MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

(Documento de trabajo orientativo)

SOLUCIONES

A.1. *a*)

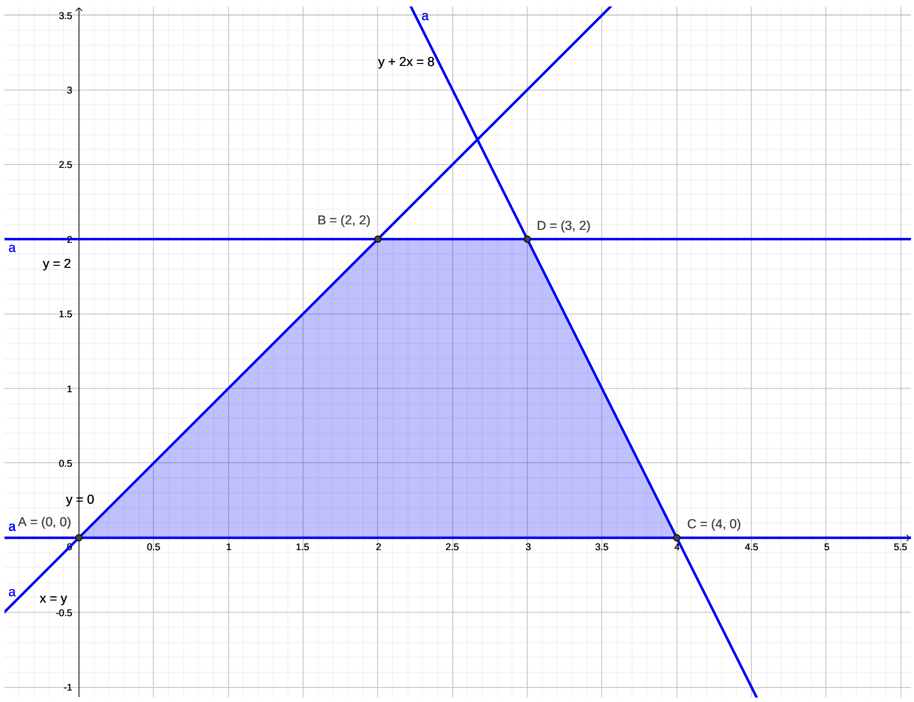
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}$$

b)

$$(AA - 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A.2. *a*) Las coordenadas de los vértices son $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$, $C = (4, 0)$ y $D = (3, 2)$.



b) La función $f(x, y) = 4x - y$. Evaluamos en los vértices de la región factible obtenidos:

- $f(0, 0) = 0 \rightarrow$ Mínimo
- $f(2, 2) = 6$
- $f(4, 0) = 16 \rightarrow$ Máximo
- $f(3, 2) = 10$

A.3. *a*)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + ax^2 - 1 \\ f'(x) &= 6x^2 + 2ax = 0 \longrightarrow x = 0; x = -\frac{a}{3} \longrightarrow a = 3 \\ f''(x) &= 12x + 2a, \text{ tomando } a = 3 \longrightarrow f''(-1) = -6 \text{ máximo} \end{aligned}$$

b)

$$f'(x) = 6x^2 + 2x \longrightarrow f'(x) = 0 \longrightarrow x = 0; x = -1/3$$

x	$(-\infty,-1/3)$	$(-1/3,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	+	$-$	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

A.4. Sean los sucesos G: Gratuito, $\overline{G}$: No gratuito, C: Calle, $\overline{C}$: No en la calle

$$P(G) = 0'7; P(\overline{G}) = 0'3; P(C|G) = 0'6; P(C|P) = 0'2$$

a)

$$P(G \cap \overline{C}) = P(\overline{C}|G)P(G) = 0'4 * 0'7 = 0'28$$

b)

$$P(C) = P(C|G)P(G) + P(C|\overline{G})P(\overline{G}) = 0'6 * 0'7 + 0'2 * 0'3 = 0'48$$

A.5. *a*)

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 200 \Rightarrow \sqrt{n} > 1'96\tfrac{900}{200} = 8'82$$
$$n > 77'79 \Longrightarrow n \geq 78$$

b)

$$P(\overline{X} > 1900) = P\left(\frac{\overline{X} - 1889}{900/\sqrt{64}} > \frac{1900 - 1889}{900/\sqrt{64}}\right)$$
$$P(Z > 0'098) = 1 - 0'54 = 0'46$$

SOLUCIONES

B.1. *a*) Las matrices del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

El determinante de A es $|A| = -2a + 4$ que será igual a 0 si $a = 2$.
Entonces

$$\begin{array}{lll} a = 2 & rg(A) = 2 & rg(\overline{A}) = 3 \\ a \neq 2 & rg(A) = 3 & rg(\overline{A}) = 3 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{Sistema incompatible} \\ \text{Sistema compatible determinado} \end{array}$$

b) Para a=1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} -F_3 \\ F_2 \\ F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Entonces la solución es $z = -1/2; y = -7; x = 11/2$

B.2. *a*)

$$f(x) = ax^3 - x^2 - x + a$$
$$f'(x) = 3ax^2 - 2x - 1$$
$$f''(x) = 6ax - 2$$
$$\text{Como } f''(1) = 6a - 2 = 0 \longrightarrow a = 1/3$$

b) Para a=2

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2$$

Como $x = -1$ es una raíz, $f(x) = (x+1) * g(x)$, con $g(x) = 2x^2 - 3x + 2$ y $g(x)$ no tiene raíces reales, por lo que $f(x)$ sólo cambia de signo en $x = -1$,

$$\text{Como } f(x) \geq 0 \text{ para todo x} \in (0,1)$$

$$\int_0^1 (2x^3 - x^2 - x + 2)dx = \left.\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{5}{3}$$

B.3. *a*) Como

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-3}{x+1}$$

la función es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x+1} & \text{si } x > 1 \\ -x^2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

entonces

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-3}{x+1} = -1$$

y

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-x^2) = -1$$

Entonces $f(x)$ es continua en $x = 1$ y es continua en todo x.

b) No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-3}{x+1} = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^2) = -\infty$$

Tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ cuando $x \to \infty$

B.4.Definimos los sucesos P: Periódico, $\overline{P}$: Revista, C: Castellano $\overline{C}$: Otro idioma

$$P(P) = 0'4; P(\overline{P}) = 0'6; P(C) = 0'9; P(\overline{C}) = 0'1; P(\overline{P}\cap\overline{C}) = 0'08$$

a)

$$P(P|\overline{C}) = \frac{P(\overline{C}\cap P)}{P(\overline{C})}$$

Como

$$P(\overline{C}) = P(\overline{C}\cap\overline{P}) + P(\overline{C}\cap P) = 0'1$$
$$P(\overline{C}\cap P) = 0'1 - P(\overline{C}\cap\overline{P}) = 0'1 - 0'08 = 0'02$$

entonces

$$P(P|\overline{C}) = \frac{P(\overline{C}\cap P)}{P(\overline{C})} = \frac{0'02}{0'1} = 0'2$$

b)

$$P(P\cup\overline{C}) = P(P) + P(\overline{C}) - P(\overline{C}\cap P)$$

Como

$$P(\overline{C}) = P(\overline{C}\cap P) + P(\overline{C}\cap\overline{P}) = 0'1$$
$$P(\overline{C}\cap P) = 0'1 - P(\overline{C}\cap\overline{P}) = 0'02$$

$$P(P\cup\overline{C}) = P(P) + P(\overline{C}) - P(\overline{C}\cap P) = 0'4 + 0'1 - 0'02 = 0'48$$

B.5. a) La fórmula para un intervalo de confianza al 90 % es

$$IC_{0'9}(\mu) = (\overline{x} \pm z_{0'05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

como $z_{0'05} = 1'64$, con los datos del problema se obtiene

$$IC_{0'9}(\mu) = \left(5100 - 1'64\frac{500}{\sqrt{100}}, 5100 + 1'64\frac{500}{\sqrt{100}}\right) = (5018, 5182)$$

b)

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = Error$$
$$z_{\alpha/2}\frac{500}{\sqrt{36}} = 160 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1'92$$

El nivel de confianza en el intervalo es $1-\alpha = 0'945$ o del $94'5\,\%$