PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una confitería elabora dos tipos de tartas, unas de chocolate y otras de merengue y chocolate. Para ello dispone de 100 kg de bizcocho, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de merengue. Para elaborar una tarta de chocolate, se requieren 1 kg de bizcocho y 2 kg de crema de chocolate y para la tarta de chocolate y merengue se requieren 2 kg de bizcocho, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de merengue. Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros y de 12 euros por cada una de merengue y chocolate. Suponiendo que se vende todo lo que se elabora, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es dicho beneficio?

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ k & -3 & 2\\ 1 & k & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

a) **(0.8 puntos)** Razone si las siguientes operaciones se pueden realizar y en aquellos casos en que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante:

$$B^t\cdot A \qquad C\cdot B \qquad B\cdot A+B \qquad B^2$$

b) **(0.7 puntos)** Calcule los valores del parámetro k para los que la matriz A es invertible.

c) **(1 punto)** Para $k=-1$, calcule la inversa de la matriz A.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+2 & si\ \ x\le 0\\ \dfrac{x+b}{x-1} & si\ \ x>0\end{cases}$

a) **(1.2 puntos)** Halle a y b para que f sea continua y derivable en $x = 0$.

b) **(0.7 puntos)** Para $a = 1$ y $b = -2$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

c) **(0.6 puntos)** Para $a = 1$ y $b = 1$, halle, si existen, las ecuaciones de las asíntotas de f.

EJERCICIO 4

El número de bacterias en un determinado cultivo viene dado por la función *B(t)*, donde *t* representa el tiempo en horas, con $0 \le t \le 7$. La variación instantánea en la población de bacterias en el cultivo viene dada por la derivada de la función *B*, cuya expresión es $B'(t) = 50000 \cdot e^{2t}$.

a) **(0.75 puntos)** ¿Existe algún instante *t* en el que el número de bacterias en el cultivo comience a decrecer?

b) **(1.5 puntos)** Obtenga la expresión de la función *B(t)*, sabiendo que en el instante *t = 0* el número de bacterias en el cultivo era de 40 000.

c) **(0.25 puntos)** ¿Cuál es el número de bacterias en el cultivo a la hora y media?

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Sean *A* y *B* dos sucesos de un mismo experimento aleatorio.

a) **(0.5 puntos)** Si $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$, ¿pueden ser los sucesos A y B independientes e incompatibles a la vez? Justifique la respuesta.

b) **(2 puntos)** Sabiendo que $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$ y $P(A/B) = 0.2$, calcule las siguientes probabilidades:

$$P(A \cap B) \qquad P(A \cup B) \qquad P(A^C \cup B^C) \qquad P(A - B)$$

EJERCICIO 6

El censo de una población andaluza está compuesto en total por 15 000 personas, de las cuales 8 500 son mujeres. Se sabe que el 15% de las mujeres y el 20% de los hombres censados en dicha población han viajado alguna vez a un país extranjero. Se elige al azar una persona censada en dicha población.

a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que haya viajado al extranjero?

b) **(1.25 puntos)** Si se sabe que esta persona no ha viajado al extranjero, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

BLOQUE D

EJERCICIO 7

El tiempo de desfase, en minutos, entre la hora de paso programada de un autobús por cierta parada y la hora real a la que pasa, sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 4. Se observa el paso del autobús por la parada en 10 ocasiones elegidas al azar, registrándose los siguientes desfases:

4.7 2.1 3.6 5.4 0.0 4.2 4.0 –0.2 1.9 5.2

a) **(1.25 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza al 97% para el desfase medio en la hora de paso del autobús.

b) **(1.25 puntos)** ¿Qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el desfase medio con un error inferior a 30 segundos y un nivel de confianza del 95%? ¿Cómo variaría dicho tamaño muestral si se aumentara el nivel de confianza?

EJERCICIO 8

Una tienda de ropa quiere estudiar la aceptación de un nuevo sistema de pago a través del teléfono móvil. Para ello realiza una encuesta entre 200 de sus clientes elegidos al azar, resultando que 150 de ellos sí estarían dispuestos a usar el nuevo sistema de pago.

a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 97% para estimar la proporción de clientes de esa tienda que estarían dispuestos a usar el nuevo sistema de pago.

b) **(1 punto)** Mediante una nueva encuesta se quiere estimar la proporción de clientes de esa tienda que usarían el nuevo sistema de pago, con un error máximo del 3% y un nivel de confianza del 94%. Suponiendo que se mantiene la proporción muestral del apartado anterior, ¿a cuántos clientes como mínimo habría que realizar la encuesta?

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una confitería elabora dos tipos de tartas, unas de chocolate y otras de merengue y chocolate. Para ello dispone de 100 kg de bizcocho, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de merengue. Para elaborar una tarta de chocolate, se requieren 1 kg de bizcocho y 2 kg de crema de chocolate y para la tarta de chocolate y merengue se requieren 2 kg de bizcocho, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de merengue. Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros y de 12 euros por cada una de merengue y chocolate. Suponiendo que se vende todo lo que se elabora, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es dicho beneficio?

Llamemos “x” al número de tartas de chocolate e “y” al número de tartas de merengue y chocolate.
Realizamos una tabla con los datos del ejercicio.

	Kilos de bizcocho	Kilos de crema de chocolate	Kilos de merengue	Beneficio
Número de tartas de chocolate (x)	x	2x		10x
Número de tartas de merengue y chocolate (y)	2y	y	y	12y
TOTALES	$x+2y$	$2x+y$	y	$10x+12y$

Establecemos las restricciones del problema.

“Dispone de 100 kg de bizcocho, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de merengue” → $x+2y\le 100$; $2x+y\le 80$; $y\le 46$.
Además, el número de kilos es positivo → $x\ge 0;\quad y\ge 0$

El conjunto de las restricciones de este problema de programación lineal es:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y\le 100 \\ 2x+y\le 80 \\ y\le 46 \\ x\ge 0;\quad y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Y la función objetivo que deseamos maximizar es el dinero obtenido por la venta de todas las tartas: $B(x,y)=10x+12y$.

Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones y que delimitan la región factible.

$x+2y=100$

x	$y=\frac{100-x}{2}$
8	46
100	0

$2x+y=80$

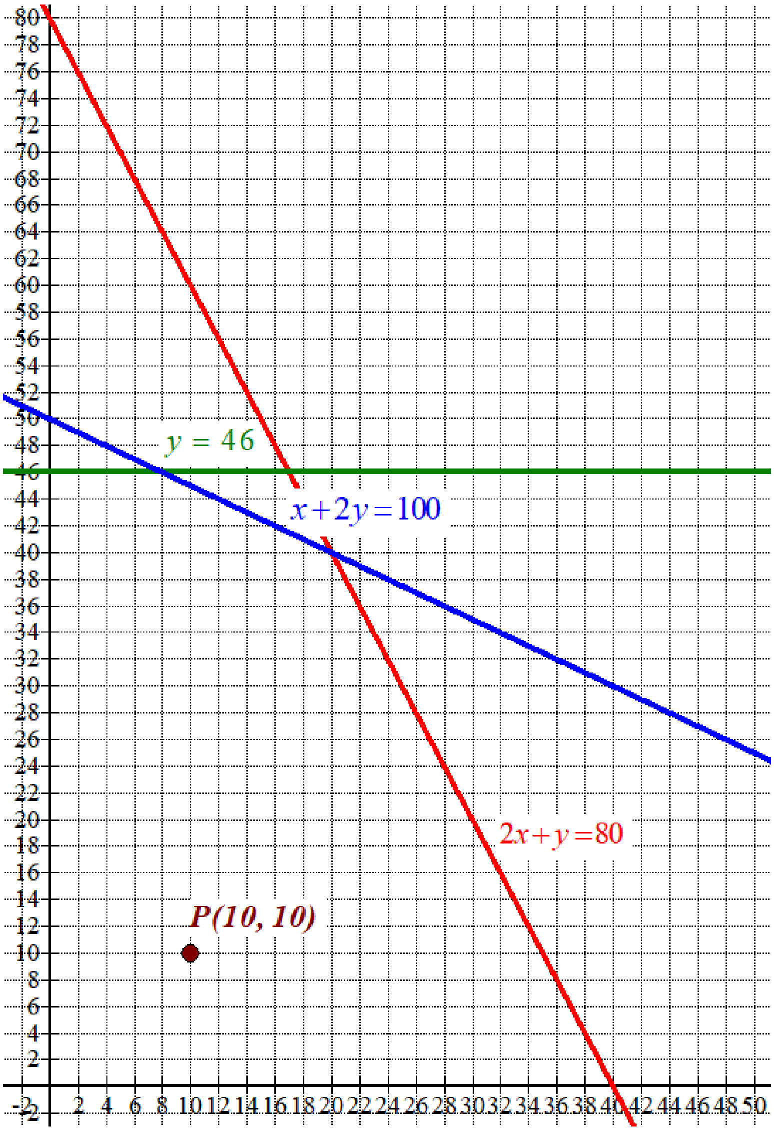
x	$y=80-2x$
40	0
0	80

$y=46$

x	$y=46$
8	46
0	46

$x\ge 0;\ y\ge 0$

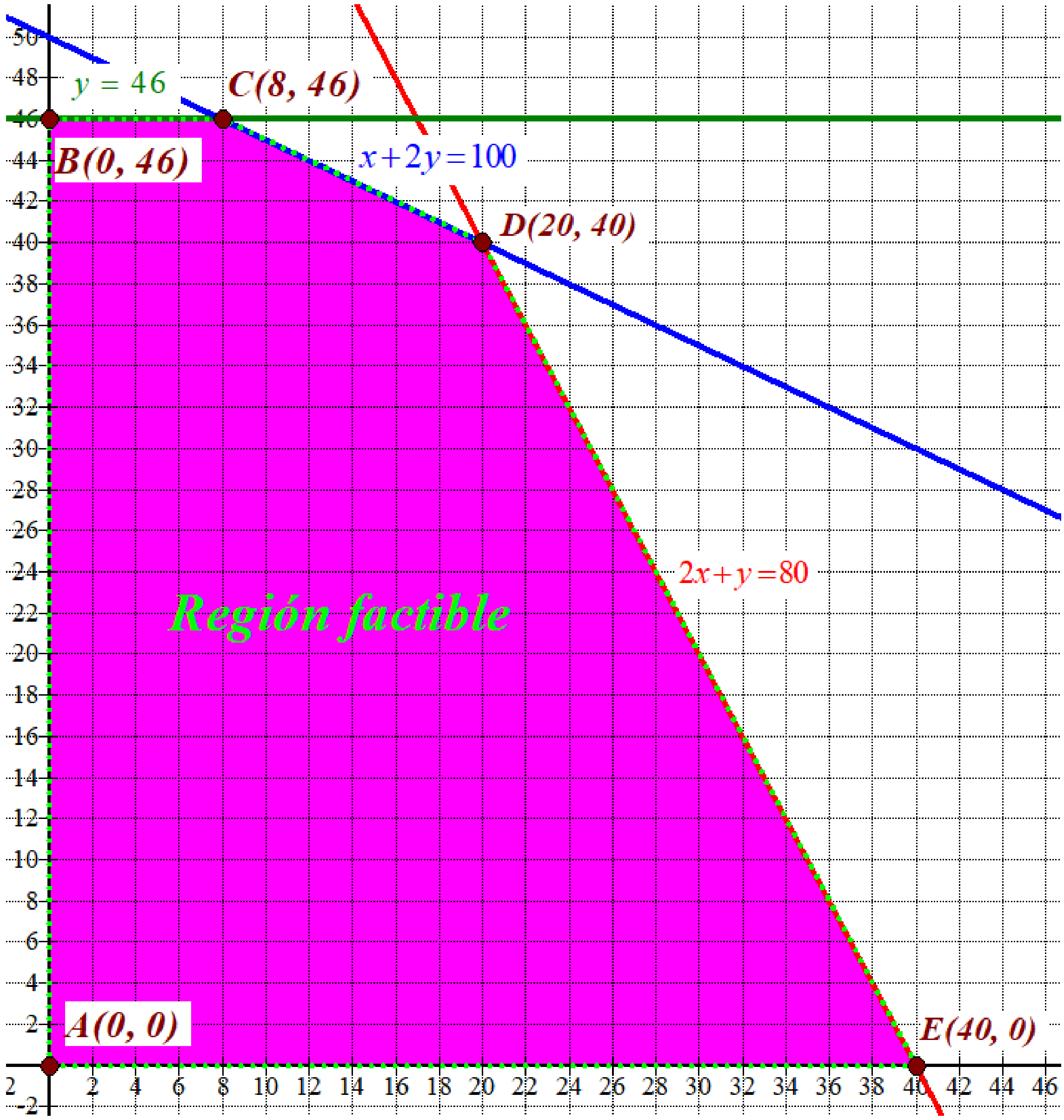
Primer cuadrante



Comprobamos si el punto P(10, 10) cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10+20\leq 100 \\ 20+10\leq 80 \\ 10\leq 46 \\ 10\geq 0;\ 10\geq 0 \end{array}\right\}$$

Como se cumplen todas las restricciones la región factible es la zona coloreada de rosa del dibujo inferior.



Valoramos la función $B(x,y)=10x+12y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

- A(0, 0) → $B(0,0)=0$
- $B(0,46)$ → $B(0,46)=0+552=552$
- C(8, 46) → $B(8,46)=80+552=632$
- D(20, 40) → $B(20,40)=200+480=680\rightarrow$¡Máximo!
- E(40, 0) → $B(40,0)=400+0=400$

El valor máximo se alcanza en el vértice D(20, 40) siendo este valor máximo igual a 680. El máximo beneficio se obtiene haciendo 20 tartas de chocolate y 40 tartas de chocolate y merengue. Este beneficio máximo es de 680 €.

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ k & -3 & 2\\ 1 & k & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

a) **(0.8 puntos)** Razone si las siguientes operaciones se pueden realizar y en aquellos casos en que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante:

$B^t\cdot A$ $\qquad C\cdot B$ $\qquad B\cdot A+B$ $\qquad B^2$

b) **(0.7 puntos)** Calcule los valores del parámetro k para los que la matriz A es invertible.

c) **(1 punto)** Para $k=-1$, calcule la inversa de la matriz A.

a)

$$B^t\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ k & -3 & 2\\ 1 & k & 1\end{pmatrix}$$ No es posible

$$\xrightarrow{3\times\boxed{2\ \cdot\ 3}\times 3}\text{¡}No!$$

$$C\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$ Es posible. El resultado es una matriz 2×3

$$\xrightarrow{2\times\boxed{2\ \cdot\ 2}\times 3}2\times 3$$

$$B\cdot A+B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ k & -3 & 2\\ 1 & k & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$ Es posible. El resultado es una matriz 2×3

$$\xrightarrow{2\times\boxed{3\ \cdot\ 3}\times 3}2\times 3+\ 2\times 3$$

$$B^2=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$ No es posible

$$\xrightarrow{2\times\boxed{3\ \cdot\ 2}\times 3}$$

b) Para que la matriz A sea invertible debe tener determinante no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ k & -3 & 2\\ 1 & k & 1\end{vmatrix}=-3+0+k^2+3+0-2k=k^2-2k$$

$$|A|=0\Rightarrow k^2-2k=0\Rightarrow k(k-2)=0\Rightarrow\begin{cases}k=0\\ k-2=0\to k=2\end{cases}$$

La matriz A es invertible para los valores de k distintos de 0 y de 2.

c) Para $k=-1$ la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3+1+3+2 = 3 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+2 & si \;\; x\leq 0 \\ \dfrac{x+b}{x-1} & si \;\; x>0 \end{cases}$

a) **(1.2 puntos)** Halle *a* y *b* para que *f* sea continua y derivable en *x = 0*.
b) **(0.7 puntos)** Para *a = 1* y *b = –2*, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x = 0*.
c) **(0.6 puntos)** Para *a = 1* y *b = 1*, halle, si existen, las ecuaciones de las asíntotas de *f*.

a) Para que la función sea continua en *x = 0* deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^2+a\cdot 0+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2+ax+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+b}{x-1}=\dfrac{b}{-1}=-b \\ f(x) \text{ continua en } x=0 \to f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -b=2 \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

La función queda $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+2 & si \;\; x\leq 0 \\ \dfrac{x-2}{x-1} & si \;\; x>0 \end{cases}$.

Hallamos la función derivada en $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si \;\; x<0 \\ \dfrac{1\cdot(x-1)-1\cdot(x-2)}{(x-1)^2}=\dfrac{x-1-x+2}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{(x-1)^2} & si \;\; x>0; x\neq 1 \end{cases}$$

Para que sea derivable en *x = 0* las derivadas laterales deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+a)=a \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{1}=1 \\ f'(0^-)=f'(0^+) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Para *a = 1* y *b = –2* la función es continua y derivable en *x = 0*.

b) Para *a = 1* y *b = –2* la función queda $f(x)=\begin{cases} x^2+x+2 & si \;\; x\leq 0 \\ \dfrac{x-2}{x-1} & si \;\; x>0 \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=2 \\ f'(0)=1 \\ y-f(0)=f'(0)(x-0) \end{array}\right\} \Rightarrow y-2=1(x-0) \Rightarrow \boxed{y=x+2}$$

c) Para $a = 1$ y $b = 1$ la función queda $f(x)=\begin{cases} x^2+x+2 & si \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & si \quad x>0 \end{cases}$

Para $x < 0$ la función es $f(x)=x^2+x+2$, siendo una parábola no tiene asíntotas.

Para $x > 0$ la función es $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. La función no existe para $x = 1$.

Su dominio es $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿$x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0}=\infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

$y=1$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

No existe, pues existe asíntota horizontal.

EJERCICIO 4

El número de bacterias en un determinado cultivo viene dado por la función *B(t)*, donde *t* representa el tiempo en horas, con $0 \leq t \leq 7$. La variación instantánea en la población de bacterias en el cultivo viene dada por la derivada de la función *B*, cuya expresión es $B'(t) = 50000 \cdot e^{2t}$.

a) **(0.75 puntos)** ¿Existe algún instante *t* en el que el número de bacterias en el cultivo comience a decrecer?

b) **(1.5 puntos)** Obtenga la expresión de la función *B(t)*, sabiendo que en el instante *t = 0* el número de bacterias en el cultivo era de 40 000.

c) **(0.25 puntos)** ¿Cuál es el número de bacterias en el cultivo a la hora y media?

a) Hallamos los puntos críticos de la función igualando la derivada a 0.

$$\left.\begin{array}{l} B'(t) = 50000 \cdot e^{2t} \\ B'(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 50000 \cdot e^{2t} = 0 \Rightarrow e^{2t} = 0 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

La función no tiene puntos críticos y siempre es creciente pues $B'(t) = 50000 \cdot e^{2t} > 0$ para cualquier valor de *t*.

El número de bacterias en el cultivo siempre es creciente.

b) La función *B(t)* es la primitiva de $B'(t) = 50000 \cdot e^{2t}$.

$$B(t) = \int B'(t)\,dt = \int 50000 \cdot e^{2t} dt = 25000 \int 2e^{2t} dt = 25000e^{2t} + C$$

Como sabemos que $B(0) = 40000$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} B(t) = 25000e^{2t} + C \\ B(0) = 40000 \end{array}\right\} \Rightarrow 25000 \cdot e^{0} + C = 40000 \Rightarrow 25000 + C = 40000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 40000 - 25000 = 15000 \Rightarrow \boxed{B(t) = 25000e^{2t} + 15000}$$

c) Nos piden hallar *B(1.5)*.

$$B(t) = 25000e^{2t} + 15000 \Rightarrow B(1.5) = 25000e^{2 \cdot 1.5} + 15000 \simeq 517138.4231$$

El número de bacterias presentes en el cultivo a la hora y media es aproximadamente de 517138 bacterias.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Sean *A* y *B* dos sucesos de un mismo experimento aleatorio.

a) **(0.5 puntos)** Si $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$, ¿pueden ser los sucesos A y B independientes e incompatibles a la vez? Justifique la respuesta.

b) **(2 puntos)** Sabiendo que $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$ y $P(A/B) = 0.2$, calcule las siguientes probabilidades:

$$P(A\cap B) \qquad P(A\cup B) \qquad P\left(A^C \cup B^C\right) \qquad P(A-B)$$

a) Para que los sucesos A y B sean independientes e incompatibles a la vez debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} Independientes \rightarrow P(A\cap B) = P(A)P(B) \\ Incompatibles \rightarrow A\cap B = \varnothing \rightarrow P(A\cap B) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)P(B) = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 0 \\ o \\ P(B) = 0 \end{cases}$$

Como $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$ los sucesos no pueden ser independientes e incompatibles a la vez.

b)

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0.2 = \frac{P(A\cap B)}{0.5} \Rightarrow P(A\cap B) = 0.2\cdot 0.5 = \boxed{0.1}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.3 + 0.5 - 0.1 = \boxed{0.7}$$

o

$$P\left(A^C \cup B^C\right) = P\left((A\cap B)^C\right) = 1 - P(A\cap B) = 1 - 0.1 = \boxed{0.9}$$

$$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) = 0.3 - 0.1 = \boxed{0.2}$$

EJERCICIO 6

El censo de una población andaluza está compuesto en total por 15 000 personas, de las cuales 8 500 son mujeres. Se sabe que el 15% de las mujeres y el 20% de los hombres censados en dicha población han viajado alguna vez a un país extranjero. Se elige al azar una persona censada en dicha población.

a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que haya viajado al extranjero?

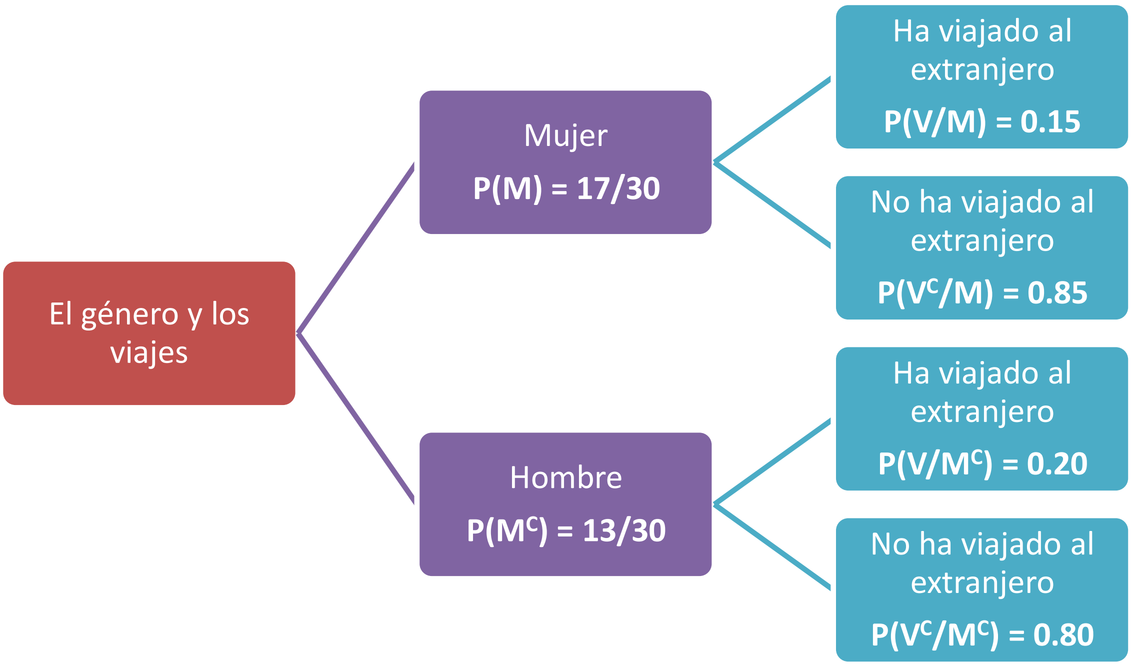
b) **(1.25 puntos)** Si se sabe que esta persona no ha viajado al extranjero, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

Llamamos M al suceso "Ser mujer" y V al suceso "Ha viajado alguna vez al extranjero".

$$P(M)=\frac{8500}{15000}=\frac{17}{30}$$

$$P\left(M^C\right)=1-\frac{17}{30}=\frac{13}{30}$$

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V)=P(M)P(V/M)+P\left(M^C\right)P\left(V/M^C\right)=$$

$$=\frac{17}{30}\cdot 0.15+\frac{13}{30}\cdot 0.20=\boxed{\frac{103}{600}\simeq 0.1716}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(M^C/V^C\right)=\frac{P\left(M^C\cap V^C\right)}{P\left(V^C\right)}=\frac{P\left(M^C\right)P\left(V^C/M^C\right)}{1-P(V)}=\frac{\frac{13}{30}\cdot 0.8}{1-\frac{103}{600}}=\boxed{\frac{208}{497}\simeq 0.4185}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

El tiempo de desfase, en minutos, entre la hora de paso programada de un autobús por cierta parada y la hora real a la que pasa, sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 4. Se observa el paso del autobús por la parada en 10 ocasiones elegidas al azar, registrándose los siguientes desfases:

4.7 2.1 3.6 5.4 0.0 4.2 4.0 –0.2 1.9 5.2

a) **(1.25 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza al 97% para el desfase medio en la hora de paso del autobús.

b) **(1.25 puntos)** ¿Qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el desfase medio con un error inferior a 30 segundos y un nivel de confianza del 95%? ¿Cómo variaría dicho tamaño muestral si se aumentara el nivel de confianza?

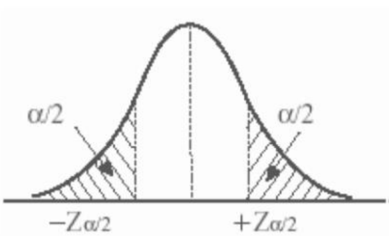
a) Hallamos la media muestral.

$$\bar{x} = \frac{4.7+2.1+3.6+5.4+0.0+4.2+4.0-0.2+1.9+5.2}{10} = \frac{30.9}{10} = 3.09$$

Como la varianza es 4 la desviación típica es $\sqrt{4} = 2$.

Nivel de confianza = 97% = 0.97 = 1 – α, de donde α = 0.03, con la cual α /2 = (0.03)/2 = 0.015 y por tanto 1 – α /2 = 0.985. Buscamos en la tabla de la normal este valor y obtenemos $z_{\alpha/2} = 2.17$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} \simeq 1.3724$$

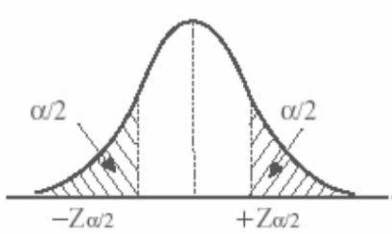
El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(3.09 - 1.3724, 3.09 + 1.3724\right) = \left(1.7176, 4.4624\right)$$

b)

Nivel de confianza = 95% = 0.95 = 1 – α, de donde α = 0.05, con la cual α /2 = (0.05)/2 = 0.025 y por tanto 1 – α /2 = 0.975. Buscamos en la tabla de la normal este valor y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1.96$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750



30 segundos son medio minuto. Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.5 \Rightarrow \frac{3.92}{\sqrt{n}} = 0.5 \Rightarrow 3.92 = 0.5\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{3.92}{0.5} = 7.84 \Rightarrow n = 7.84^2 = 61.4656$$

El tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 30 segundos es de 62 paradas de autobús.

¿Cómo variaría dicho tamaño muestral si se aumentara el nivel de confianza?

Si aumentamos el nivel de confianza aumenta el valor de $z_{\alpha/2}$ y aumentaría el error, por lo que debería aumentar el tamaño muestral (n) para mantener el mismo Error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

EJERCICIO 8

Una tienda de ropa quiere estudiar la aceptación de un nuevo sistema de pago a través del teléfono móvil. Para ello realiza una encuesta entre 200 de sus clientes elegidos al azar, resultando que 150 de ellos sí estarían dispuestos a usar el nuevo sistema de pago.

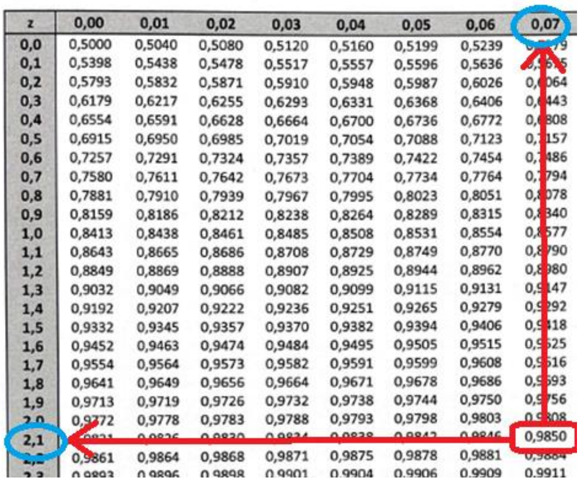
a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 97% para estimar la proporción de clientes de esa tienda que estarían dispuestos a usar el nuevo sistema de pago.

b) **(1 punto)** Mediante una nueva encuesta se quiere estimar la proporción de clientes de esa tienda que usarían el nuevo sistema de pago, con un error máximo del 3% y un nivel de confianza del 94%. Suponiendo que se mantiene la proporción muestral del apartado anterior, ¿a cuántos clientes como mínimo habría que realizar la encuesta?

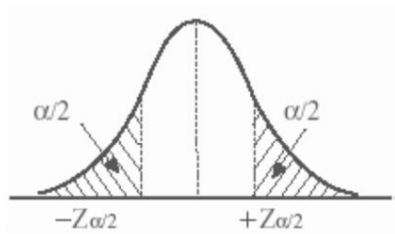
a) $n = 200.$ $pr = \dfrac{150}{200} = 0.75$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.75 = 0.25$

Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	[illegible]
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	[illegible]
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	[illegible]
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	[illegible]
2,1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0{,}9850}$
[illegible]	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9911



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{200}} = 0.0664$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

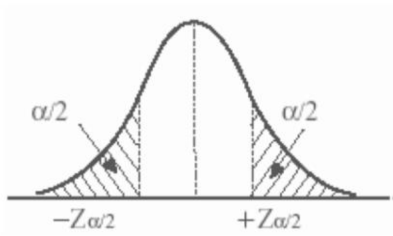
$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.75 - 0.0664,\quad 0.75 + 0.0664) = (0.6836,\ 0.8164)$$

b) ¿n? $pr = \dfrac{150}{200} = 0.75$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.75 = 0.25$

Con un nivel de confianza del 94 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}94 \rightarrow \propto = 0{,}06 \rightarrow \propto/2 = 0'03 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}97 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.88}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	$\boxed{0.9699}$
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{n}} = 0.03 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.1875}{n}} = \frac{0.03}{1.88} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.1875}{n} = \left(\frac{0.03}{1.88}\right)^2 \Rightarrow 0.1875 = \left(\frac{0.03}{1.88}\right)^2 n \Rightarrow n = \frac{0.1875}{\left(\frac{0.03}{1.88}\right)^2} = 736.33$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 737 clientes.