PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Un cocinero tiene que hacer el postre para una cena y le han encargado dos de sus mejores creaciones: Delicia Roja y Delicia Negra. Para elaborar 1 kg de Delicia Roja son necesarias 3 tarrinas de fresas y 1 tableta de chocolate y para elaborar 1 kg de Delicia Negra se necesita 1 tarrina de fresas y 2 tabletas de chocolate. Dispone de 15 tarrinas de fresas y 10 tabletas de chocolate. Además, la cantidad de Delicia Negra no debe ser inferior a 1.5 kg y tampoco debe ser superior al doble de Delicia Roja. Si cada kilogramo de Delicia Roja le reporta un beneficio de 3 euros y el de Delicia Negra 5 euros, averigüe qué cantidad de cada postre debe elaborar para conseguir un beneficio máximo y a cuánto asciende ese beneficio.

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ a & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=A\cdot A^t$ y $C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real.

a) **(0.75 puntos)** ¿Para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz B?
b) **(0.75 puntos)** Para $a = 1$, calcule la inversa de la matriz B.
c) **(1 punto)** Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $B^t\cdot X+9C=O$.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.2 puntos)** Calcule la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x)=\ln\left(3x^2-3\right)+\frac{1-2x}{x+2} \qquad g(x)=2e^{x^3}+x^2\left(3x+4\right)^3$$

b) **(1.3 puntos)** Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de las funciones $h(x)=x^2+1$ y $p(x)=\frac{x-1}{x+1}$, en el punto de abscisa $x = 1$. ¿En qué punto se cortan ambas rectas?

EJERCICIO 4

Se considera la función $f\left(x\right)=\begin{cases} ax+\dfrac{1}{2} & si \;\; x\le -1 \\ \dfrac{x+1}{x+3} & si \;\; -1<x\le 1 \\ x^2-bx & si \;\; x>1 \end{cases}$

a) **(1.5 puntos)** Halle *a* y *b* para que la función sea continua en todo su dominio. Para esos valores de *a* y *b*, ¿es *f* derivable en $x = -1$? ¿Y en $x = 1$?
b) **(0.5 puntos)** Para $a = -1$ y $b = 4$, estudie la monotonía de la función *f*.
c) **(0.5 puntos)** Para $a = -1$ y $b = 4$, calcule $\int_1^2 f\left(x\right)dx$

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Tres personas se encargan de los cobros de la caja de un supermercado. El mes pasado, la primera de ellas realizó el 30% de los cobros, la segunda el 45% y la tercera el resto. La dirección del supermercado ha comprobado que de los cobros realizados por la primera persona, el 1% son erróneos, que la segunda cometió errores en el 3% de los cobros y la tercera en el 2%.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que un cobro elegido al azar haya sido erróneo.
b) **(1 punto)** Se elige al azar un cobro correcto. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido realizado por la segunda persona?

EJERCICIO 6

En un centro de enseñanza secundaria, el 11% de los profesores ocupan cargos directivos y el 13% pertenecen a alguna comisión. Además, el 6% ocupan un cargo directivo y pertenecen a alguna comisión.

a) **(1 punto)** ¿Cuál es el porcentaje de profesores que pertenecen a alguna comisión y no ocupan ningún cargo directivo?
b) **(1 punto)** Calcule el porcentaje de profesores que no ocupan cargos directivos ni pertenecen a ninguna comisión.
c) **(0.5 puntos)** De los profesores que ocupan un cargo directivo, ¿qué porcentaje pertenece a alguna comisión?

BLOQUE D

EJERCICIO 7

La distancia en kilómetros recorrida al día por los vehículos de una empresa de coches de alquiler sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 225. Se toma una muestra aleatoria simple de 36 coches y se obtiene el intervalo de confianza (153.65, 162.35) para la media poblacional.

a) **(1 punto)** Calcule la media muestral y el error máximo de estimación para ese intervalo de confianza.
b) **(0.5 puntos)** Si con el mismo nivel de confianza, aumentamos el tamaño muestral, ¿cómo se vería afectado el error?
c) **(1 punto)** Con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea inferior a 3 km?

EJERCICIO 8

El tiempo de espera para ser atendido en un servicio hospitalario es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica de 2 meses. Tomada una muestra al azar de 9 pacientes que han utilizado ese servicio, se han registrado los siguientes tiempos de espera en meses:

8.5 3.7 4.3 3.6 5.6 4.8 1.0 1.4 6.0

a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 95% para el tiempo de espera medio poblacional.
b) **(1 punto)** Con un nivel de confianza del 97%, ¿qué tamaño muestral mínimo se ha de tomar para que el error máximo cometido en la estimación del tiempo de espera medio poblacional no exceda de un mes?

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Un cocinero tiene que hacer el postre para una cena y le han encargado dos de sus mejores creaciones: Delicia Roja y Delicia Negra. Para elaborar 1 kg de Delicia Roja son necesarias 3 tarrinas de fresas y 1 tableta de chocolate y para elaborar 1 kg de Delicia Negra se necesita 1 tarrina de fresas y 2 tabletas de chocolate. Dispone de 15 tarrinas de fresas y 10 tabletas de chocolate. Además, la cantidad de Delicia Negra no debe ser inferior a 1.5 kg y tampoco debe ser superior al doble de Delicia Roja. Si cada kilogramo de Delicia Roja le reporta un beneficio de 3 euros y el de Delicia Negra 5 euros, averigüe qué cantidad de cada postre debe elaborar para conseguir un beneficio máximo y a cuánto asciende ese beneficio.

Llamemos "x" al número de kilos de Delicia Roja e "y" al número de kilos de Delicia Negra. Realizamos una tabla con los datos del ejercicio.

	Tarrinas de fresas	Tabletas de chocolate	Beneficio
Kilos de Delicia Roja (x)	3x	x	3x
Kilos de Delicia Negra (y)	y	2y	5y
TOTALES	$3x+y$	$x+2y$	$3x+5y$

Establecemos las restricciones del problema.

"Dispone de 15 tarrinas de fresas y 10 tabletas de chocolate" → $3x+y\leq 15$; $x+2y\leq 10$.

"La cantidad de Delicia Negra no debe ser inferior a 1.5 kg y tampoco debe ser superior al doble de Delicia Roja" → $y>1.5$; $y\leq 2x$

Además, el número de kilos es positivo → $x\geq 0$; $y\geq 0$

El conjunto de las restricciones de este problema de programación lineal es:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y\leq 15 \\ x+2y\leq 10 \\ y\leq 2x \\ y>1.5 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Y la función objetivo que deseamos maximizar es el dinero obtenido por la venta de todas los kilos de postre $B(x,y)=3x+5y$.

Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones y que delimitan la región factible.

$3x+y=15$

x	$y=15-3x$
4	3
4.5	1.5

$x+2y=10$

x	$y=\dfrac{10-x}{2}$
4	3
10	0

$y=2x$

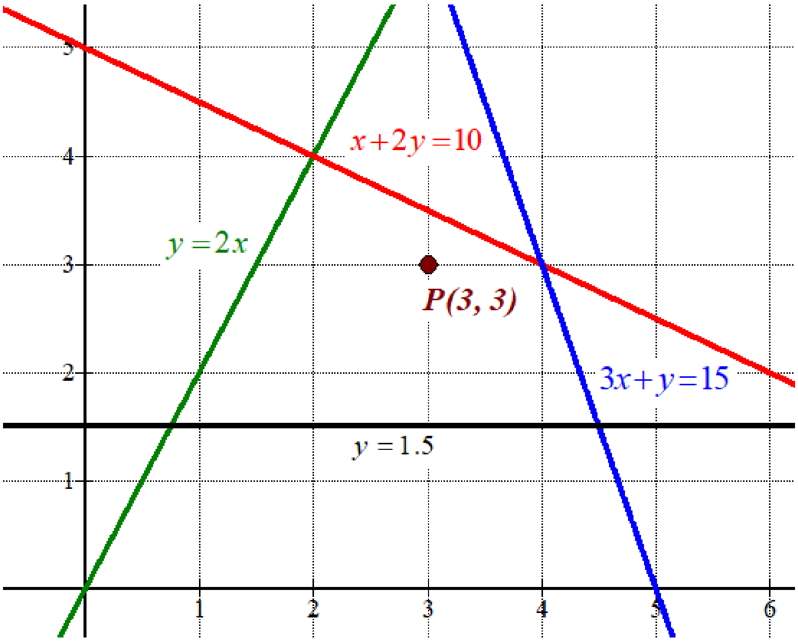
x	$y=x$
0.75	1.5
0	0

$y=1.5$

x	$y=1.5$
1.5	1.5
4.5	1.5

$x\geq 0;\ y\geq 0$

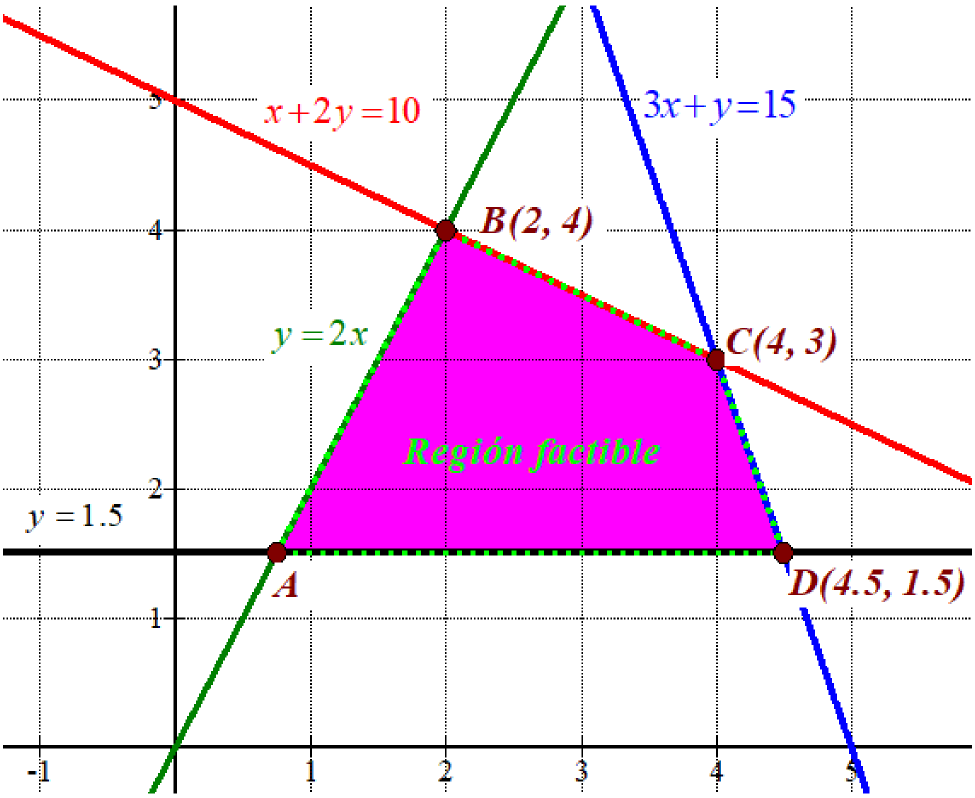
Primer cuadrante



Comprobamos si el punto P(3, 3) cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot 3+3\leq 15 \\ 3+2\cdot 3\leq 10 \\ 3\leq 2\cdot 3 \\ 3>1.5 \\ 3\geq 0;\ \ 3\geq 0 \end{array}\right\}$$

Como se cumplen todas las restricciones la región factible es la zona coloreada de rosa del dibujo inferior.



Obtenemos las coordenadas del vértice *A*.

$$\left.\begin{array}{l} y=2x \\ y=1.5 \end{array}\right\} \Rightarrow 1.5=2x \Rightarrow x=\frac{1.5}{2}=0.75 \Rightarrow A(0.75,1.5)$$

Valoramos la función $B(x,y)=3x+5y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

- A(0.75, 1.5) → $B(0.75,1.5)=2.25+7.5=9.75$
- $B(2,4)$ → $B(2,4)=6+20=26$
- C(4, 3) → $B(4,3)=12+15=27 \rightarrow ¡Máximo!$
- D(4.5, 1.5) → $B(4.5,1.5)=13.5+7.5=21$

El valor máximo se alcanza en el vértice C(4, 3) siendo este valor máximo igual a 27.
El máximo beneficio se obtiene haciendo 4 kilos de Delicia Roja y 3 kilos de Delicia Negra.
Este beneficio máximo es de 27 €.

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ a & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=A\cdot A^t$ y $C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real.

a) **(0.75 puntos)** ¿Para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz B?
b) **(0.75 puntos)** Para $a = 1$, calcule la inversa de la matriz B.
c) **(1 punto)** Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $B^t\cdot X+9C=O$.

a) Hallamos la expresión de B.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ a & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$B=A\cdot A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ a & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+4 & a+0+0\\ a+0+0 & a^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & a\\ a & a^2+1\end{pmatrix}$$

La matriz B tiene inversa si su determinante es no nulo.

$$|B|=\begin{vmatrix}5 & a\\ a & a^2+1\end{vmatrix}=5a^2+5-a^2=4a^2+5$$

$$|B|=0\Rightarrow 4a^2+5=0\Rightarrow 4a^2=-5\Rightarrow a^2=\frac{-5}{4}\Rightarrow a=\sqrt{\frac{-5}{4}}=\text{¡Im}\mathit{posible}\text{!}$$

El determinante de la matriz B nunca se anula. La matriz B tiene inversa para cualquier valor de a.

b) Para $a = 1$ la matriz B queda $B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 1^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Calculamos su inversa.

$$|B|=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=10-1=9$$

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^t\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}}{9}=\boxed{\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/9 & -1/9\\ -1/9 & 5/9\end{pmatrix}}$$

c) Para $a = 1$ la matriz B queda $B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 1^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Despejamos X en la ecuación $B^t\cdot X+9C=O$.

$$B^t\cdot X+9C=O\Rightarrow B^t\cdot X=-9C+O=-9C\Rightarrow X=\left(B^t\right)^{-1}(-9C)$$

Como la matriz B es simétrica tenemos que $B^t=B\Rightarrow\left(B^t\right)^{-1}=B^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$.

Obtenemos la expresión de X.

$$X = \left(B^t\right)^{-1}(-9C) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}(-9)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{9}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = -\begin{pmatrix} 2-1 & -4 \\ -1+5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.2 puntos)** Calcule la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x)=\ln\left(3x^2-3\right)+\frac{1-2x}{x+2} \qquad g(x)=2e^{x^3}+x^2\left(3x+4\right)^3$$

b) **(1.3 puntos)** Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas de las funciones $h(x)=x^2+1$ y $p(x)=\frac{x-1}{x+1}$, en el punto de abscisa $x = 1$. ¿En qué punto se cortan ambas rectas?

a)

$$f(x)=\ln\left(3x^2-3\right)+\frac{1-2x}{x+2} \Rightarrow f\,'(x)=\frac{6x}{3x^2-3}+\frac{(-2)(x+2)-(1-2x)(1)}{(x+2)^2}$$

$$\boxed{f\,'(x)=\frac{2x}{x^2-1}+\frac{-2x-4-1+2x}{(x+2)^2}=\frac{2x}{x^2-1}+\frac{-5}{(x+2)^2}=\frac{2x}{x^2-1}-\frac{5}{(x+2)^2}}$$

$$g(x)=2e^{x^3}+x^2\left(3x+4\right)^3 \Rightarrow g'(x)=2e^{x^3}\left(3x^2\right)+2x(3x+4)^3+x^2 3(3x+4)^2(3)$$

$$g'(x)=6x^2e^{x^3}+2x(3x+4)^3+9x^2(3x+4)^2=6x^2e^{x^3}+(3x+4)^2\left(2x(3x+4)+9x^2\right)$$

$$g'(x)=6x^2e^{x^3}+(3x+4)^2\left(6x^2+8x+9x^2\right) \Rightarrow \boxed{g'(x)=6x^2e^{x^3}+(3x+4)^2\left(15x^2+8x\right)}$$

b) La recta tangente a la gráfica de $h(x)=x^2+1$ en $x=1$ es $y-h(1)=h'(1)(x-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} h(x)=x^2+1 \to h(1)=1^2+1=2 \\ h'(x)=2x \to h'(1)=2 \\ y-h(1)=h'(1)(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-2=2(x-1) \Rightarrow y-2=2x-2 \Rightarrow \boxed{y=2x}$$

La recta tangente a la gráfica de $p(x)=\frac{x-1}{x+1}$ en $x=1$ es $y-p(1)=p'(1)(x-1)$.

$$p'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} p(x)=\frac{x-1}{x+1} \to p(1)=\frac{1-1}{1+1}=0 \\ p'(1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ y-p(1)=p'(1)(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}$$

EJERCICIO 4

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax+\dfrac{1}{2} & si \ \ x\le -1 \\ \dfrac{x+1}{x+3} & si \ \ -1<x\le 1 \\ x^2-bx & si \ \ x>1 \end{cases}$

a) **(1.5 puntos)** Halle *a* y *b* para que la función sea continua en todo su dominio. Para esos valores de *a* y *b*, ¿es *f* derivable en *x = –1*? ¿Y en *x = 1*?
b) **(0.5 puntos)** Para *a = –1* y *b = 4*, estudie la monotonía de la función *f*.
c) **(0.5 puntos)** Para *a = –1* y *b = 4*, calcule $\int_1^2 f(x)\,dx$

a) Para que la función sea continua en todo su dominio debe serlo en *x = –1* y en *x = 1*.

Continua en *x = –1*.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=-a+\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} ax+\dfrac{1}{2}=-a+\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{0}{2}=0 \\ f(x) \text{ continua en } x=-1 \to f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -a+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

Continua en *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\dfrac{1+1}{1+3}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2-bx=1-b \\ f(x) \text{ continua en } x=1 \to f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow 1-b=\frac{1}{2} \Rightarrow 1-\frac{1}{2}=b \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}}$$

Los valores buscados son $a=b=\dfrac{1}{2}$.

Para estos valores la función queda $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2} & si \ \ x\le -1 \\ \dfrac{x+1}{x+3} & si \ \ -1<x\le 1 \\ x^2-\dfrac{x}{2} & si \ \ x>1 \end{cases}$.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ y su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & si\ \ x<-1\\ \dfrac{1\cdot(x+3)-1\cdot(x+1)}{(x+3)^2}=\dfrac{2}{(x+3)^2} & si\ \ -1<x<1\\ 2x-\dfrac{1}{2} & si\ \ x>1\end{cases}$$

¿Es derivable en $x = -1$? Compruebo si las derivadas laterales tienen el mismo valor.

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^-)=\lim\limits_{x\to-1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\\ f'(-1^+)=\lim\limits_{x\to-1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2}{(x+3)^2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow f'(-1^-)=f'(-1^+)=\dfrac{1}{2}$$

La función es derivable en $x = -1$.

¿Es derivable en $x = 1$? Compruebo si las derivadas laterales tienen el mismo valor.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2}{(x+3)^2}=\dfrac{2}{16}=\dfrac{1}{8}\\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to1^+}2x-\dfrac{1}{2}=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow f'(1^-)=\dfrac{1}{8}\neq\dfrac{3}{2}=f'(1^+)$$

La función no es derivable en $x = 1$.

b) Para $a = -1$ y $b = 4$ la función queda $f(x)=\begin{cases}-x+\dfrac{1}{2} & si\ \ x\le-1\\ \dfrac{x+1}{x+3} & si\ \ -1<x\le1\\ x^2-4x & si\ \ x>1\end{cases}$.

La derivada queda $f'(x)=\begin{cases}-1 & si\ \ x<-1\\ \dfrac{2}{(x+3)^2} & si\ \ -1<x<1\\ 2x-4 & si\ \ x>1\end{cases}$.

En $(-\infty,-1)$ la derivada es negativa ($f'(x)=-1<0$) y la función decrece en todo el intervalo.

En el intervalo $(-1,1)$ la derivada es siempre positiva ($f'(x)=\dfrac{2}{(x+3)^2}=\dfrac{+}{+}>0$) y la función crece en todo el intervalo.

En el intervalo $(1,+\infty)$ la función es una parábola y la derivada cambia de signo. Dividimos el intervalo en dos y estudiamos la monotonía.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x-4 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow x=2$$

En el intervalo $(1,2)$ tomamos *x = 1.5* y la derivada vale $f'(1.5)=3-4=-1<0$. La función decrece en $(1,2)$.

En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos *x = 3* y la derivada vale $f'(3)=6-4=2>0$. La función crece en $(2,+\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,-1)\cup(1,2)$ y crece en $(-1,1)\cup(2,+\infty)$.

c) Para *a = –1* y *b = 4* la función queda $f(x)=\begin{cases} -x+\dfrac{1}{2} & si \;\; x\le -1 \\ \dfrac{x+1}{x+3} & si \;\; -1<x\le 1 \\ x^2-4x & si \;\; x>1 \end{cases}$.

En el intervalo $(1,2)$ la función es $f(x)=x^2-4x$.

Calculamos la integral pedida.

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 x^2-4xdx = \left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_1^2 =$$

$$=\left[\frac{2^3}{3}-2\cdot 2^2\right]-\left[\frac{1^3}{3}-2\cdot 1^2\right]=\frac{8}{3}-8-\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}-6=\boxed{\frac{-11}{3}}$$

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Tres personas se encargan de los cobros de la caja de un supermercado. El mes pasado, la primera de ellas realizó el 30% de los cobros, la segunda el 45% y la tercera el resto. La dirección del supermercado ha comprobado que de los cobros realizados por la primera persona, el 1% son erróneos, que la segunda cometió errores en el 3% de los cobros y la tercera en el 2%.

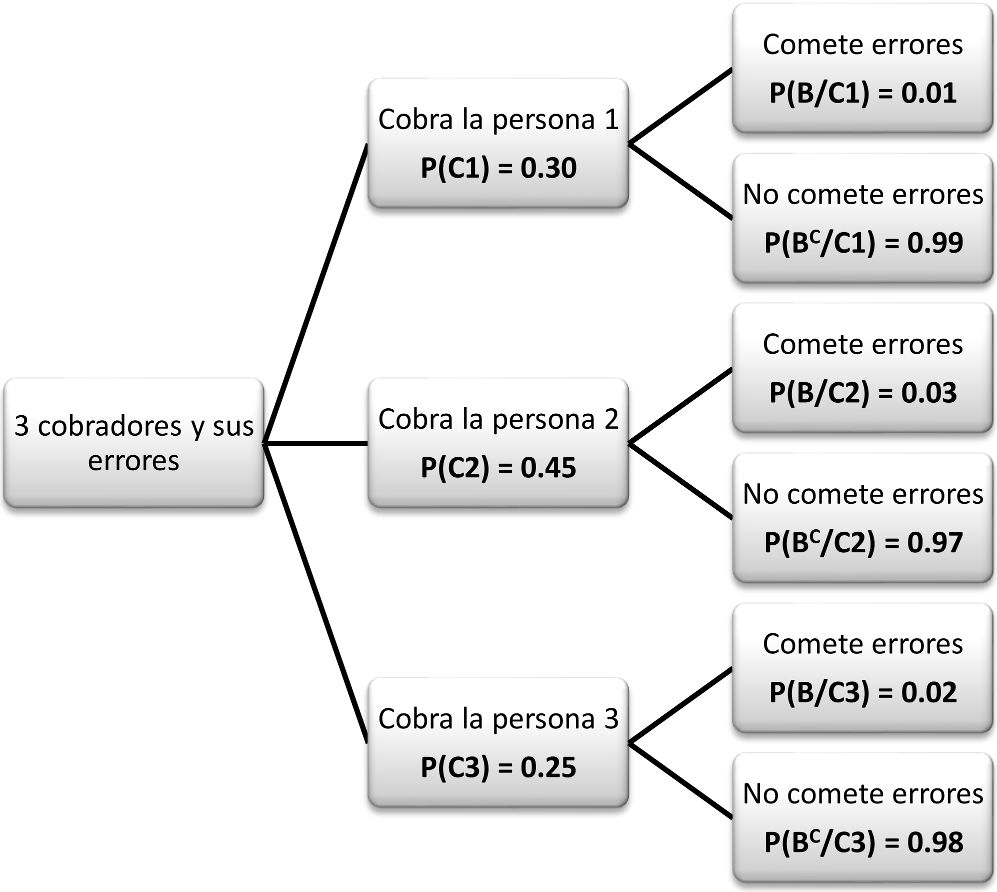
a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que un cobro elegido al azar haya sido erróneo.

b) **(1 punto)** Se elige al azar un cobro correcto. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido realizado por la segunda persona?

Llamamos C1 al suceso "Cobra la persona 1", C2 a "Cobra la persona 2", C3 a "Cobra la persona 3" y B al suceso "Comete errores en el cobro".

La tercera persona cobra el 100 – 30 – 45 = 25 % de las ocasiones.

Realizamos un diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B) = P(C1)P(B/C1) + P(C2)P(B/C2) + P(C3)P(B/C3) =$$
$$= 0.30 \cdot 0.01 + 0.45 \cdot 0.03 + 0.25 \cdot 0.02 = \boxed{0.0215}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(C2/B^C\right) = \frac{P\left(C2 \cap B^C\right)}{P\left(B^C\right)} = \frac{P(C2)P\left(B^C/C2\right)}{1-P(B)} = \frac{0.45 \cdot 0.97}{1-0.215} = \boxed{\frac{873}{1957} \simeq 0.446}$$

EJERCICIO 6

En un centro de enseñanza secundaria, el 11% de los profesores ocupan cargos directivos y el 13% pertenecen a alguna comisión. Además, el 6% ocupan un cargo directivo y pertenecen a alguna comisión.

a) **(1 punto)** ¿Cuál es el porcentaje de profesores que pertenecen a alguna comisión y no ocupan ningún cargo directivo?

b) **(1 punto)** Calcule el porcentaje de profesores que no ocupan cargos directivos ni pertenecen a ninguna comisión.

c) **(0.5 puntos)** De los profesores que ocupan un cargo directivo, ¿qué porcentaje pertenece a alguna comisión?

Realizamos una tabla de contingencia para establecer las probabilidades.

	Pertenece a alguna comisión (B)	No pertenece a ninguna comisión (B^C)	
Cargo directivo (A)	6		11
No es cargo directivo (A^C)			
	13		100

Completamos la tabla.

	Pertenece a alguna comisión (B)	No pertenece a ninguna comisión (B^C)	
Cargo directivo (A)	6	**5**	11
No es cargo directivo (A^C)	**7**	**82**	**89**
	13	**87**	100

Con estos datos podemos responder a las preguntas utilizando la regla de Laplace.

a) Mirando en la tabla vemos que es el 7 %

b) Mirando en la tabla vemos que es el 82 %

c) Mirando en la tabla vemos que hay 11 cargos directivos y de ellos 6 pertenecen a alguna comisión → $\frac{6}{11} = 0.545.. \rightarrow \boxed{54.5\%}$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

La distancia en kilómetros recorrida al día por los vehículos de una empresa de coches de alquiler sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 225. Se toma una muestra aleatoria simple de 36 coches y se obtiene el intervalo de confianza (153.65, 162.35) para la media poblacional.

a) **(1 punto)** Calcule la media muestral y el error máximo de estimación para ese intervalo de confianza.

b) **(0.5 puntos)** Si con el mismo nivel de confianza, aumentamos el tamaño muestral, ¿cómo se vería afectado el error?

c) **(1 punto)** Con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea inferior a 3 km?

a) La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{153.65 + 162.35}{2} = 158$$

El error máximo es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

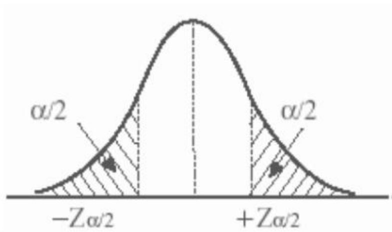
$$Error = \frac{162.35 - 153.65}{2} = 4.35$$

b) Si aumentamos el tamaño muestral el error disminuye, pues en la fórmula del error el tamaño muestral (n) está en el denominador de la expresión $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

c)

Nivel de confianza = 95% = 0.95 = 1 – α, de donde α = 0.05, con la cual α /2 = (0.05)/2 = 0.025 y por tanto 1 – α /2 = 0.975. Buscamos en la tabla de la normal este valor y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1.96$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750



Si la varianza es 225 la desviación típica es $\sqrt{225} = 15$.

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} = 3 \Rightarrow \frac{29.4}{\sqrt{n}} = 3 \Rightarrow 29.4 = 3\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{29.4}{3} = 9.8 \Rightarrow n = 9.8^2 = 96.04$$

El tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 3 km es de 97 vehículos.

EJERCICIO 8

El tiempo de espera para ser atendido en un servicio hospitalario es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica de 2 meses. Tomada una muestra al azar de 9 pacientes que han utilizado ese servicio, se han registrado los siguientes tiempos de espera en meses:

8.5 3.7 4.3 3.6 5.6 4.8 1.0 1.4 6.0

a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 95% para el tiempo de espera medio poblacional.

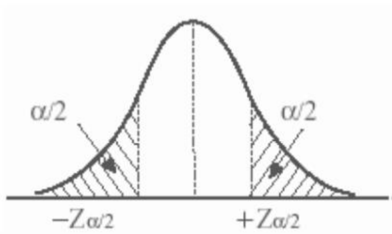
b) **(1 punto)** Con un nivel de confianza del 97%, ¿qué tamaño muestral mínimo se ha de tomar para que el error máximo cometido en la estimación del tiempo de espera medio poblacional no exceda de un mes?

a) Hallamos la media muestral.

$$\bar{x} = \frac{8.5+3.7+4.3+3.6+5.6+4.8+1.0+1.4+6.0}{9} = \frac{389}{90} \simeq 4.322$$

Nivel de confianza = 95% = 0.95 = 1 – α, de donde α = 0.05, con la cual α /2 = (0.05)/2 = 0.025 y por tanto 1 – α /2 = 0.975. Buscamos en la tabla de la normal este valor y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1.96$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750



Utilizamos la fórmula del error.

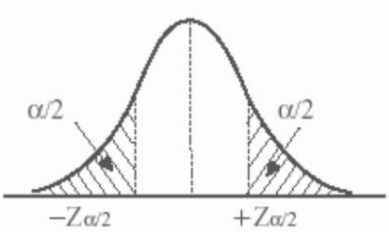
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{98}{75} \simeq 1.306$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(\frac{389}{90} - \frac{98}{75}, \frac{389}{90} + \frac{98}{75}\right) = (3.015, 5.628)$$

b) Nivel de confianza = 97% = 0.97 = 1 – α, de donde α = 0.03, con la cual α /2 = (0.03)/2 = 0.015 y por tanto 1 – α /2 = 0.985. Buscamos en la tabla de la normal este valor y obtenemos $z_{\alpha/2} = 2.17$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.53
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.57
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.61
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.64
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.68
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.71
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.75
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.78
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.81
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.83
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.85
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.88
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.89
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.91
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.93
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.94
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.95
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.96
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.96
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.97
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.98
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.98
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.98



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow \frac{4.34}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 4.34 = \sqrt{n} \Rightarrow n = 4.34^2 \simeq 18.83$$

El tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 1 mes es de 19 pacientes.