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si le añadimos la condición $x+y+z=0$ tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ \begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 1-\alpha+\alpha+\alpha=0 \Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=1-(-1)=2 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$$

La solución buscada es $x=2;\ y=-1;\ z=-1$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(t,2,-1)$, $B(0,1,1)$, $C(-1,0,2)$ y $D(2,3,-t-1)$.

a) Calcula el valor o valores de *t* para que el volumen del tetraedro de vértices *A, B, C, D* sea 5 unidades cúbicas. **(1.25 puntos)**

b) Para *t = 0*, calcula la distancia del punto *A* a la recta determinada por los puntos *B* y *C*. **(1,25 puntos)**

a) El volumen del tetraedro de vértices *A, B, C, D* es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BD}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=(-1,0,2)-(0,1,1)=(-1,-1,1)\\ \overrightarrow{BA}=(t,2,-1)-(0,1,1)=(t,1,-2)\\ \overrightarrow{BD}=(2,3,-t-1)-(0,1,1)=(2,2,-t-2)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right]=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 1\\ t & 1 & -2\\ 2 & 2 & -t-2\end{vmatrix}=$$

$$=t+\cancel{2}+\cancel{4}+2t-\cancel{2}+t(-t-2)-\cancel{4}=t+\cancel{2t}-t^2-\cancel{2t}=-t^2+t$$

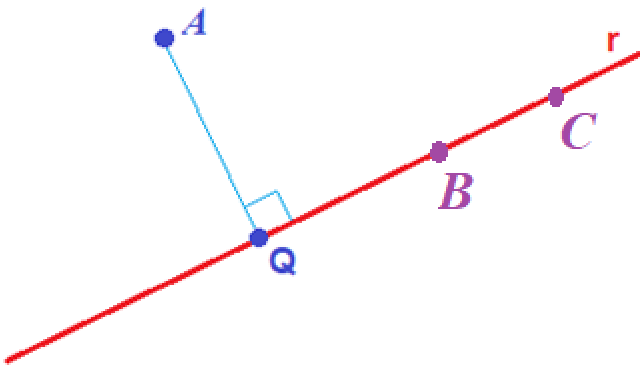
Como el volumen debe ser 5 tenemos:

$$\left.\begin{array}{r}Volumen=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right]\right|}{6}=\dfrac{\left|-t^2+t\right|}{6}\\ Volumen=5\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\left|-t^2+t\right|}{6}=5\Rightarrow\left|-t^2+t\right|=30\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-t^2+t=30\rightarrow -t^2+t-30=0\rightarrow t=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-1)(-30)}}{2(-1)}=\dfrac{-3\pm\sqrt{-119}}{-2}=\text{¡Im}\,posible\text{!}\\ -t^2+t=-30\rightarrow -t^2+t+30=0\rightarrow t=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-1)(30)}}{2(-1)}=\dfrac{-1\pm\sqrt{121}}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-1+11}{-2}=-5\\ \dfrac{-1-11}{-2}=6\end{cases}\end{cases}$$

Los valores de *t* buscados son *t = –5* y *t = 6.*

b) Hallamos el punto *Q* del dibujo determinando el plano π perpendicular a la recta *r* y que contiene el punto *A*. Después hallamos el punto de corte Q de recta y plano.



La recta *r* determinada por los puntos *B* y *C* tiene como vector director $\overrightarrow{BC}=(-1,-1,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} B(0,1,1)\in r \\ \vec{v_r}=\overrightarrow{BC}=(-1,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=-\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

El plano π tendrá como vector normal el vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} A(0,2,-1)\in\pi \\ \vec{n}=\overrightarrow{BC}=(-1,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A(0,2,-1)\in\pi \\ \pi\equiv -x-y+z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -0-2-1+D=0 \Rightarrow D=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi\equiv -x-y+z+3=0$$

Hallamos el punto de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi\equiv -x-y+z+3=0 \\ r\equiv\begin{cases} x=-\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda-(1-\lambda)+1+\lambda+3=0 \Rightarrow 3\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1+1=2 \Rightarrow Q(1,2,0) \\ z=1-1=0 \end{cases}$$

La distancia del punto *A* a la recta *r* es el módulo del vector $\overrightarrow{AQ}$.

$$\overrightarrow{AQ}=(1,2,0)-(0,2,-1)=(1,0,1)$$

$$\boxed{Dis\tan cia(A,r)=\left|\overrightarrow{AQ}\right|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}\ u}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO b)

Si llamamos *r* a la recta definida por los puntos B y C podemos utilizar la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

$$\overrightarrow{BC}=(-1,-1,1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AB}=(0,2,-1)-(0,1,-2)=(0,1,1)$$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-i-k+j-i=-2i+j-k=(-2,1,-1)$$

$$Dis\tan cia(A,r)=\frac{\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\boxed{\sqrt{2}\,u}$$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)
Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tiene un punto crítico en $x=0$, que su gráfica pasa por (0, 3) y que la recta $y=-2x+2$ es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa $x = 1$. Calcula a, b, c y d.

Si la función tiene un punto crítico en $x = 0$ la derivada debe anularse → $f'(0)=0$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=3ax^2+2bx+c \\ f'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=0+0+c \Rightarrow \boxed{c=0}$$

La función queda $f(x)=ax^3+bx^2+d$.
Si su gráfica pasa por (0, 3) significa que $f(0) = 3$.

$$f(0)=3=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+d \Rightarrow \boxed{d=3}$$

La función queda $f(x)=ax^3+bx^2+3$.

Si la recta $y=-2x+2$ es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ significa que la derivada en $x = 1$ vale –2 (pendiente de la recta tangente) → $f'(1)=-2$. También la recta tangente y la función coinciden en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=-2 \\ f'(x)=3ax^2+2bx \end{array}\right\} \Rightarrow -2=3a(1)^2+2b(1) \Rightarrow \boxed{-2=3a+2b}$$

La recta tangente $y=-2x+2$ en $x = 1$ toma el valor $y=-2+2=0$. La función pasa por el punto de tangencia $(1,0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx^2+3 \\ \text{La función pasa por } (1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{0=a+b+3}$$

Reunimos estas dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} -2=3a+2b \\ 0=a+b+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2=3a+2b \\ -b-3=a \end{array}\right\} \Rightarrow -2=3(-b-3)+2b \Rightarrow -2=-3b-9+2b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7=-b \Rightarrow \boxed{b=-7} \Rightarrow \boxed{a=7-3=4}$$

Los valores buscados son $a = 4$, $b = –7$, $c = 0$ y $d = 3$.

EJERCICIO 6 **(2.5 puntos)**
Calcula el valor de $a > 0$ para que el área comprendida entre la parábola $y = 3x^2 - 2ax$ y el eje de abscisas sea 4 unidades cuadradas.

Hallamos los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{r} y = 3x^2 - 2ax \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2 - 2ax = 0 \Rightarrow x(3x - 2a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ 3x - 2a = 0 \to 3x = 2a \to \boxed{x = \frac{2}{3}a} \end{cases}$$

El área comprendida entre la parábola y el eje de abscisas es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y $\frac{2}{3}a$.

$$\int_0^{2a/3} 3x^2 - 2axdx = \left[x^3 - ax^2\right]_0^{\frac{2}{3}a} = \left[\left(\frac{2}{3}a\right)^3 - a\cdot\left(\frac{2}{3}a\right)^2\right] - \left[0^3 - a\cdot 0^2\right] = \frac{8}{27}a^3 - \frac{4}{9}a^3 = -\frac{4}{27}a^3$$

$$Área = \left|-\frac{4}{27}a^3\right| = \{a > 0\} = \frac{4}{27}a^3$$

Igualamos el área a 4.

$$Área = 4 = \frac{4}{27}a^3 \Rightarrow a^3 = \frac{27\cdot 4}{4} = 27 \to \boxed{a = \sqrt[3]{27} = 3}$$

El valor buscado es $a = 3$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

a) Sabiendo que la matriz X verifica que $X^3AX=B^2$, halla los posibles valores de su determinante. **(1 punto)**

b) Determina, si existe, una matriz Y que verifique $A^2YB^{-1}=A$. **(1.5 puntos)**

a) Calculamos el determinante de A y de B.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2-1=1 \qquad |B|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0-2=-2$$

Aplicamos las propiedades de los determinantes en la igualdad $X^3AX=B^2$.

$$\left|X^3AX\right|=\left|B^2\right|\Rightarrow\left|X^3\right|\cdot|A|\cdot|X|=|B|^2\Rightarrow|X|^3\cdot|A|\cdot|X|=|B|^2\Rightarrow|X|^3\cdot1\cdot|X|=(-2)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|X|^4=4\Rightarrow|X|=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}\Rightarrow\boxed{|X|=\pm\sqrt{2}}$$

b) Multiplicamos por la matriz B en ambos miembros de la igualdad $A^2YB^{-1}=A$.

$$A^2YB^{-1}B=AB\Rightarrow A^2Y=AB$$

Como la matriz A tiene determinante no nulo tiene matriz inversa A^{-1}. Multiplicamos la igualdad anterior por la inversa de A.

$$A^{-1}A^2Y=A^{-1}AB\Rightarrow A^{-1}AAY=A^{-1}AB\Rightarrow AY=B$$

Volvemos a multiplicar por la inversa de A.

$$A^{-1}AY=A^{-1}B\Rightarrow Y=A^{-1}B$$

Calculamos la inversa de A.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de Y.

$$Y=A^{-1}B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-2 & 2-0\\ -2+2 & -1+0\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{Y=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}}$$

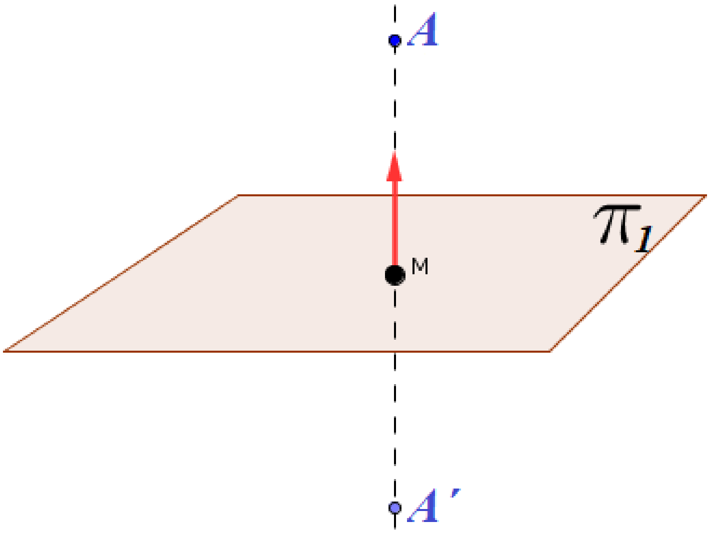
EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el punto $A(0, 1, -2)$ y los planos $\pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + 5y - 6z - 4 = 0$.

a) Halla el punto simétrico de A respecto de π_1. **(1.5 puntos)**

b) Determina la recta que pasa por A y es paralela a π_1 y π_2. **(1 punto)**

a) Deseamos hallar el punto A' simétrico de A respecto del plano π_1



Hallamos la recta r perpendicular al plano que pasa por el punto A. Dicha recta tendrá como vector director el normal del plano.

$$\pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n_1} = (2,-1,-1)$$

$$r \equiv \begin{cases} \vec{v_r} = \vec{n_1} = (2,-1,-1) \\ A(0,1,-2) \in r \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = -2 - \alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de la recta r y el plano π_1.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = -2 - \alpha \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 4\alpha - (1-\alpha) - (-2-\alpha) + 5 = 0 \Rightarrow 4\alpha - 1 + \alpha + 2 + \alpha + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\alpha + 6 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-6}{6} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2(-1) = -2 \\ y = 1 - \alpha = 1 - (-1) = 2 \\ z = -2 - \alpha = -2 - (-1) = -1 \end{cases} \Rightarrow M(-2,2,-1)$$

El punto A' se obtiene sumando al punto M el vector $\overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{AM} = (-2,2,-1) - (0,1,-2) = (-2,1,1)$$

$$A' = M + \overrightarrow{AM} = (-2,2,-1) + (-2,1,1) \Rightarrow \boxed{A' = (-4,3,0)}$$

b) Si una recta es paralela a π_1 y π_2 su vector director será perpendicular a los vectores normales de los planos. Este vector es el producto vectorial de los vectores normales de ambos planos.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv 2x - y - z + 5 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (2,-1,-1) \\ \pi_2 \equiv x + 5y - 6z - 4 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (1,5,-6) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_r} = 6i - j + 10k + k + 12j + 5i = 11i + 11j + 11k = (11,11,11)$$

Hallamos la ecuación de la recta r.

$$r \equiv \begin{cases} A(0,1,-2) \in r \\ \overrightarrow{v_r} = (11,11,11) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x}{11} = \frac{y-1}{11} = \frac{z+2}{11} \Rightarrow \boxed{r \equiv x = y - 1 = z + 2}$$