	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2022-2023** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	Modelo orientativo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En la liga de fútbol profesional de Libertonia compiten veinte equipos. Cada equipo debe tener exactamente veinticinco jugadores de los que tres, y no más, han de ser porteros. Se sabe que la tercera parte del número de defensas coincide con la diferencia entre el número de centrocampistas y el número de delanteros. Por otro lado, la suma de la mitad del número de centrocampistas y el doble del número de delanteros excede en 25 unidades al número de defensas. Calcule el número de defensas, el número de centrocampistas y el número de delanteros que juegan en la liga.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Para la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e(x-1)}{e^x-e} & si\ x<1 \\ \dfrac{1}{4x-3} & si\ x\geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$ y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de sus asíntotas.

b) (0,5 puntos) Para la función $g(x)=(e^x-e)f(x)$, calcular el valor de $g'(0)$.

c) (1 punto) Calcular $\int_1^5 \sqrt{f(x)}dx$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Un depósito en forma de paralelepípedo, de base cuadrada *ABCD*, apoya completamente su base sobre una rampa en un local, quedando una arista superior pegada al techo. Se considera un sistema de ejes, con los semiejes positivos en un rincón del local. La arista inferior paralela a la que se apoya en el techo y no en su misma cara, tiene vértices de coordenadas *A(1, 1, 1)* y *B(1, 3, 1)*. La ecuación del plano que contiene a la rampa es $4x-3z=1$ y el vértice sobre el punto A es *A′(1, 1, 6)*. Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular una ecuación del plano que contiene a las aristas AB y AA′.

b) (1 punto) Calcular los otros dos vértices, C y D, de la base.

c) (1 punto) Calcular el volumen del depósito.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Una empresa complementa el sueldo de sus empleados según la consecución de ciertos objetivos valorados en función de una puntuación que sigue una distribución normal N(100, 35). Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el porcentaje de empleados con una puntuación comprendida entre 100 y 140.

b) (0.75 puntos) Hallar la probabilidad de que un trabajador obtenga una puntuación inferior a 95 puntos.

c) (1 punto) Determinar la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos si el 75.17% de la plantilla ha recibido dicho incentivo.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular, si existe, el valor de *m* para el cual se verifica que $A^tB=C$.

b) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de *m* para los que existe la inversa de *AC* y calcular para *m = 0* la inversa de *AC*.

c) (0.75 puntos) Calcular, si existe, el valor de *m* para el cual se cumple que $B^2=B-I$, siendo *I* la matriz identidad de orden 2.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un ayuntamiento ha dividido en parcelas parte del terreno municipal no urbanizable y lo ha cedido a los vecinos para su cultivo. Uno de los vecinos ha decidido que en su parcela asignada utilizará como huerto una zona rectangular de 72 metros cuadrados, dejando el resto para plantar frutales e instalar una caseta donde guardar las herramientas necesarias. La zona de huerto estará dividida en dos partes: la parte dedicada al cultivo de hortalizas será un rectángulo interior separado de los lados que delimitan el huerto. La separación será de medio metro entre cada uno de los lados de mayor longitud y un metro entre cada uno de los lados de menor longitud. La franja que delimita la zona de hortalizas la dedicará al cultivo de flores y plantas aromáticas.

a) (2 puntos) Calcule las dimensiones del huerto para que el área de la zona para el cultivo de hortalizas sea máxima.

b) (0.5 puntos) Calcule el área de la zona de cultivo de hortalizas.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran las siguientes rectas:

• *r*, la recta que pasa por el punto P(1, 1, 2) y tiene como vector director $\vec{u}=(0,1,2)$;

• *s*, la recta de ecuaciones $s\equiv\begin{cases} x+y-4=0 \\ x-2z+2=0 \end{cases}$;

• *t*, la recta paralela a *s* que contiene al punto P.

a) (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de *r* y *s*.

b) (0.75 puntos) Calcule el ángulo que forman las rectas *r* y *t*.

c) (1 punto) Calcule la proyección ortogonal del punto P sobre la recta *s*.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(A\cup B)=\frac{4}{5}, P(\overline{A})=\frac{9}{20}\, y\, P(\overline{B})=\frac{7}{20}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular razonadamente $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

b) (0.75 puntos) Calcular razonadamente $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

c) (0.5 puntos) Calcular razonadamente $P(A-B)$.

d) (0.5 puntos) Determinar si A y B son sucesos independientes.

NOTA: $\overline{A}$ y $A-B$ denotan, respectivamente, el suceso contrario de A y el suceso diferencia de A y B.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En la liga de fútbol profesional de Libertonia compiten veinte equipos. Cada equipo debe tener exactamente veinticinco jugadores de los que tres, y no más, han de ser porteros. Se sabe que la tercera parte del número de defensas coincide con la diferencia entre el número de centrocampistas y el número de delanteros. Por otro lado, la suma de la mitad del número de centrocampistas y el doble del número de delanteros excede en 25 unidades al número de defensas. Calcule el número de defensas, el número de centrocampistas y el número de delanteros que juegan en la liga.

Si "x" representa el número de defensas, "y" el de centrocampistas y "z" el de delanteros, se tienen las siguientes ecuaciones:

- Compiten veinte equipos. Cada equipo debe tener exactamente veinticinco jugadores de los que tres, y no más, han de ser porteros → $x+y+z=20\cdot(25-3)\to x+y+z=440$
- La tercera parte del número de defensas coincide con la diferencia entre el número de centrocampistas y el número de delanteros → $\frac{x}{3}=y-z\to x=3y-3z\to x-3y+3z=0$
- La suma de la mitad del número de centrocampistas y el doble del número de delanteros excede en 25 unidades al número de defensas →

$$\frac{y}{2}+2z=x+25\to y+4z=2x+50\to -2x+y+4z=50$$

Reunimos las ecuaciones en el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=440 \\ x-3y+3z=0 \\ -2x+y+4z=50 \end{array}\right\}$$

Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=440 \\ x-3y+3z=0 \\ -2x+y+4z=50 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{llllll} x & -3y & +3z & =0 & \to Ecuación\ 2^{a} \\ -x & -y & -z & =-440 & \to -Ecuación\ 1^{a} \\ \hline & -4y & +2z & =-440 & \to Nueva\ ecuación\ 2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} -2x & +y & +4z & =50 & \to Ecuación\ 3^{a} \\ 2x & +2y & +2z & =880 & \to +2\cdot Ecuación\ 1^{a} \\ \hline & 3y & +6z & =930 & \to Nueva\ ecuación\ 3^{a} \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r} x+y+z=440 \\ -4y+2z=-440 \\ 3y+6z=930 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r} x+y+z=440 \\ -2y+z=-220 \\ 3y+6z=930 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{lllll} 6y & +12z & = & 1860 & \to 2\cdot Ecuación\ 3^{a} \\ -6y & +3z & = & -660 & \to +3\cdot Ecuación\ 2^{a} \\ \hline & 15z & = & 1200 & \to Nueva\ ecuación\ 3^{a} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=440 \\ -2y+z=-220 \\ 15z=1200 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=440 \\ -2y+z=-220 \\ \boxed{z=\frac{1200}{15}=80} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+80=440 \\ -2y+80=-220 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=360 \\ -2y=-300 \rightarrow \boxed{y=\frac{300}{2}=150} \end{array}\right\} \Rightarrow x+150=360 \Rightarrow \boxed{x=210}$$

En la liga juegan 210 defensas, 150 centrocampistas y 80 delanteros.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Para la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e(x-1)}{e^x-e} & si\ x<1 \\ \dfrac{1}{4x-3} & si\ x\geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$ y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de sus asíntotas.

b) (0,5 puntos) Para la función $g(x)=(e^x-e)\,f(x)$, calcular el valor de $g'(0)$.

c) (1 punto) Calcular $\int_1^5 \sqrt{f(x)}dx$.

a) Si $x\neq 1$ la función es continua (propiedades de las funciones continuas).
En $x = 1$ estudiamos su continuidad.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\dfrac{1}{4-3}=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e(x-1)}{e^x-e}=\dfrac{e(1-1)}{e-1}=\dfrac{0}{0}=Indeterminación(L`Hôpital)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e}{e^x}=\dfrac{e}{e}=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{4x-3}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

La función es continua en $x = 1$. Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

Estudiamos sus asíntotas.

Asíntota vertical. $x=a$.

No tiene pues la función es continua en $\mathbb{R}$.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{4x-3}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{e(x-1)}{e^x-e}=\frac{-\infty}{0-e}=+\infty$$

La función tiene una asíntota horizontal en $y=0$ cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$, pues tiene asíntota horizontal.
Si puede tener asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e(x-1)}{e^x-e}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e(x-1)}{x\left(e^x-e\right)}=\frac{-\infty}{-\infty}=Indeterminación\left(L`Hôpital\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e}{\left(e^x-e\right)+xe^x}=\frac{e}{(0-e)+(-\infty)0}=\ldots$$

$$=\left\{\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\frac{-\infty}{+\infty}=Indeterminación\left(L`Hôpital\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\frac{1}{-\infty}=0\right\}=$$

$$\ldots=\frac{e}{-e+0}=-1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e(x-1)}{e^x-e}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e(x-1)+xe^x-ex}{e^x-e}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{ex}-e+xe^x-\cancel{ex}}{e^x-e}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-e+xe^x}{e^x-e}\right)=\frac{-e+0}{0-e}=1$$

La asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$ tiene la ecuación $y=-x+1$

b) Obtenemos la expresión de $g(x)=\left(e^x-e\right)f(x)$ en las proximidades de $x = 0$.

$$g(x)=\left(e^x-e\right)f(x)=\left(e^x-e\right)\frac{e(x-1)}{e^x-e}=e(x-1)$$

Calculamos la expresión de la derivada en el entorno de $x = 0$ y luego sustituimos por 0.

$$g(x)=e(x-1)\Rightarrow g'(x)=e\Rightarrow\boxed{g'(0)=e}$$

c) En el intervalo entre 1 y 5 la función es $f(x)=\dfrac{1}{4x-3}$.

Calculo primero la integral indefinida.

$$\int\sqrt{f(x)}dx=\int\sqrt{\frac{1}{4x-3}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{4x-3}}dx=\int(4x-3)^{-1/2}=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ t=4x-3\to dt=4dx\\ dx=\frac{1}{4}dt\end{array}\right\}=$$

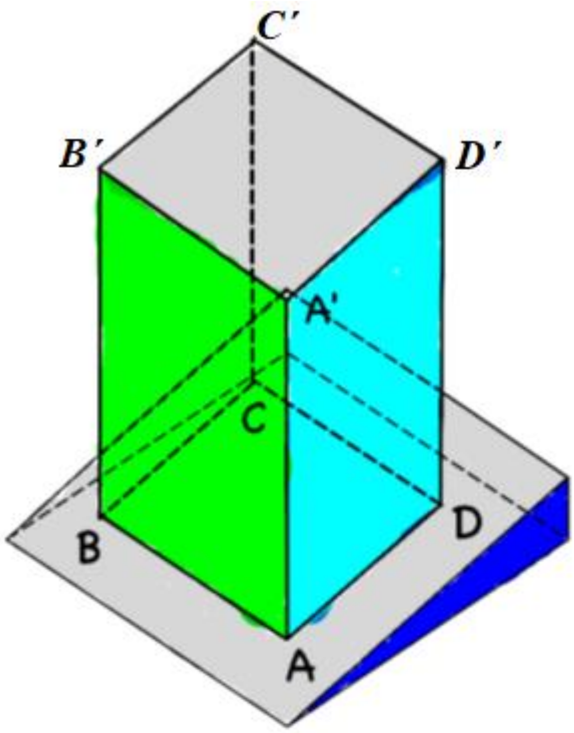
$$=\int t^{-1/2}\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}\left(\frac{t^{1/2}}{1/2}\right)=\frac{1}{2}t^{1/2}=\frac{1}{2}(4x-3)^{1/2}=\frac{1}{2}\sqrt{4x-3}$$

La aplico al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_1^5\sqrt{f(x)}dx=\int_1^5\sqrt{\frac{1}{4x-3}}dx=\left[\frac{1}{2}\sqrt{4x-3}\right]_1^5=\frac{1}{2}\sqrt{20-3}-\frac{1}{2}\sqrt{4-3}=\frac{1}{2}\sqrt{17}-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Un depósito en forma de paralelepípedo, de base cuadrada *ABCD*, apoya completamente su base sobre una rampa en un local, quedando una arista superior pegada al techo. Se considera un sistema de ejes, con los semiejes positivos en un rincón del local. La arista inferior paralela a la que se apoya en el techo y no en su misma cara, tiene vértices de coordenadas *A(1, 1, 1)* y *B(1, 3, 1)*. La ecuación del plano que contiene a la rampa es $4x-3z=1$ y el vértice sobre el punto A es *A′(1, 1, 6)*. Se pide:
a) (0.5 puntos) Calcular una ecuación del plano que contiene a las aristas AB y AA′.
b) (1 punto) Calcular los otros dos vértices, C y D, de la base.
c) (1 punto) Calcular el volumen del depósito.

La situación planteada es la del dibujo, siendo la arista que se apoya en el techo la C´D´, la rampa contiene a los puntos A, B, C y D.



a) El plano π´ que contiene a las aristas AB y AA′ es el plano de color verde del dibujo. Dicho plano tiene como vectores directores los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AA´}$.

$$\pi´\equiv\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1,3,1)-(1,1,1)=(0,2,0)\\ \overrightarrow{AA´}=(1,1,6)-(1,1,1)=(0,0,5)\\ A(1,1,1)\in\pi´\end{cases}\Rightarrow \pi´\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10(x-1)=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow \boxed{\pi´\equiv x-1=0}$$

b) Averiguamos las coordenadas de los puntos *C (a, b, c)* y *D (d, e, f)*.
El vector $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son perpendiculares, por lo que su producto escalar es cero.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,2,0)\\ \overrightarrow{AD}=(a,b,c)-(1,1,1)=(a-1,b-1,c-1)\\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{array}\right\}\Rightarrow(0,2,0)(a-1,b-1,c-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(b-1)=0\Rightarrow b=1\Rightarrow D(a,1,c)$$

El vector $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son perpendiculares, por lo que su producto escalar es cero.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,2,0)\\ \overrightarrow{BC}=(d,e,f)-(1,3,1)=(d-1,e-3,f-1)\\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{array}\right\}\Rightarrow(0,2,0)(d-1,e-3,f-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(e-3)=0\Rightarrow e=3\Rightarrow C(e,3,f)$$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son iguales y tienen las mismas coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,2,0)\\ \overrightarrow{DC}=(e,3,f)-(a,1,c)=(e-a,2,f-c)\\ \overrightarrow{AB}\,||\,\overrightarrow{DC}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}e-a=0\\ f-c=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}e=a\\ f=c\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}C(a,3,c)\\ D(a,1,c)\end{array}\right\}$$

Los puntos C y D pertenecen al plano de la rampa, por lo que satisfacen su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l}Rampa\to 4x-3z=1\\ C(a,3,c)\\ D(a,1,c)\end{array}\right\}\Rightarrow 4a-3c=1\Rightarrow 4a=1+3c\Rightarrow a=\frac{1+3c}{4}$$

El lado AB y el BC tienen la misma longitud.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,2,0)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\\ \overrightarrow{BC}=(a,3,c)-(1,3,1)=(a-1,0,c-1)\to\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(a-1)^2+(c-1)^2}\\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|\end{array}\right\}\Rightarrow 2=\sqrt{(a-1)^2+(c-1)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4=(a-1)^2+(c-1)^2\Rightarrow 4=a^2-2a+1+c^2-2c+1\Rightarrow 2=a^2-2a+c^2-2c$$

Combinamos las dos ecuaciones y resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l}2=a^2-2a+c^2-2c\\ a=\dfrac{1+3c}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow 2=\left(\frac{1+3c}{4}\right)^2-2\frac{1+3c}{4}+c^2-2c\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2=\frac{1+9c^2+6c}{16}-\frac{1+3c}{2}+c^2-2c\Rightarrow 32=1+9c^2+6c-(8+24c)+16c^2-32c\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25c^2-50c-39=0 \Rightarrow c=\frac{50\pm\sqrt{50^2+3900}}{50}=\frac{50\pm\sqrt{6400}}{50}=\begin{cases} c=\dfrac{50+80}{50}=\dfrac{130}{50}=\dfrac{13}{5} \\ \dfrac{50-80}{50}=\dfrac{-30}{50}=\dfrac{-3}{5}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{1+3\frac{13}{5}}{4}=\frac{\frac{44}{5}}{4}=\frac{44}{20}=\frac{11}{5}$$

Se ha descartado el valor de c negativo pues las los semiejes positivos están en un rincón del local y esas coordenadas negativas serían la opción de que los puntos C y D estuviesen bajo el suelo del local, situándolos rampa abajo y nuestros puntos están rampa arriba.

Los puntos buscados tienen coordenadas $C\left(\frac{11}{5},3,\frac{13}{5}\right)$ y $D\left(\frac{11}{5},1,\frac{13}{5}\right)$

c) El volumen se calcula como el valor absoluto del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AA'}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,2,0)\\ \overrightarrow{AC}=\left(\frac{11}{5},3,\frac{13}{5}\right)-(1,1,1)=\left(\frac{6}{5},2,\frac{8}{5}\right)\\ \overrightarrow{AA'}=(1,1,6)-(1,1,1)=(0,0,5)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}\right]=\begin{vmatrix}0&2&0\\ \frac{6}{5}&2&\frac{8}{5}\\ 0&0&5\end{vmatrix}=12$$

$$Volumen=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}\right]\right|=\boxed{12u^3}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Una empresa complementa el sueldo de sus empleados según la consecución de ciertos objetivos valorados en función de una puntuación que sigue una distribución normal N(100, 35). Se pide:
a) (0.75 puntos) Calcular el porcentaje de empleados con una puntuación comprendida entre 100 y 140.
b) (0.75 puntos) Hallar la probabilidad de que un trabajador obtenga una puntuación inferior a 95 puntos.
c) (1 punto) Determinar la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos si el 75.17% de la plantilla ha recibido dicho incentivo.

X= "Puntuación de los empleados" → $X \equiv N(100, 35)$

a) Calculamos la probabilidad de que un empleado tenga la puntuación pedida.

$$P(100 \leq X \leq 140) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ \dfrac{X-100}{35} = Z \\ Z \equiv N(0,1) \end{array} \right\} = P\left(\frac{100-100}{35} \leq \frac{X-100}{35} \leq \frac{140-100}{35} \right) =$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.14) = P(Z \leq 1.14) - P(Z \leq 0) = \{\text{Buscamos en la tabla N}(0,1)\} =$$
$$= 0.8729 - 0.5 = 0.3729$$

Por lo que el porcentaje de empleados con una puntuación comprendida entre 100 y 140 es del 37.29 %.

b)

$$P(X \leq 95) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ \dfrac{X-100}{35} = Z \end{array} \right\} = P\left(\frac{X-100}{35} \leq \frac{95-100}{35} \right) = P(Z \leq -0.14) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.14) = 1 - 0.5557 = \boxed{0.4443}$$

c) Sea a la puntuación superada por el 75.17% de los trabajadores.

$$P(X > a) = 0.7517 \Rightarrow P\left(\frac{X-100}{35} > \frac{a-100}{35} \right) = 0.7517 \Rightarrow P\left(Z > \frac{a-100}{35} \right) = 0.7517 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < -\frac{a-100}{35} \right) = 0.7517 \Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla el valor } 0.7517\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{a-100}{35} = 0.68 \Rightarrow -a + 100 = 23.8 \Rightarrow a = 100 - 23.8 = 76.2$$

La puntuación mínima necesaria es de 76.2 puntos.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se verifica que $A^t B = C$.
b) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de m para los que existe la inversa de AC y calcular para $m = 0$ la inversa de AC.
c) (0.75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se cumple que $B^2 = B - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

a)

$$A=\begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} m & -2 \\ -1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}$$

$$A^t B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} m & -2 \\ -1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2m^2-2 & -m \\ -2m & 1 \\ 2m+m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2m^2-2=0 \to m^2=1 \Rightarrow m=\sqrt{1}=\pm 1 \\ -m=-1 \Rightarrow m=1 \\ -2m=-2 \to m=1 \\ 3m=3 \to m=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{m=1}$$

b) Para que exista la inversa de AC debe tener determinante no nulo.

$$AC=\begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & -m-1-1 \\ 3m & 2-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -m-2 \\ 3m & 2-m \end{pmatrix}$$

$$|AC| = \begin{vmatrix} 5 & -m-2 \\ 3m & 2-m \end{vmatrix} = 10-5m+3m^2+6m = 3m^2+m+10$$

$$|AC|=0 \Rightarrow 3m^2+m+10=0 \Rightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-120}}{6} = \frac{-1\pm\sqrt{-119}}{6} = \text{No existe}$$

El determinante de AC nunca se anula y por tanto tiene inversa para cualquier valor de m.

Para $m = 0$ la matriz AC tiene inversa. La calculamos.

$$AC=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |AC| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

$$(AC)^{-1} = \frac{Adj\left((AC)^t\right)}{|AC|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}{10} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

c)

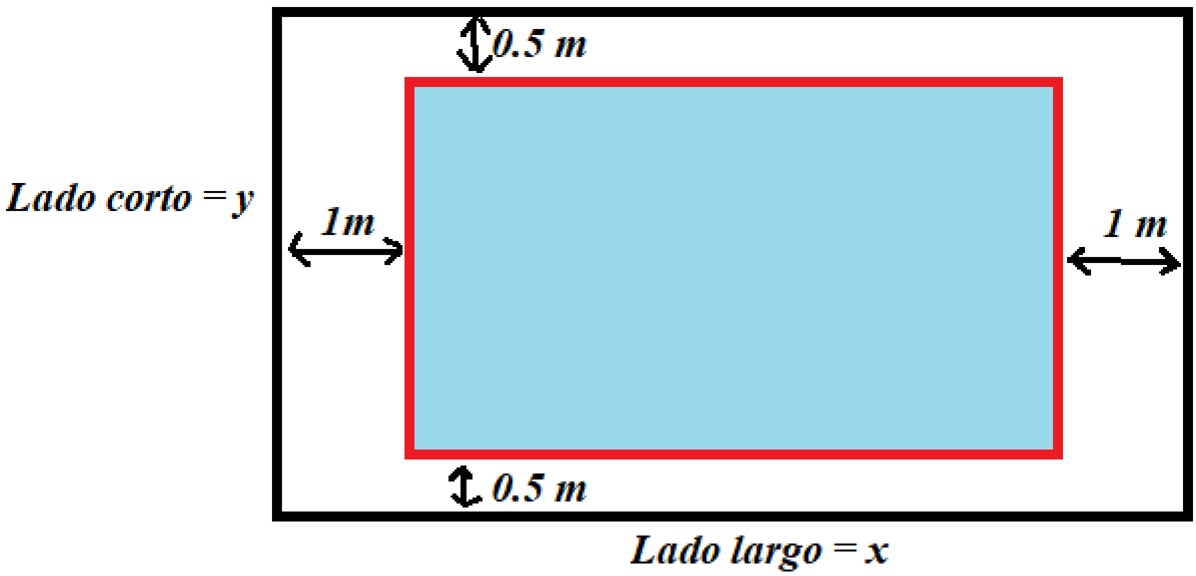
$$B^2 = B - I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4m^2 - 1 & -2m \\ 2m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4m^2 - 1 = 2m - 1 \\ -2m = -1 \\ 2m = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4m^2 - 2m = 0 \to 2m(2m-1) = 0 \to \begin{cases} m = 0 \\ 2m - 1 = 0 \to m = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ m = \dfrac{1}{2} \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}}$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Un ayuntamiento ha dividido en parcelas parte del terreno municipal no urbanizable y lo ha cedido a los vecinos para su cultivo. Uno de los vecinos ha decidido que en su parcela asignada utilizará como huerto una zona rectangular de 72 metros cuadrados, dejando el resto para plantar frutales e instalar una caseta donde guardar las herramientas necesarias. La zona de huerto estará dividida en dos partes: la parte dedicada al cultivo de hortalizas será un rectángulo interior separado de los lados que delimitan el huerto. La separación será de medio metro entre cada uno de los lados de mayor longitud y un metro entre cada uno de los lados de menor longitud. La franja que delimita la zona de hortalizas la dedicará al cultivo de flores y plantas aromáticas.
a) (2 puntos) Calcule las dimensiones del huerto para que el área de la zona para el cultivo de hortalizas sea máxima.
b) (0.5 puntos) Calcule el área de la zona de cultivo de hortalizas.

a) La situación planteada es la del dibujo inferior.



El área del rectángulo grande es de 72 m^2. El área del rectángulo pequeño de color azul es la que queremos maximizar.

Tenemos que $\text{Área rectángulo grande} = xy = 72 \Rightarrow y = \frac{72}{x}$.

Los lados del rectángulo pequeño miden $x-2$ e $y-2\cdot 0.5 = y-1$, por lo que su área se expresa como $A(x,y) = (x-2)(y-1)$.

Sustituimos el valor de y en función del valor de x:

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y) = (x-2)(y-1) \\ y = \frac{72}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow A(x) = (x-2)\left(\frac{72}{x}-1\right) = x\frac{72}{x} - x - \frac{144}{x} + 2 = 74 - x - \frac{144}{x}$$

Derivamos e igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos.

$$\left.\begin{array}{r} A'(x)=-1+\dfrac{144}{x^2} \\ A'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -1+\frac{144}{x^2}=0 \Rightarrow \frac{144}{x^2}=1 \Rightarrow 144=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{144}=12$$

Hallamos la segunda derivada y sustituimos el valor *x = 12* para comprobar si es un máximo.

$$A'(x)=-1+\frac{144}{x^2}=-1+144x^{-2} \Rightarrow A''(x)=0+144(-2)x^{-3}=-\frac{288}{x^3}$$

$$A''(12)=-\frac{288}{1728}<0$$

Por lo que para *x = 12* el área dedicada a hortalizas es máxima.

El huerto debe medir 12 metros en su lado largo e $y=\frac{72}{12}=6$ metros en su lado corto.

b) El área de la zona de cultivo de hortalizas (zona azul) es de $A(12)=74-12-\frac{144}{12}=50$ metros cuadrados.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se consideran las siguientes rectas:
• r, la recta que pasa por el punto P(1, 1, 2) y tiene como vector director $\vec{u}=(0,1,2)$;
• s, la recta de ecuaciones $s\equiv\begin{cases}x+y-4=0\\x-2z+2=0\end{cases}$;
• t, la recta paralela a s que contiene al punto P.
a) (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de r y s.
b) (0.75 puntos) Calcule el ángulo que forman las rectas r y t.
c) (1 punto) Calcule la proyección ortogonal del punto P sobre la recta s.

a) Hallamos un punto y un vector director de la recta s.

$$s\equiv\begin{cases}x+y-4=0\\x-2z+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=4-x\\-2z=-2-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=4-x\\z=1+\dfrac{1}{2}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\lambda\\y=4-\lambda\\z=1+\dfrac{1}{2}\lambda\end{cases}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}Q_s(0,4,1)\\\overrightarrow{v_s}=\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas r y s no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_s}=\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)\\\vec{u}=(0,1,2)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{0}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{1/2}{2}$$

Por este motivo las rectas r y s no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan.

Estudiamos el valor del producto mixto de los vectores directores de las dos rectas y un tercer vector que une un punto de una recta con otro punto de la otra recta. Elegimos $\vec{u}=(0,1,2)$, $\overrightarrow{v_s}=\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)$ y $\overrightarrow{PQ_s}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ_s}=(0,4,1)-(1,1,2)=(-1,3,-1)\\\vec{u}=(0,1,2)\\\overrightarrow{v_s}=\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{PQ_s},\vec{u},\overrightarrow{v_s}\right]=\begin{vmatrix}-1&3&-1\\0&1&2\\1&-1&1/2\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}+6-(-1+2)=4.5\neq0$$

Al ser distinto de cero las rectas se cruzan (no tienen ningún punto en común).

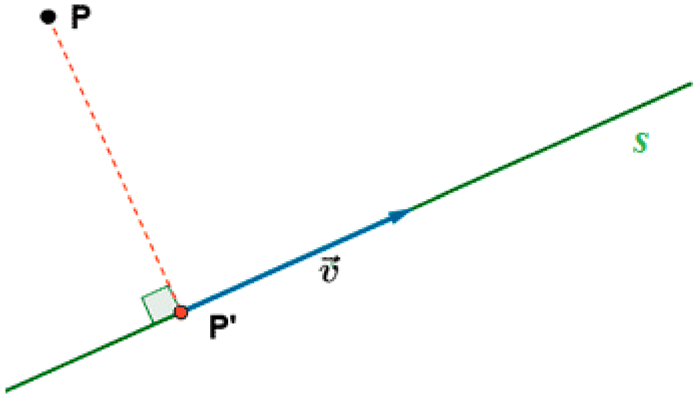
b) La recta t es paralela a la recta s y tiene el mismo vector director $\overrightarrow{v_t}=\overrightarrow{v_s}=\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

El ángulo formado por las rectas r y t es el ángulo formado por sus vectores directores $\vec{u}=(0,1,2)$ y $\overrightarrow{v_t}=\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

$$\cos(r,t)=\cos\left(\vec{u},\vec{v_t}\right)=\frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v_t}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v_t}\right|}=\frac{(0,1,2)\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{-1+1}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{9}{4}}}=0\Rightarrow\boxed{(r,t)=90^{\circ}}$$

Las rectas r y t forman un ángulo de 90º.

c) Buscamos el punto P´ del dibujo.



Hallamos el plano π perpendicular a la recta s que pasa por el punto P. El punto de corte de recta y plano será el punto P´.

El plano π perpendicular a la recta s que pasa por el punto P tiene como vector normal el director de la recta s.

$$\left.\begin{array}{l}P(1,1,2)\in\pi\\ \vec{n}=\vec{v_s}=\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P(1,1,2)\in\pi\\ \pi\equiv x-y+\frac{1}{2}z+D=0\end{array}\right\}\Rightarrow 1-1+\frac{1}{2}2+D=0\Rightarrow 1+D=0\Rightarrow D=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\pi\equiv x-y+\frac{1}{2}z-1=0$$

Hallamos el punto P´ de corte de la recta s y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv x-y+\frac{1}{2}z-1=0\\ s\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=4-\lambda\\ z=1+\frac{1}{2}\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda-(4-\lambda)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\lambda\right)-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda-4+\lambda+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\lambda-1=0\Rightarrow\frac{9}{4}\lambda-\frac{9}{2}=0\Rightarrow 9\lambda-18=0\Rightarrow\lambda=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=4-2=2\\ z=1+\frac{1}{2}2=2\end{cases}\Rightarrow\boxed{P'(2,2,2)}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sabiendo que $P(A\cup B)=\frac{4}{5}, P(\overline{A})=\frac{9}{20}$ y $P(\overline{B})=\frac{7}{20}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular razonadamente $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

b) (0.75 puntos) Calcular razonadamente $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

c) (0.5 puntos) Calcular razonadamente $P(A-B)$.

d) (0.5 puntos) Determinar si A y B son sucesos independientes.

NOTA: $\overline{A}$ y $A-B$ denotan, respectivamente, el suceso contrario de A y el suceso diferencia de A y B.

Obtenemos la probabilidad de los sucesos A, B y $A\cap B$.

- $P(\overline{A})=\frac{9}{20}\Rightarrow P(A)=1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$
- $P(\overline{B})=\frac{7}{20}\Rightarrow P(B)=1-\frac{7}{20}=\frac{13}{20}$
- $\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=\frac{4}{5} \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{4}{5}=\frac{11}{20}+\frac{13}{20}-P(A\cap B)\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{24}{20}-\frac{4}{5}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

a) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{4}{5}=\boxed{\frac{1}{5}}$

b) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-\frac{2}{5}=\boxed{\frac{3}{5}}$

c) $P(A-B)=P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=\frac{11}{20}-\frac{8}{20}=\boxed{\frac{3}{20}}$

d) Para que A y B sean sucesos independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=\frac{8}{20} \\ P(A)\cdot P(B)=\frac{11}{20}\cdot\frac{13}{20}=\frac{143}{400} \end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{8}{20}=\frac{160}{400}\neq\frac{143}{400}=P(A)\cdot P(B)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos A y B no son independientes.