



- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
  - b) Este examen consta de 8 ejercicios.
  - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
  - d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.
  - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
  - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0.25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Sabiendo que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \ln(1+x) - (a+1)x}{x^2}$  es finito, calcula  $a$  y el valor del límite ( $\ln$  denota la función logaritmo neperiano).

**EJERCICIO 2 (2.5 puntos)**

Determina la función  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto  $(0, 1)$ ,  $f'(0) = 0$  y  $f''(x) = \frac{1}{x+1}$

**EJERCICIO 3 (2.5 puntos)**

Considera el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

- a) Discútelo según los valores de  $a$ . **(1.75 puntos)**
- b) Resuelve, si es posible, el sistema para  $a = 1$  y  $a = -2$ . **(0.75 puntos)**

**EJERCICIO 4 (2.5 puntos)**

Considera el punto  $P(1, 0, -1)$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x - z = 1 \end{cases}$

- a) Determina el punto simétrico de  $P$  respecto de la recta  $r$ . **(1.5 puntos)**
- b) Calcula el punto de la recta  $r$  que dista  $\sqrt{6}$  unidades de  $P$ . **(1 punto)**



---

**EJERCICIO 5 (2.5 puntos)**

Sea  $f$  la función definida por  $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$  para  $x \neq 2$ .

- Estudia la derivabilidad de  $f$ . **(1.25 puntos)**
- Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ . **(1.25 puntos)**

---

**EJERCICIO 6 (2.5 puntos)**

Considera las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = -4x + 2$  y  $g(x) = -x^2 + 2x + c$ .

- Halla el valor de  $c$  sabiendo que sus gráficas se cortan en el punto en el que  $g$  alcanza su máximo. **(1 punto)**
- Para  $c = -3$ , calcula el área de la región limitada por ambas gráficas. **(1.5 puntos)**

---

**EJERCICIO 7 (2.5 puntos)**

Considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

- Calcula  $A^{37}$  y  $A^{41}$ . **(1.5 puntos)**
- Halla el determinante de la matriz  $3A^{52}(A^t)^4$ , donde  $A^t$  es la matriz traspuesta de  $A$ . **(1 punto)**

---

**EJERCICIO 8 (2.5 puntos)**

Considera los vectores  $\vec{u} = (2, 1, 0)$ ,  $\vec{v} = (1, 0, -1)$  y  $\vec{w} = (a, b, 1)$ .

- Halla  $a$  y  $b$  sabiendo que los tres vectores son linealmente dependientes y que  $\vec{w}$  es ortogonal a  $\vec{u}$ . **(1.5 puntos)**
  - Para  $a = 1$ , calcula el valor o valores de  $b$  para que el volumen del paralelepípedo formado por dichos vectores sea de 6 unidades cúbicas. **(1 punto)**
-