PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:	**a)** Duración: 1 hora y 30 minutos **b)** Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior. **c)** En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada. **d)** Todos los resultados deben estar suficientemente justificados. **e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Con el fin de recaudar dinero para el viaje de fin de curso, los alumnos de un instituto van a poner a la venta dos tipos de bolsas de merienda. El primer tipo contendrá dos bocadillos, un refresco y una pieza de fruta y el segundo tipo tendrá un bocadillo, un refresco y dos piezas de fruta. Por cada bolsa del primer tipo cobrarán 6 euros y por las del segundo tipo 5 euros. Sabiendo que disponen de 120 bocadillos, 70 refrescos y 110 piezas de fruta y que se tiene garantizada la venta de todas las bolsas, ¿cuántas convendría preparar de cada tipo para que la cantidad de dinero obtenida por su venta sea máxima y a cuánto asciende la misma?
¿Es posible que vendan 40 bolsas de cada tipo? ¿Hay alguna posibilidad de que el importe de las ventas sea de 410 euros?

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) **(0.7 puntos)** Determine para qué valores de *a* tiene inversa la matriz *A*.
b) **(1 punto)** Para *a = 2*, calcule la matriz inversa de *A*.
c) **(0.8 puntos)** Para *a = 0*, resuelva la ecuación matricial $X\cdot A^{-1}-B\cdot B^{t}=I_3$.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.2 puntos)** Se considera la función $f(x)=ax^2+bx+3$. Calcule los valores de *a* y *b*, sabiendo que la gráfica de *f* pasa por el punto (2, 3) y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en dicho punto es *m = –2*.
b) **(1.3 puntos)** Represente gráficamente la función $g(x)=-x^2+6x-5$ y calcule el área comprendida entre la gráfica de la función g, el eje de abscisas y las rectas *x = 2* y *x = 4*.

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & si \;\; x\leq 0 \\ \dfrac{1}{1-x} & si \;\; x>0 \end{cases}$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y derivabilidad de *f* en $x = 0$.
b) **(1 punto)** Estudie la monotonía y curvatura de *f* en su dominio.
c) **(0.5 puntos)** Calcule las ecuaciones de las asíntotas de *f*.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Se han mezclado 90 llaves electrónicas de apertura de un determinado garaje, con apariencia idéntica, de las cuales 60 funcionan correctamente y 30 no funcionan. Se eligen al azar 2 de las 90 llaves.

a) **(0.7 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que las dos llaves elegidas abran la puerta del garaje?
b) **(0.8 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de poder abrir el garaje con alguna de ellas?
c) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que una de las llaves elegidas funcione correctamente y la otra no?

EJERCICIO 6

Una empresa almacena el mismo número de latas de refresco de cola, naranja y limón. De las 30 000 latas de refresco almacenadas, se sabe que 1 800 latas de cola, 2 400 de naranja y 3 000 de limón caducan en 2021.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que una lata elegida al azar caduque en 2021?
b) **(1 punto)** Si se ha elegido al azar una lata que no caduca en 2021, ¿cuál es la probabilidad de que sea de cola?

BLOQUE D

EJERCICIO 7

El precio de venta al público del kilogramo de frambuesas sigue una ley Normal de media desconocida y varianza 9. En una localidad se eligen 10 comercios de manera aleatoria, obteniéndose los siguientes precios en euros:

12.3 10 9.1 11 10.5 11.8 9.9 11.5 10.9 13

a) **(0.5 puntos)** ¿Qué distribución siguen las medias de las muestras de tamaño 10?
b) **(1 punto)** Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al 97% para el precio medio del kilogramo de frambuesas.
c) **(1 punto)** Con el mismo nivel de confianza, calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error cometido al estimar el precio medio del kilogramo de frambuesas sea menor a 1.5 euros.

EJERCICIO 8

Se sabe que la longitud, en centímetros, de una especie de estrella de mar en una determinada zona sigue una ley Normal con desviación típica 3. Para estimar la longitud media de esa especie de estrella de mar, se extrae una muestra de tamaño 36 y se obtiene el intervalo de confianza (6.04, 8) al 95%. Se pide:

a) **(0.5 puntos)** Calcule la media muestral.
b) **(0.5 puntos)** Calcule el error de estimación máximo cometido.
c) **(1 punto)** Si aumentamos el tamaño muestral a 49, ¿qué efecto produce sobre el error máximo cometido? Calcule este error.
d) **(0.5 puntos)** Si aumentamos el nivel de confianza, ¿qué efecto produce sobre el error de estimación máximo? Justifique la respuesta.

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1
(2.5 puntos) Con el fin de recaudar dinero para el viaje de fin de curso, los alumnos de un instituto van a poner a la venta dos tipos de bolsas de merienda. El primer tipo contendrá dos bocadillos, un refresco y una pieza de fruta y el segundo tipo tendrá un bocadillo, un refresco y dos piezas de fruta. Por cada bolsa del primer tipo cobrarán 6 euros y por las del segundo tipo 5 euros. Sabiendo que disponen de 120 bocadillos, 70 refrescos y 110 piezas de fruta y que se tiene garantizada la venta de todas las bolsas, ¿cuántas convendría preparar de cada tipo para que la cantidad de dinero obtenida por su venta sea máxima y a cuánto asciende la misma?
¿Es posible que vendan 40 bolsas de cada tipo? ¿Hay alguna posibilidad de que el importe de las ventas sea de 410 euros?

Llamemos "x" al número de bolsas de merienda del primer tipo e "y" al número de bolsas de merienda del segundo tipo.
Realizamos una tabla con los datos del ejercicio.

	Número de bocadillos	Número de refrescos	Número de piezas de fruta	Dinero obtenido en la venta
Número de bolsas de merienda del tipo 1 (x)	2x	x	x	6x
Número de bolsas de merienda del tipo 2 (y)	y	y	2y	5y
TOTALES	$2x+y$	$x+y$	$x+2y$	$6x+5y$

Establecemos las restricciones del problema.

"Disponen de 120 bocadillos, 70 refrescos y 110 piezas de fruta" → $2x+y\leq 120$; $x+y\leq 70$; $x+2y\leq 110$.

Además, el número de bolsas es positivo → $x\geq 0;\quad y\geq 0$

El conjunto de las restricciones de este problema de programación lineal es:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y\leq 120 \\ x+y\leq 70 \\ x+2y\leq 110 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Y la función objetivo que deseamos maximizar es el dinero obtenido por la venta de todas las bolsas de merienda $B(x,y)=6x+5y$.

Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones y que delimitan la región factible.

$2x + y = 120$

x	$y = 120 - 2x$
60	0
50	20

$x + y = 70$

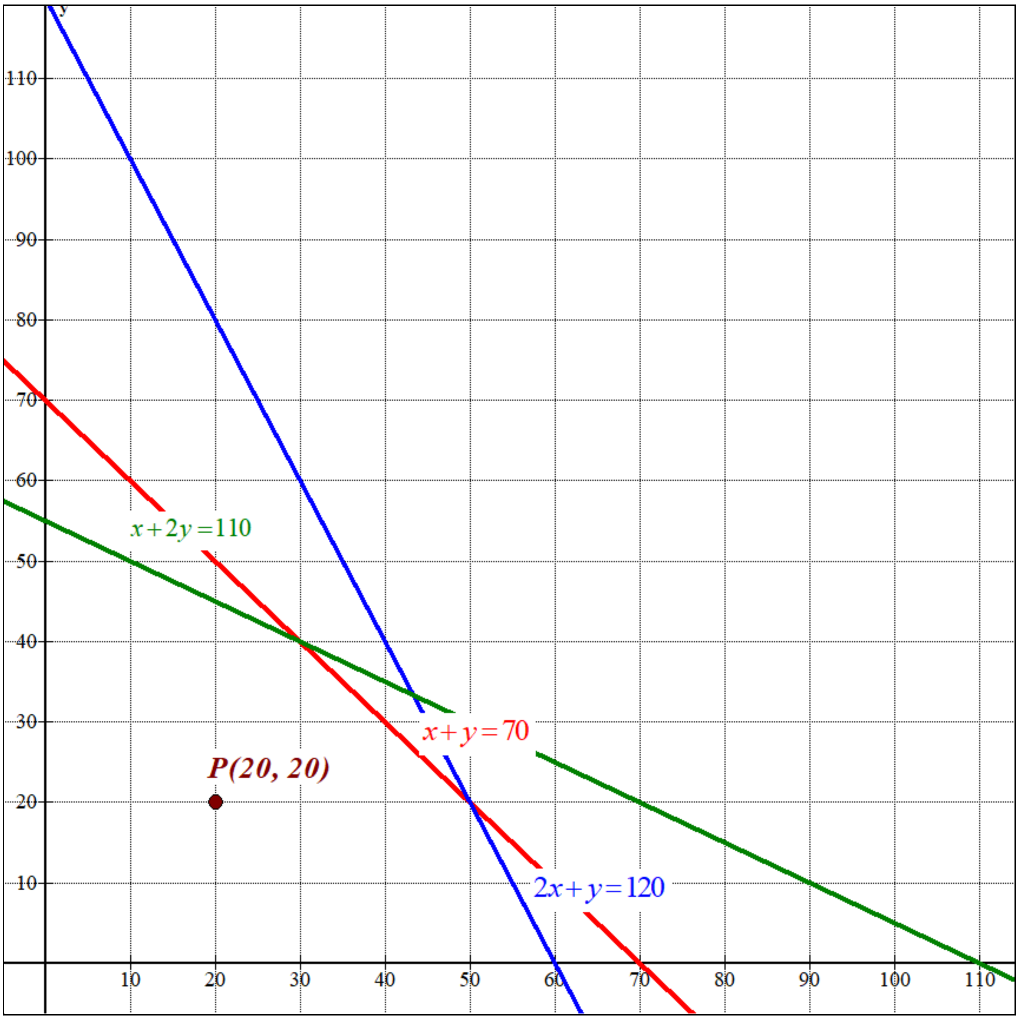
x	$y = 70 - x$
30	40
50	20

$x + 2y = 110$

x	$y = \dfrac{110 - x}{2}$
0	55
30	40

$x \geq 0;\ y \geq 0$

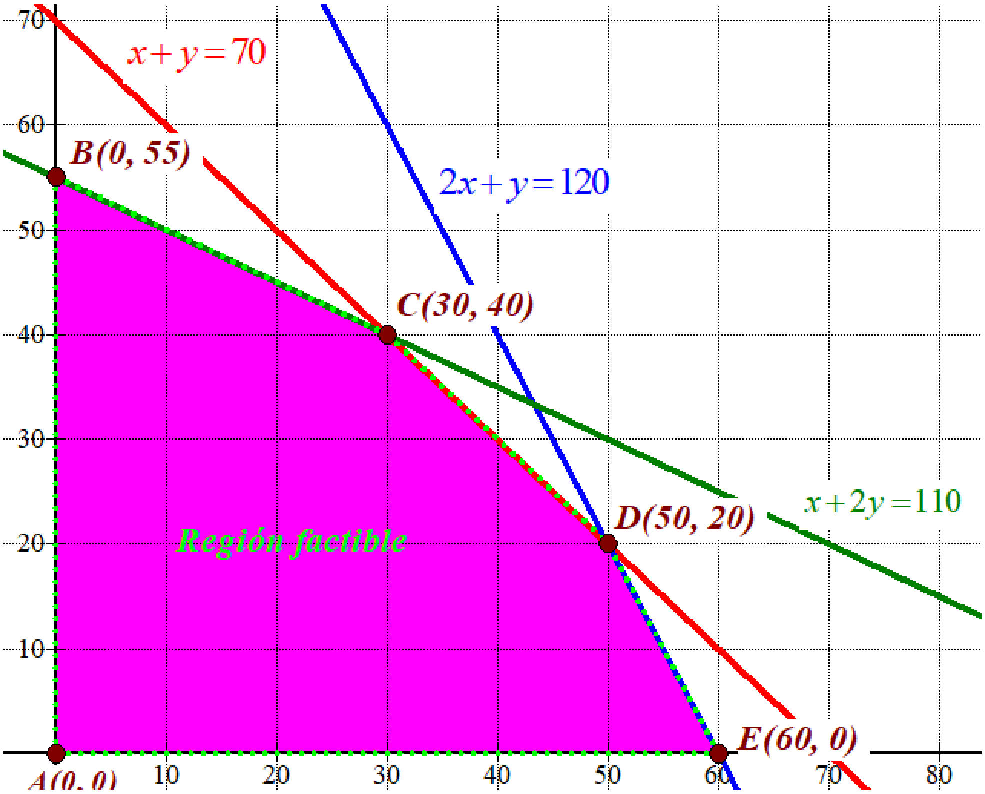
Primer cuadrante



Comprobamos si el punto P(20, 20) cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 20 + 20 \leq 120 \\ 20 + 20 \leq 70 \\ 20 + 2\cdot 20 \leq 110 \\ 20 \geq 0 \\ 20 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Como se cumplen todas las restricciones la región factible es la zona coloreada de rosa del dibujo inferior.



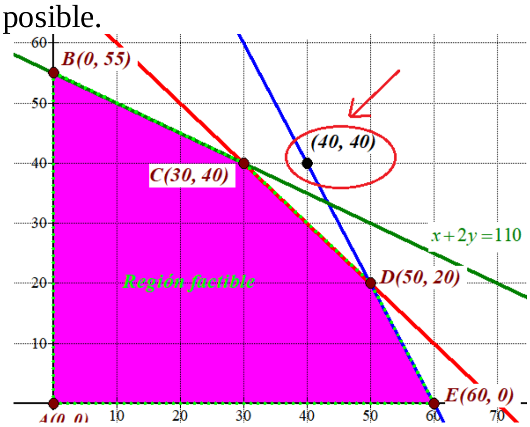
Valoramos la función $B(x,y)=6x+5y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

- **A(0, 0)** → $B(0,0)=0$
- **B(0, 55)** → $B(0,55)=0+5\cdot 55=275$
- **C(30, 40)** → $B(30,40)=180+200=380$
- **D(50, 20)** → $B(50,20)=300+100=400 \rightarrow$ ¡*Máximo*!
- **E(60, 0)** → $B(60,0)=360+0=360$

El valor máximo se alcanza en el vértice D(50, 20) siendo este valor máximo igual a 400.
El máximo beneficio en las ventas se obtiene haciendo 50 bolsas de merienda del primer tipo y 20 del segundo tipo. Este beneficio máximo es de 400 €.

¿Es posible que vendan 40 bolsas de cada tipo?

El punto (40, 40) está situado fuera de la región factible por lo que no satisface todas las restricciones y esto no es posible.



¿Hay alguna posibilidad de que el importe de las ventas sea de 410 euros?

No es posible. 410 € es un importe superior al máximo posible de las ventas, que es de 400 €.

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) **(0.7 puntos)** Determine para qué valores de *a* tiene inversa la matriz *A*.
b) **(1 punto)** Para *a = 2*, calcule la matriz inversa de *A*.
c) **(0.8 puntos)** Para *a = 0*, resuelva la ecuación matricial $X\cdot A^{-1}-B\cdot B^t=I_3$.

a) Para que la matriz *A* tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{vmatrix}=4a-3-3+2a^2=2a^2+4a-6$$

$$|A|=0\Rightarrow 2a^2+4a-6=0\Rightarrow a^2+2a-3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(-3)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases} a=\dfrac{-2+4}{2}=1 \\ a=\dfrac{-2-4}{2}=-3 \end{cases}$$

Para cualquier valor de *a* distinto de –3 y 1 la matriz *A* tiene inversa.

b) Para *a = 2* la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}=8-3-3+8=10\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}}{10}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 5 & -5 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & -1/5 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 3/10 & 3/10 & -2/5 \end{pmatrix}}$$

c) Para $a = 0$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Despejamos X en la ecuación $X \cdot A^{-1} - B \cdot B^t = I_3$.

$$X \cdot A^{-1} - B \cdot B^t = I_3 \Rightarrow X \cdot A^{-1} = B \cdot B^t + I_3 \Rightarrow X \cdot A^{-1} A = \left(B \cdot B^t + I_3\right) A \Rightarrow X = \left(B \cdot B^t + I_3\right) A$$

Calculamos la expresión de la matriz X.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B^t + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(B \cdot B^t + I_3\right) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+9 & 3-2 & -3-2 \\ 4+6 & 2-5 & -2-5 \\ 6+18 & 3-2 & -3-2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 15 & 1 & -5 \\ 10 & -3 & -7 \\ 24 & 1 & -5 \end{pmatrix}}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.2 puntos)** Se considera la función $f(x)=ax^2+bx+3$. Calcule los valores de a y b, sabiendo que la gráfica de *f* pasa por el punto (2, 3) y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en dicho punto es *m = –2*.

b) **(1.3 puntos)** Represente gráficamente la función $g(x)=-x^2+6x-5$ y calcule el área comprendida entre la gráfica de la función g, el eje de abscisas y las rectas *x = 2* y *x = 4*.

a) Si la gráfica de *f* pasa por el punto (2, 3) significa que *f(2) = 3*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^2+bx+3 \\ f(2)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3=a\cdot 2^2+2b+3 \Rightarrow 0=4a+2b \Rightarrow \boxed{2a+b=0}$$

Si la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en *x = 2* es *m = –2* entonces la derivada en *x = 2* vale –2 → $f´(2)=-2$.

$$\left.\begin{array}{l} f´(x)=2ax+b \\ f´(2)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow -2=2a\cdot 2+b \Rightarrow \boxed{4a+b=-2}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 2a+b=0 \\ 4a+b=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-2a \\ 4a+b=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 4a-2a=-2 \Rightarrow 2a=-2 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-2}{2}=-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b=-2(-1)=2}$$

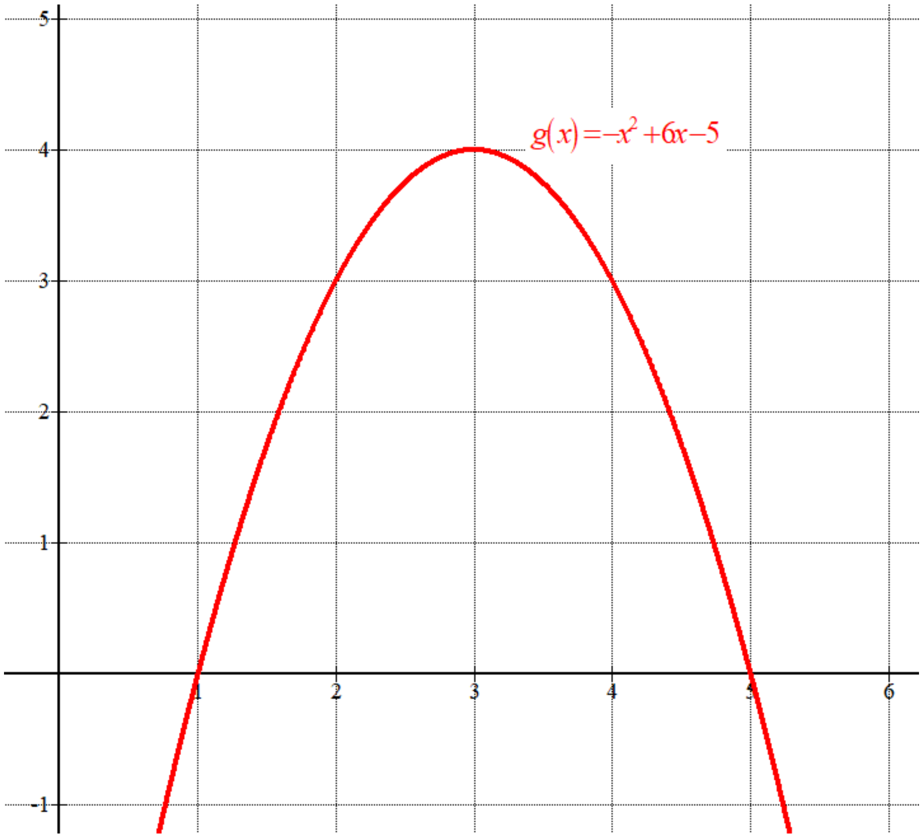
Los valores buscados son $a=-1$ y $b=2$.

b) La gráfica de la función $g(x)=-x^2+6x-5$ es una parábola. Hallamos su vértice y una tabla de valores y la representamos.

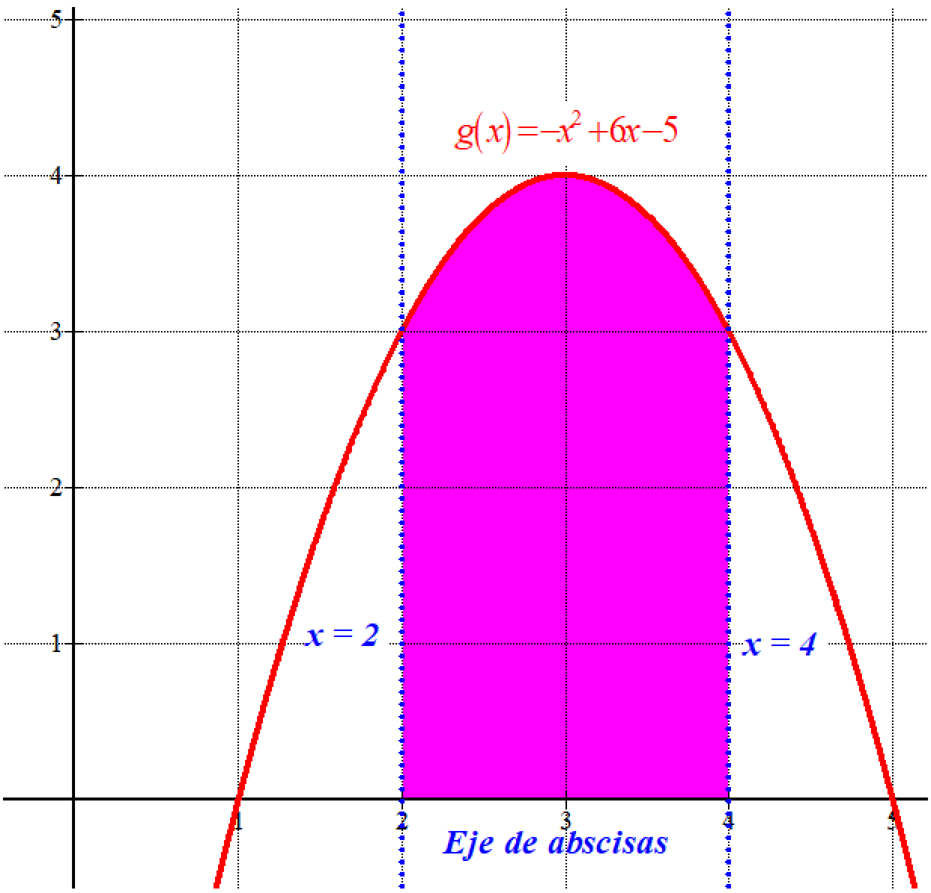
$$\left.\begin{array}{l} g´(x)=-2x+6 \\ g´(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x+6=0 \Rightarrow -x+3=0 \Rightarrow x=3$$

Obtenemos una tabla de valores.

x	$y=-x^2+6x-5$
1	0
2	3
3	4 → Vértice
4	3
5	0



El área que nos piden calcular es la del dibujo inferior.



Si contamos cuadraditos este recinto tiene un área aproximada entre 7 y 8 unidades cuadradas. Calculamos su valor exacto usando integrales.

$$\acute{A}rea = \int_2^4 -x^2 + 6x - 5dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_2^4 =$$

$$= \left[-\frac{4^3}{3} + 3 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 \right] - \left[-\frac{2^3}{3} + 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 \right] =$$

$$= -\frac{64}{3} + 48 - 20 + \frac{8}{3} - 12 + 10 = 26 - \frac{56}{3} = \boxed{\frac{22}{3} \approx 7.33u^2}$$

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & si \ \ x\leq 0 \\ \dfrac{1}{1-x} & si \ \ x>0 \end{cases}$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y derivabilidad de *f* en *x = 0*.
b) **(1 punto)** Estudie la monotonía y curvatura de *f* en su dominio.
c) **(0.5 puntos)** Calcule las ecuaciones de las asíntotas de *f*.

a) Si *x < 0* la función es $f(x)=x^2+x+1$. Es una función polinómica y es continua y derivable.

Si *x > 0* la función es $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$. La función no existe para *x = 1* y por tanto no es continua, ni derivable en *x = 1*. En el resto de valores es continua y derivable.

Si *x = 0*, comprobamos la continuidad en dicho valor.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^2+0+1=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2+x+1=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1}{1}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1$$

La función es continua en *x = 0*.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.
La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0,1\}$ y su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & si \ \ x<0 \\ \dfrac{0(1-x)-(-1)(1)}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{(1-x)^2} & si \ \ x>0 \text{ y } x\neq 1 \end{cases}$$

Comprobamos la derivabilidad en *x = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x+1=1 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{1^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+)=1$$

La función es derivable en *x = 0*.

Resumiendo: La función es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$.

b) Estudiamos la monotonía usando la derivada de la función.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & si \;\; x\le 0 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & si \;\; x>0 \text{ y } x\ne 1 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \to 2x=-1 \to x=\dfrac{-1}{2}\in(-\infty,0] \\ \dfrac{1}{(1-x)^2}=0 \to 1=0 \text{ ¡Im } posible! \end{cases}$$

El único punto crítico de la función es $x=\dfrac{-1}{2}$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=\dfrac{-1}{2}$, *x = 0, x = 1.*

- En $\left(-\infty,\dfrac{-1}{2}\right)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f'(-1)=2(-1)+1=-1<0$. La función decrece en $\left(-\infty,\dfrac{-1}{2}\right)$
- En $\left(\dfrac{-1}{2},0\right)$ tomamos *x = –0.1* y la derivada vale $f'(-0.1)=2(-0.1)+1=0.8>0$. La función crece en $\left(\dfrac{-1}{2},0\right)$
- En $(0,1)$ tomamos *x = 0.5* y la derivada vale $f'(0.5)=\dfrac{1}{(1-0.5)^2}=\dfrac{1}{0.25}>0$. La función crece en $(0,1)$
- En $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{1}{(1-2)^2}=1>0$. La función crece en $(1,+\infty)$

La función decrece en $\left(-\infty,\dfrac{-1}{2}\right)$ y crece en $\left(\dfrac{-1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

Estudiamos la curvatura de la función usando la derivada segunda.

$$f''(x)=\begin{cases} 2 & si \;\; x\le 0 \\ \dfrac{-2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}=\dfrac{2}{(1-x)^3} & si \;\; x>0 \text{ y } x\ne 1 \end{cases}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2=0 \to \text{¡Im } posible! \\ \dfrac{2}{(1-x)^3}=0 \to 2=0 \to \text{ ¡Im } posible! \end{cases}$$

La derivada segunda nunca se anula.
Estudiamos el signo de la segunda derivada antes, entre y después de *x = 0, x = 1*.

- En $(-\infty,0)$ tomamos *x* = *–1* y la derivada segunda vale $f''(-1)=2>0$. La función es convexa (∪) en $(-\infty,0)$.
- En $(0,1)$ tomamos *x* = *0.5* y la derivada segunda vale $f''(0.5)=\dfrac{2}{(1-0.5)^3}=\dfrac{2}{0.125}>0$. La función es convexa (∪) en $(0,1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos *x* = *2* y la derivada segunda vale $f''(2)=\dfrac{2}{(1-2)^3}=-2<0$. La función es cóncava (∩) en $(1,+\infty)$.

Resumiendo: La función es convexa (∪) en $(-\infty,1)$ y cóncava (∩) en $(1,+\infty)$.

c) **Asíntotas verticales**. $x=a$

¿*x =1* es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{0}=\infty$$

x =1 es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{-\infty}=0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2+x+1=+\infty$$

$y=0$ es asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

No tiene pues cuando $x\to+\infty$ tiene asíntota horizontal y cuando $x\to-\infty$ es una parábola, que no tiene asíntotas.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

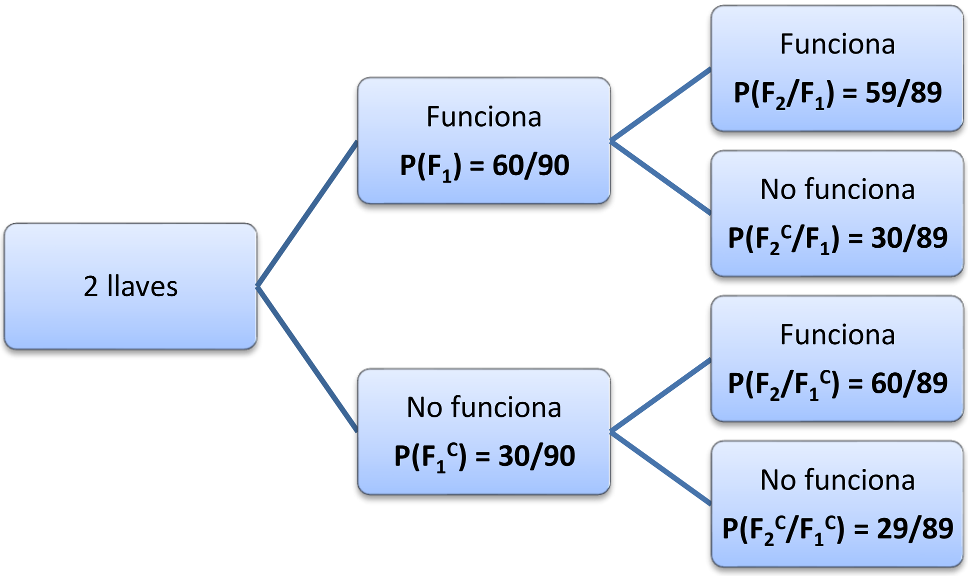
Se han mezclado 90 llaves electrónicas de apertura de un determinado garaje, con apariencia idéntica, de las cuales 60 funcionan correctamente y 30 no funcionan. Se eligen al azar 2 de las 90 llaves.

a) **(0.7 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que las dos llaves elegidas abran la puerta del garaje?

b) **(0.8 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de poder abrir el garaje con alguna de ellas?

c) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que una de las llaves elegidas funcione correctamente y la otra no?

Construimos un diagrama de árbol asociado al experimento aleatorio. Llamamos F_1 al suceso "La llave elegida en primer lugar funciona", $F1^C$ es "La llave elegida en primer lugar no funciona", F_2 al suceso "La llave elegida en segundo lugar funciona" y F_2^C al suceso "La llave elegida en segundo lugar no funciona".



a) Nos piden calcular $P(F_1 \cap F_2)$. Miramos en el árbol y esto solo ocurre en la rama superior.

$$P(F_1 \cap F_2) = P(F_1)P(F_2/F_1) = \frac{60}{90}\cdot\frac{59}{89} = \boxed{\frac{118}{267} \simeq 0.442}$$

b) Nos piden calcular $P\left((F_1 \cap F_2) \cup (F_1^C \cap F_2) \cup (F_1 \cap F_2^C)\right)$. Miramos en el árbol y esto ocurre en tres ramas.

$$P\left((F_1 \cap F_2) \cup (F_1^C \cap F_2) \cup (F_1 \cap F_2^C)\right) =$$

$$= P(F_1 \cap F_2) + P(F_1^C \cap F_2) + P(F_1 \cap F_2^C) =$$

$$= P(F_1)P(F_2/F_1) + P(F_1^C)P(F_2/F_1^C) + P(F_1)P(F_2^C/F_1) =$$

$$= \frac{118}{267} + \frac{30}{90}\cdot\frac{60}{89} + \frac{60}{90}\cdot\frac{30}{89} = \boxed{\frac{238}{267} \simeq 0.891}$$

c) Nos piden calcular $P\left(\left(F_1^C \cap F_2\right) \cup \left(F_1 \cap F_2^C\right)\right)$. Miramos en el árbol y esto solo ocurre en dos ramas.

$$P\left(\left(F_1^C \cap F_2\right) \cup \left(F_1 \cap F_2^C\right)\right) = P\left(F_1^C \cap F_2\right) + P\left(F_1 \cap F_2^C\right) =$$

$$= P\left(F_1^C\right) P\left(F_2 / F_1^C\right) + P\left(F_1\right) P\left(F_2^C / F_1\right) = \frac{30}{90} \cdot \frac{60}{89} + \frac{60}{90} \cdot \frac{30}{89} = \boxed{\frac{40}{89} \simeq 0.449}$$

EJERCICIO 6

Una empresa almacena el mismo número de latas de refresco de cola, naranja y limón. De las 30 000 latas de refresco almacenadas, se sabe que 1 800 latas de cola, 2 400 de naranja y 3 000 de limón caducan en 2021.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que una lata elegida al azar caduque en 2021?

b) **(1 punto)** Si se ha elegido al azar una lata que no caduca en 2021, ¿cuál es la probabilidad de que sea de cola?

a) En total caducan en 2021 un total de 1800 + 2400 +3000 = 7200 latas de refresco. De un total de 30000 latas hay 7200 que caducan en 2021. Utilizamos la regla de Laplace.

$$P(\text{La lata caduca en 2021}) = \frac{7200}{30000} = \frac{6}{25} = \boxed{0.24}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

Como hay la misma cantidad de latas de cada tipo habrán $\frac{30000}{3} = 10000$ latas de cola

Llamamos C al suceso “La lata es de cola” y M a “La lata caduca en 2021”..

Tenemos que $P(C) = \frac{1}{3}$ $\qquad P(M^C / C) = \frac{10000 - 1800}{10000} = 0.82$

$$P(C / M^C) = \frac{P(C \cap M^C)}{P(M^C)} = \frac{P(C)P(M^C / C)}{1 - P(M)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.82}{1 - 0.24} = \boxed{\frac{41}{114} \simeq 0.36}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

El precio de venta al público del kilogramo de frambuesas sigue una ley Normal de media desconocida y varianza 9. En una localidad se eligen 10 comercios de manera aleatoria, obteniéndose los siguientes precios en euros:

12.3 10 9.1 11 10.5 11.8 9.9 11.5 10.9 13

a) **(0.5 puntos)** ¿Qué distribución siguen las medias de las muestras de tamaño 10?

b) **(1 punto)** Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al 97% para el precio medio del kilogramo de frambuesas.

c) **(1 punto)** Con el mismo nivel de confianza, calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error cometido al estimar el precio medio del kilogramo de frambuesas sea menor a 1.5 euros.

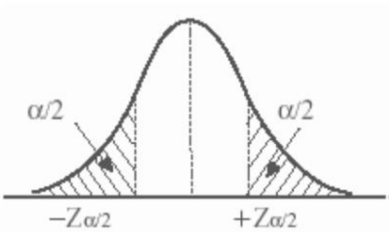
a) Si la varianza es 9 la desviación típica es la raíz de la varianza y será 3.
Si $X = N(\mu, 3)$ la distribución de las medias de las muestras de tamaño 10 sigue una distribución con la misma media, pero con una desviación típica $\frac{3}{\sqrt{10}} \rightarrow \overline{X_{10}} = N\left(\mu, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

b) Hallamos la media muestral.

$$\bar{x} = \frac{12.3+10+9.1+11+10.5+11.8+9.9+11.5+10.9+13}{10} = \frac{110}{10} = 11$$

Nivel de confianza = 97% = 0.97 = 1 – α, de donde α = 0.03, con la cual α /2 = (0.03)/2 = 0.015 y por tanto 1 – α /2 = 0.985. Buscamos en la tabla de la normal este valor y obtenemos $z_{\alpha/2} = 2.17$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9
$\boxed{2.1}$	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9



Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = 2.0586$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (11 - 2.0586, 11 + 2.0586) = (8.9414, 13.0586)$$

c) Como el nivel de confianza es el mismo tenemos que $z_{\alpha/2} = 2.17$.
Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 1.5 \Rightarrow \frac{6.51}{\sqrt{n}} = 1.5 \Rightarrow 6.51 = 1.5\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{6.51}{1.5} = 4.34 \Rightarrow \boxed{n = (4.34)^2 = 18.8356}$$

El tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 1.5 € es de 19 comercios.

EJERCICIO 8

Se sabe que la longitud, en centímetros, de una especie de estrella de mar en una determinada zona sigue una ley Normal con desviación típica 3. Para estimar la longitud media de esa especie de estrella de mar, se extrae una muestra de tamaño 36 y se obtiene el intervalo de confianza (6.04, 8) al 95%. Se pide:

a) **(0.5 puntos)** Calcule la media muestral.

b) **(0.5 puntos)** Calcule el error de estimación máximo cometido.

c) **(1 punto)** Si aumentamos el tamaño muestral a 49, ¿qué efecto produce sobre el error máximo cometido? Calcule este error.

d) **(0.5 puntos)** Si aumentamos el nivel de confianza, ¿qué efecto produce sobre el error de estimación máximo? Justifique la respuesta.

a) La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{8+6.04}{2} = 7.02$$

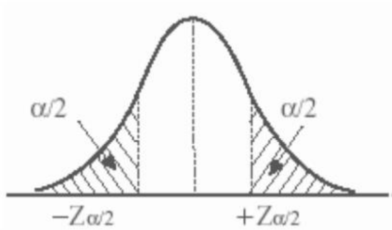
b) El error de estimación máximo cometido es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{8-6.04}{2} = 0.98$$

c) Si aumentamos el tamaño muestral a 49 el error máximo cometido disminuye. En la fórmula del error aparece el tamaño muestral (n) en el denominador $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Nivel de confianza = 95% = 0.95 = 1 – α, de donde α = 0.05, con la cual α /2 = (0.05)/2 = 0.025 y por tanto 1 – α /2 = 0.975. Buscamos en la tabla de la normal este valor y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1.96$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750



Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{49}} = \boxed{0.84}$$